J.J. キャラハン 著
樋口三郎 訳

THE GEOMETRY OF SPACETIME

時空の幾何学

特殊および一般相対論の数学的基礎

Springer
シュプリンガー・フェアラーク東京

フェリシティに捧げる

Translation from the English language edition:
***The Geometry of Spacetime* by James J. Callahan**

序言

概観

この本は，アインシュタインの特殊および一般相対論への入門書である．この本を読むには，線型代数と多変数の微積分の初等的な講義で学ぶ程度の知識を持っていて，微積分を物理に使うことに慣れていさえすれば十分である．一般相対論は特殊相対論より高度なので，ほとんどの教科書はどちらか一方だけを扱っている．しかし，私は時空の幾何学という統一的な見方で両者を扱うことを試みた．もちろん，数学的には両者は大きく隔たっている．特殊相対論は線型代数にすぎないが，一般相対論は微分幾何，特に計量のある 4 次元時空の微分幾何である．

特殊相対論の起源

アインシュタインの特殊相対論によって，20 世紀初頭に物理学者を当惑させていた問題が解決した．それは，異なる観測者がそれぞれ光の速さを測ったときに起こることに関係する．例えば，第 1 の観測者が第 2 の(静止している)観測者の前を，光速の 1/10 の速さで通りすぎるとしよう．このとき，光が観測者と同じ向きに進んでいたとすると，追い越される観測者から見た光の速さは，静止している観測者から見た速さの 9/10 にすぎないと読者は考えるかもしれない．実際には，注意深く計画された測定(1880 年代に行なわれたマイケルソン–モーレーの実験)の結果，この予想と矛盾する結果が得られた．光は，観測者がどのような運動をしていようとも，すべての観測者の前を同じ速さで通りすぎるのである．

これを説明するために，速度の計算がちょうどつじつまがあう分だけ，運動している定規は縮み，時計の進みはゆっくりになる，という仮説が提案された．オランダの物理学者 H. A. ローレンツは 1895 年に，動いている観測者の長さと時間が，どのような変更を受けるかを記述する方程式を書き下すところにまで到達していた．しかし，これらの仮説は場当たり的なもので，説明しようとしている現象に負けず劣らず人々を当惑させるものだった．

相対性原理

アインシュタインが，より急進的でより満足のいく解答を提示したのは，約 10 年後のことだった．彼の解答は，2 つの仮定の上に築かれたものだった．その 1 つは，ガリレイの**相対性原理**である．それによれば，

> 互いに相手に対して一定の速度で運動している 2 人の観測者は，自然法則を

> まったく同じ形に定式化しなくてはならない．特に，どのような観測者も，絶対静止と絶対運動を自然法則によって見分けることはできない．したがって，絶対運動というようなものは存在せず，(一方の観測者の他方に対する)相対運動だけが存在する．

相対性は，ずっと以前から力学の核心にあった．しかし，アインシュタインは，相対性を，電気，磁気，光を含むすべての物理現象に対して成り立つ普遍的な原理とした．彼のおいたもう1つの仮定は，もっと驚くべきものだった．彼は，光の速さの不変性を他のことから導出することを試みるのでなく，運動する観測者が同意しなければならない自然法則の1つとしてそのまま受け入れたのである．アインシュタインは，この立場からローレンツの変換方程式とその帰結である長さの収縮と時間の伸びを**導出**した．この相対性の新しい理論(“特殊” という限定は，後になってアインシュタインがより一般の理論を導入したときに初めてつけられた)では，時間座標は空間座標と同じ資格で扱われる．さらに，空間と時間はもはや別々に存在するのでなく，統合されて1つの構造—時空となる．そして，1907年には，数学者H. ミンコフスキが，アインシュタインの考えは時空の新しい幾何学と解釈できることを指摘した．

線型な時空の幾何

第1章では，特殊相対論のきっかけとなった物理の問題を説明し，相対性の核心である座標変換の問題の探索を始める．ここでは，複数の観測者が互いに等速直線運動していると仮定するので，それぞれの座標系を関係づけるのは線型変換であるローレンツ変換である．幾何学的には，この変換はちょうど空間の回転のようなものだが，その不変集合は円でなく双曲線である．第2章では，アインシュタインが，ローレンツ変換を核にしてどのように全体の理論を組み立てたかを述べる．ミンコフスキの提案した幾何学的な見方から，時空のミンコフスキ幾何を，ローレンツ変換の不変理論として，回転の不変理論であるユークリッド幾何と常に対照しつつ，展開する．

第3章では，加えられた力によって加速する物体の運動を特殊相対論によって解析する．この運動は，時空上に自然に拡張されたニュートンの法則に支配される．加速度の幾何学的表現としての曲率—ここでは，時空の上で物体が描く曲線の曲率—について調べる．また，この章のもう1つの目的は，物理法則は座標と同様に変換しなければならない，という**共変性の原理**を導入することである．

一般相対論の起源

特殊相対論の特殊とは，加速せずに等速直線運動するような特別な観測者しか考えない，という意味で，これらの観測者の座標系は ‘**慣性**座標系’ である．すなわち，ガリレイの慣性の法則が無条件に成立する．慣性の法則は，ニュートンの運動の法則の中の第1法則である．それによれば，力が加えられていないとき，静止している物体は静止を続け，運動している物体は一定の速度で運動を続ける．軌道上の宇宙船の中で，宇宙飛行士や機材が自由に漂っているという場面は，最近ではよく見かけるようになったが，これは，宇宙船に固定された座標系が慣性座標系であるということを示している．それでは，地球上の実験室に固定された座標系は慣性座標系だろうか？ 実験室では，物体は自由に漂ったりはしないわけだが，このような運動は，重力によって説明

される．

重力と一般相対論

重力は私達が生まれたときから親しんでいる力であるが，それにも関わらず，重力は一風変わった力と見なければならない．ニュートンの第2法則によれば，一定の力が加えられたとき，大きな質量の物体の得る加速度は，小さな質量の物体が得るものより小さい．しかし，重力による加速度は，すべての質量の物体について同じなので，重力は，それぞれの物体の質量に応じて，引力の大きさを調節しているはずである．この特筆すべき性質から，宇宙で人工的に重力場を作り出すことが可能になる．重力源から遠く離れた宇宙船に，等加速度直線運動をさせると，宇宙船内の物体は，まるで地球上での運動のように“落下する”ようになる．またこのとき，やはり地球上と同じように，この人工的な力はすべての物体に同じ大きさの下向きの加速度を与えるように，自動的に調節される．実際，時空の十分に小さな領域においては，座標系の等加速度運動による加速度と，地球のような質量の大きい物体の重力による加速度とを区別する方法はない．これがアインシュタインの等**価原理**である．彼は，これを革命的な新しい重力の理論の基礎においた．

アインシュタインの見方では，重力場中にいる観測者というのは，単に，ある種の非慣性座標系を採用しているにすぎない．重力を適切に扱える物理の理論は，非慣性座標系を，慣性座標系と対等に扱えなければならず，また，物理法則は，これらの座標系を採用する**すべての**観測者にとって同じ形でなければならない．これが，よく知られた相対性原理の，最も一般的な形である．重力の正しい理論は，一般相対性に基づいて構成されなければならない．特殊相対論から一般相対論に移行するにあたって，第4章では，慣性座標系から見て一様回転する座標系と等加速度直線運動する座標系の2種類の具体的な非慣性座標系を考察する．また，この章では，ニュートンの重力理論を説明して，重力場中を粒子がどのように運動するかを規定する常微分方程式と，質量がどのような重力場を作るかを規定する偏微分方程式を提示する．

重力と特殊相対論は相容れない

第4章ではまた，非慣性座標系をミンコフスキ幾何で記述することはできないという致命的な事実を見る．ミンコフスキ幾何は，線型な時空を支配する美しく単純な幾何学だが，これで非慣性座標系を記述しようとしても，距離が歪められてしまう．この歪みは，地球の表面の一部分を平らな地図上に描こうとしたときに現れるのと同じ種類のものである．地球の表面が曲がっているために，地図上では距離が歪められる．したがって，重力場のある場合の座標系の距離の歪みは，時空が曲がっているために起こると考えるのが自然である．これの意味するところは，特殊相対論の慣性座標系は平坦なので，満足のいく重力の理論は，ニュートン力学と特殊相対論では構築できないということである．

曲率は，アインシュタインの重力理論の鍵となる概念であり，第5章と第6章では曲率が主題になる．曲率の本質的な性質を調べることのできる，最も単純な状況は，3次元空間の普通の曲面の微分幾何であり，第5章ではこれを扱う．曲面の各点には接平面があり，各接平面には計量，すなわち，長さと角の大きさを測るための方法が備わっている．計量は，曲面の置かれた3次元空間の距離測定から自然に導かれるものである．これを使って，微積分の技術により，曲面そのものの上の幾何学的計算をすることができる．こ

の設定では，曲率は曲面の幾何の外部的な要素，すなわち，曲面が 3 次元空間の中でどのように曲がっているかを表す量であるかのように見える．しかし，私たちの住む 4 次元時空は，認知できる，より大きな空間に埋め込まれている様子がないので，この設定は，物理的にも心理学的にも不十分である．運よく，19 世紀の大数学者 K. F. ガウスが，曲率は実は曲面の内在的性質である，すなわち，曲率は埋め込みの仕方によらずに計量だけから求められる量であることを示している．この定理により，曲面のパッチ，あるいは任意の観測者の時空座標系を，適当な計量が定義された開集合と見なす**内在的微分幾何**の抽象的理論が展開できるようになった．

内在的微分幾何

第 6 章では，曲がった時空の内在的微分幾何を扱う．まず，ガウスの基本定理を証明し，次に，アインシュタインの一般相対論を定式化するのに必要な測地線やテンソルの概念を用意する．そして，相対論における基本的な問題設定，2 人の観測者が曲がった時空の同じ領域を記述するとき，2 人の座標系は G は R どのように関係づけられるべきかを調べる．その答は，ある滑らかな写像 $M : G \to R$ で，その微分 $dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$ が，G の各点 P でローレンツ写像(接空間の間の，計量を保つ線型写像)を用いるべきだということである．言い換えると，特殊相対論は，一般相対論を "局所化" したものである．ちょうど平面のユークリッド幾何が曲面の非線型な幾何に拡張されるように，第 2 章，第 3 章のミンコフスキ幾何は，時空の非線型な幾何に拡張される．

測地線と重力場の方程式

第 7 章では，一般相対論そのものを取り上げる．アインシュタインは，一般共変性の原理から，物理学の法則は，適切な変換を受けるためには，テンソル方程式の形に書かれるべきだと主張した．重力場中を自由落下する座標系を考えてみよう．そのような座標系は慣性座標系であり，やはり自由落下する別の物体の運動は，この座標系では，等速直線運動，すなわち，測地線に沿った運動である．測地線はテンソル方程式で定義されるので，一般共変性から，落下する物体はどの観測者から見ても測地線上を運動することが保証される．したがって，重力場中の運動方程式とは測地線方程式である．さらに，任意の座標系における計量が，その座標系での重力場を決定する．この章の残りの部分では，重力場の方程式を扱う．重力場の方程式が，ニュートンの理論の場合と同様，潮汐力の分析から導かれる．場と計量は関係づけられているので，重力場の方程式は，重力源からどのように重力場が決まるかだけでなく，どのように時空の曲率が決まるかも規定している．この方程式が，アインシュタインの，重力は幾何であるという驚くべき結論そのものである．

一般相対論が正しいことの証拠

最後の第 8 章では，アインシュタインが 1916 年の一般相対論の論文で述べた，彼の理論が正しいことの 3 つの証拠について説明する．第 1 の証拠として，アインシュタインは，重力場が弱く，物体が光の速さに比べて遅く運動する極限で，一般相対論はニュートン力学に帰着することを示した．第 2 の証拠は，重力とは曲率にほかならないという主張に関係する．それが真実ならば，質量の大きな物体は，近くを通るものの経路を曲げるはずで，光もその例外ではない．アインシュタインは，太陽による恒星の光の曲がりを，日食の際に検出できると予言した．この予言は，1919 年に完全に実証された．

第 3 の証拠は，水星の近日点移動である．近日点移動の観測値が，ニュートン理論の予言よりも大きいことは 1860 年代から知られていた．アインシュタインの理論は，観測値を食い違いなく与えた．この説明のために，アインシュタインの議論に従って，球対称な質量分布の作る計量，すなわち重力場を導く．これらの過程で，2 組の異なる条件下で重力場の方程式を解く．一方では有名なシュヴァルツシルト計量が得られ，もう一方ではアインシュタイン自身の求めた弱場解が得られる．

採用しなかったやり方

私の一貫した基本的な目標は，一人一人の観測者が世界をどのように見るか，そして，2 人の観測者が協力して世界の客観的な知識を得るにはどうしたらよいか，を考察することである．最も単純な場合には，観測者の座標系は $\mathbf{R}^4$ の中の球と同相であり，観測者は物理法則を定式化するのに，そのパッチの座標を用いる．これは，成分表示によらないテンソル計算や，時空を多様体ととらえて複雑な位相を持つことを許すことが，少なくとも初等的な段階では，不適切であるという考えの現れである．実際，このような幾何の抽象的な定式化は，2 人の観測者が座標に基づく物理的世界の情報をどのように交換し，どのように合意しなければならないかを知って，初めてその価値と目的が理解できるものである．この教科書を多くの読者に理解できるようなものとするために，変分法は用いないことにした．その代償は，相対論的な重力場の方程式という基本的で重要な結果を非相対論的な場合からの類推だけに頼って導かなければならないということである．

この本のもととなったもの

この本の構想は 1978 年の春にウォリック大学(Universiy of Warwick)で行われたジョン・ミルナー(John Milnor)の 3 回の連続講義に遡る．彼は，数学畑の聴衆に対して，幾何学の言葉で相対論を統一的に理解できることを示した．彼の講義の構成は，私がこの本でとったものよりも高度で，いくつかの概念の定式化と結果の導出には変分法が使われたが，ミンコフスキ幾何をユークリッド幾何と並行に展開するという，美しく抗しがたい方法をとる点はこの本と共通している．講義のほとんどすべてが，学部学生に理解可能な形で語られた．例えば，ミルナーは，相対論的な潮汐加速度の方程式をフェルミ座標系で書くと，ニュートン理論の場合と完全な対応のつく 3×3 の対称行列が現れるという議論をした．これにより，相対論的な重力場の方程式を，変分法の議論を行うことなく，非相対論的な方程式との対応から導ける．

この本を書くにあたって，他にも多くの教科書，文献を参照したが，ここでは特にその中の 4 つに言及したい．最初に挙げるべきはアインシュタイン自身の一連の論文である．アインシュタインや，ローレンツ，ミンコフスキの重要な論文は The Principle of Relativity [20] に英訳で収められている．アインシュタインの論文はとても読みやすく，必要な予備知識も少ない．相対論を理解しようとするすべての人は，彼の 1916 年の論文 [10] を読むべきである．他の 3 つは，それぞれの特定の領域を扱ったものである．フェルミ座標に関する F. K. Manasse と C. W. Misner の論文 [21],John McCleary の Geometry from a Differentiable Viewpoint [22] の中の平行移動の取り扱い，そして，B. A. Dubrovin らの Modern Geometry[7, Part I] の中の弱場の解析である．

私自身について言えば，1980 年代初めから，大学の学部の幾何学または応用数学の講義として，この教科書の内容を 5,6 回教えている．これらの講義では，毎回，1,2,3,5,6 章は詳しく扱い，4,7 章についてはその一部分を扱うことができた．しかし，第 7 章を完全に終えたことはなく，第 8 章にはまったく触れられなかった．この教科書は，後の章に進むにつれて読者により多くを要求し，扱っている題材も難しくなるが，それでも，学部高学年で教えられる伝統的な解析学の科目よりも難しくはないはずである．現代的な微積分の科目では，微分方程式，数値積分，数式処理などに力をいれていることを考慮し，いくつかの部分では読者がこれらの知識を持っていることを想定した．

この本を書くことは，サバティカルなしには不可能だっただろう．また，長年にわたる温かい支援と理解で，この題材を講義として準備することができたことも，この本を書く上では不可欠だった．私は，スミスカレッジ(Smith College)と私の同僚に感謝する．そして特に，この本の内容についての現代的な視点と鋭い質問とコメントによって，私の相対論に関する考察をより明確にしてくれた Michael Callahan に感謝する．

目　次

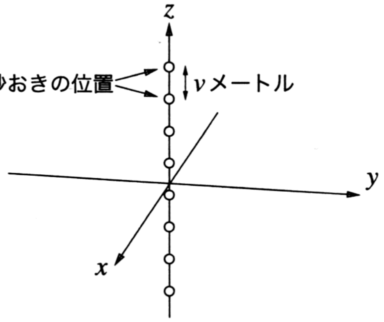
第1章
1905年以前の相対性

1905年，アルバート・アインシュタイン(Albert Einstein)は，革命的な理論 —特殊相対論— を提出した．それは，当時の物理学者をおおいに悩ませていた，電磁気学と運動にまつわる問題を部分的ではあるが解決する理論だった．そのすぐあと，数学者ハーマン・ミンコフスキ(Hermann Minkowski)は，特殊相対論を，時空を表現するための新しい幾何学的な構造ととらえて組み立て直した．アインシュタインとミンコフスキの理論が，これからの2つの章のテーマである．まず，彼らを，この考えに至らせた物理的問題と，それに対してそれまでの研究者が与えた部分的な解答を見てみることにしよう．

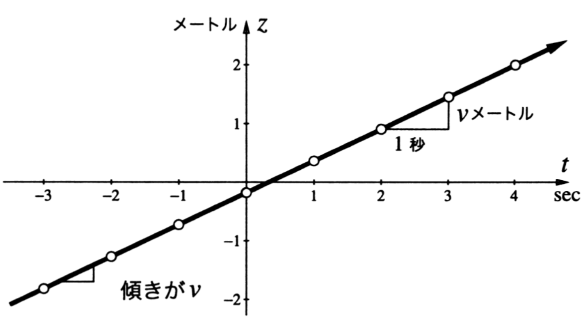
1.1 時空

運動を記述する方法

読者は，意識的にせよ無意識的にせよ，時空という考え方には慣れているはずだ．運動を記述したり解析したりするのに，時空ダイアグラム(spacetime diagram)を使ってきたと思う．例として，1個の粒子が z 軸上を正の向きに一定の速度 v メートル毎秒で進んでいる場合を考えよう．もし，この場面を，1秒に1回光るストロボを使ってカメラで撮影したとしたら，左側の図のような写真がとれるだろう．



空間
(ストロボ使用)



時空
(x軸とy軸は描かれていない)

時空と世界線

しかし，運動を表すには，左側よりも，右側のダイアグラムのほうがよく

使われる．これは，**時間**に対応する座標軸があることから，**時空**(spacetime)の絵であることがわかる(したがって，本来このダイアグラムには **4** **つ**の座標軸があるはずなのだが，この粒子の運動では x と y は変化しないので，簡単のために x 軸と y 軸は描かなかった.) 粒子の運動は，傾き v(メートル毎秒)の直線で表される．この直線のことを，粒子の**歴史**(history)，または **世界線**(worldline)，という.[注1]

時空は 4 次元

すべての運動が z 軸上で起こる場合には，上のように，時空が (t, z) 平面であるようにすることができる．しかし，運動が 3 次元的に広がった領域で起こるときには，そうはいかない．時空は，$(1+3)$ 次元の (t, x, y, z)'超空間' になる．もちろん，$(1+1)$ 次元の時空のほうが，目で見てわかりやすいので，できるだけ，こちらの方を使うようにしよう．時空の点 (t, z) や (t, x, y, z) を**事象**(event)と呼ぶことにする．事象とは，出来事，つまり必ず，ある場所である時刻に起こるものだから，この呼び方は妥当だろう．

点は事象

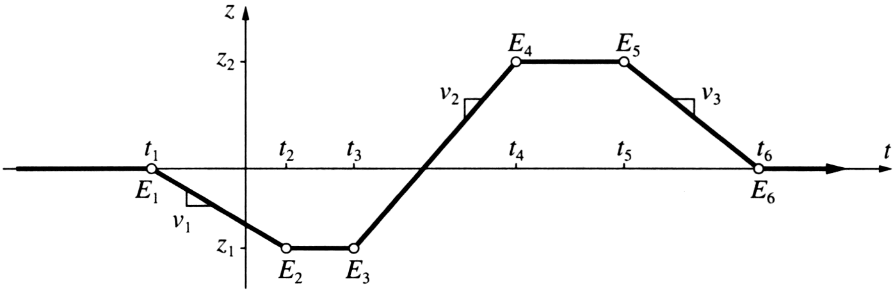
例:異なる定速度

下に示したのは，z 軸上を運動する "飛脚" の，$(1+1)$ 次元の時空での世界線である．

E_1: 時刻 t_1 に家を出発
E_2: 時刻 t_2 に z_1 に到着
} 速度 v_1 で移動

E_3: 時刻 t_3 に z_2 に向けて出発
E_4: 時刻 t_4 に z_2 に到着
} 速度 v_2 で移動

E_5: 時刻 t_5 に家に向けて出発
E_6: 時刻 t_6 に家に到着
} 速度 v_3 で移動



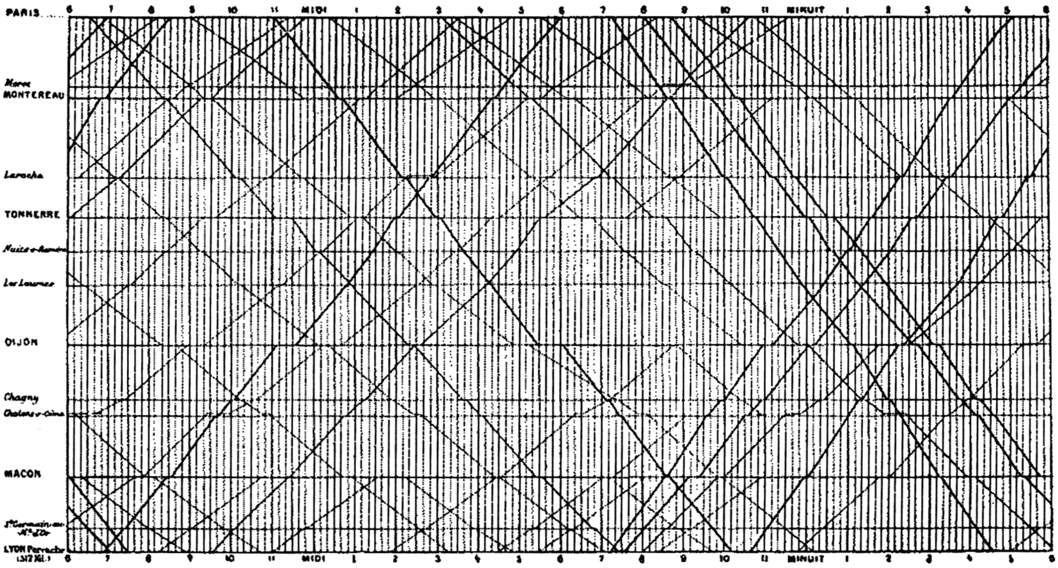
2 つの事象 E_2 と E_3 は，異なる事象だが，起きた場所は同じである．別の 2 つの事象 E_4 と E_5 もその例である．また，世界線が図中で水平にのびているときは，飛脚は動いていない．世界線と，飛脚が空間の中でたどった道筋とは**異なる**ものであることに気をつけよう．世界線は，斜めや水平に走っているが，このとき飛脚は，z 軸を上下に移動している．

例:フランスの列車

次の例は，エドワード・R. タフト(Edward R. Tufte)の書いた**量的情報の視覚的表現**(The Visual Display of Quantitative Information) [29] からとったもので，フランスの大動脈であるパリ-リヨン間の鉄道の，1880 年代の運行ダイヤを描いた図である．当然，何本もの列車が走っているので，前

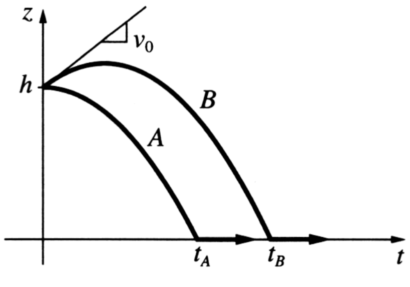
[注1] 訳注：原文には worldcurve ("世界曲線")，worldline ("世界直線")の 2 種類の単語が現れるが，日本語で一般的に使われている単語は世界線だけのようである．

の例では1本だけだった世界線が，今度は1つの図の中に何本も描かれている．縦軸は，パリからリヨンまでの道のり，横軸は時間に対応する．したがって，これはまさに時空ダイアグラムである．[注2]斜めの線は，列車の世界線で，右下がりの線はリヨン行きを，右上がりの線はパリ行きを表す．急行は傾きの急な線になっており，停車を表す水平な部分は短く，また数も少なくなっている．



例: 一定でない速度

落下する物体のように，一定でない速度で運動する物体は，時空ダイアグラムの中で曲がった世界線を描く．下の時空ダイアグラムには，高さ $z = h$ の点から地面 $(z = 0)$ に落ちる2つのボール A と B の世界線が描かれている．ボール B が，初速度 $v_0 > 0$ でまっすぐ上に投げあげられたのに対して，ボール A は，停止した状態からそっと落された $(v_0 = 0)$ 2つのボールは同じ時刻 $(t = 0)$ に運動を始め，まず A が時刻 $t = t_A$ に地面に達し，そのあと $t = t_B$ に B が達した．そのあと，ボールはバウンドせずに地面に静止したので，世界線は右に水平に続いている．



世界線はグラフの一種

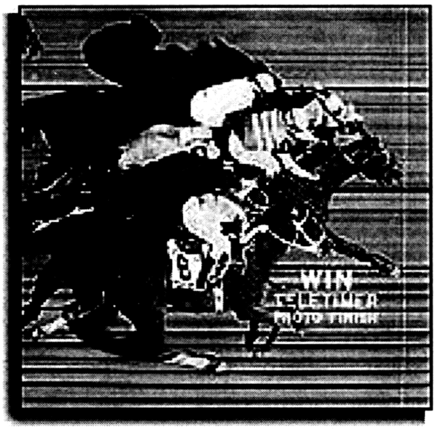
もう一度，確認しよう．上の世界線の一部は放物線だが，空間の中でボール A,B が動く方向は鉛直だ．ボール A はそのまま真下に落ちる．ボール B はまず上昇し，一瞬止り，そして真下に落ちる．この例は，読者は見慣れてい

[注2] 訳注：運行“ダイヤ”という日本語は，ダイアグラムを略したものである．

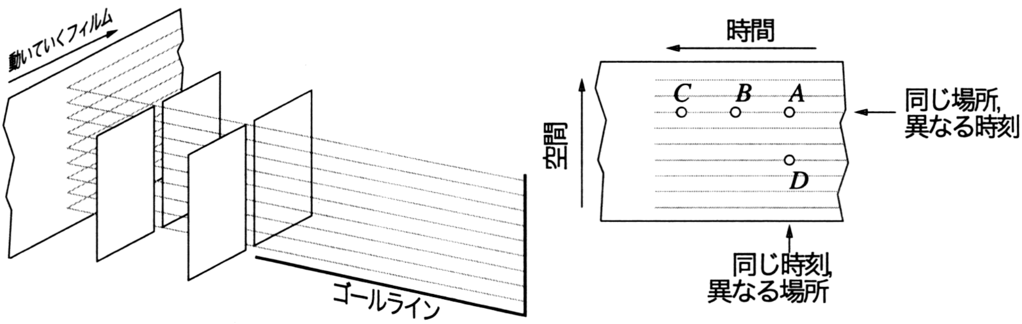
るはずだ．一般に，物体の時刻 t での位置 z が，関数 $f(t)$ によって $z=f(t)$ と与えられるとき，関数 f の (t,z) 平面に描かれたグラフが物体の世界線にほかならない．このことは練習問題1,1dでその例を見る．

例: 競馬の写真判定

下の写真では，(1997年のプリークネス競馬[注3]での写真判定に使われたもの)勝馬は2位に1馬頭の差をつけている．だが，2位はどの馬だろう？ちょっと見たところでは，向こう側の白い馬のように見える．それとも，こちら側の黒い馬はゴール直前で逆転できたのだろうか？



実は，2位でゴールしたのは向こう側の白い馬だった．証拠はこの写真だ．写真判定に使われる写真は，普通の写真とは違う．普通の写真は，‘スナップショット’つまり，ある瞬間の画像である．カメラは，レンズを通して，3次元的な画像を，静止したフィルムに記録する．一方，写真判定用のカメラには，ゴールライン上の平面だけを見られる細いスリット(線状の隙間)があり，その後ろに置かれたフィルムは，撮影中に一定の速度で送られていく．したがって，ゴール平面内で起きた事象は，フィルムの送り方向に時間順に記録されていく．



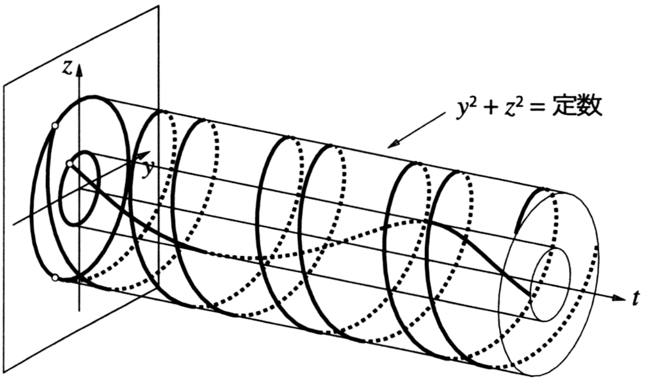
したがって，写真判定の写真は時空ダイアグラムになっている．ゴールライン上の同じ地点で，異なる時刻に起きた事象 A, B,C は，フィルム上では，横方向に分離して—先に起きた事象ほど，フィルムの右の方に—記録される．

[注3] 訳注：アメリカ合衆国メリーランド州ボルティモアのピムリコ競馬場で行われるクラシックレース．

こうして撮られた写真には，馬の全身が写ることになる．最終的には1頭の馬のすべての部分がゴールラインを通過するからだ．事象 A と事象 D のように，同時刻に，しかしゴールライン上の別の場所で起きた事象は，フィルム上では，横方向には同じ位置に，縦方向には離れて記録される．つまり，フィルム上のすべての縦線はゴールラインなのだ！ より左側の方にある縦線には，よりあとの時刻にゴールライン上で起きたことが記録されている．これが，この写真が白い馬が2着になった証拠になるという理由だ．

空間2次元の時空

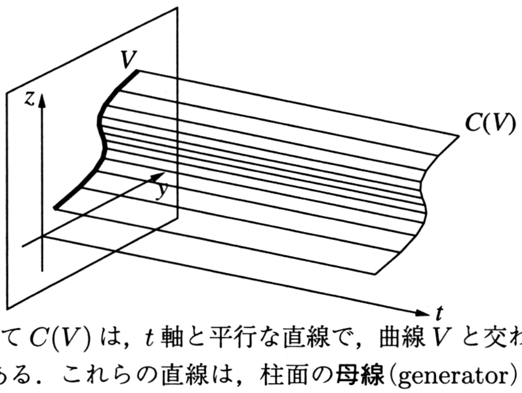
もし物体が2次元的に広がる平面内を動くとしたら，物体の世界線は，(1+2) 次元の時空の中に描かれる．例えば，物体が，一定の角速度で (y, z) 平面内の円周 $y^2 + z^2 =$ 定数 の上を動くとすれば，世界線は，時空 (t, y, z) の中のらせんになる．らせんの‘巻きがきつい’ほど，角速度は大きいことになる．巻きのきつさが同じの2つのらせんは，角速度は等しいが，円周上の出発点が異なる2つの運動に対応する．



世界線は円柱上

らせん状の世界線は，すべて (1+2) 次元の (t, y, z) 時空の中の円柱 $y^2 + z^2 =$ 定数 の上にあることに注目しよう．この事実はもう少し一般化できる．もし物体が (y, z) 平面内の曲線 V に沿って運動するなら，その世界線は，(t, y, z) 空間の中で V を t 軸に平行に動かしたときに掃かれる柱面(cylinder)

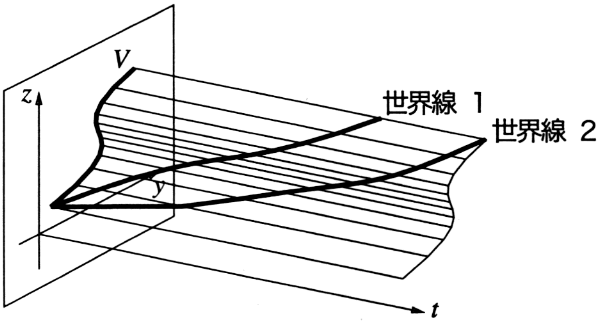
$$C(V) = \{(t, y, z) : (y, z) \text{ は } V \text{ の点 }\}$$



の上にある．したがって $C(V)$ は，t 軸と平行な直線で，曲線 V と交わるすべてのものの和集合である．これらの直線は，柱面の**母線**(generator)という．柱面 $C(V)$ は，V が円周であるという特別の場合には，普通の円柱(circular cylinder)になる．同じ曲線 V の異なる助変数表示

$$V : y = f(t), \quad z = g(t)$$

は，$C(V)$ の上にある異なる世界線に対応する．

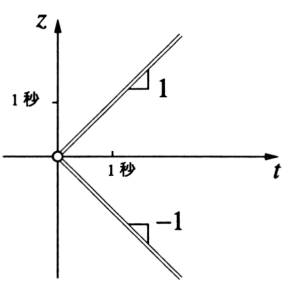


光子の世界線

最後にもう 1 つ，時空の図を見てみよう．点光源が一瞬だけ光った場合だ．このとき，点光源からは，速さ c ($\approx 3 \times 10^8$ m/s) で進む光の粒子，すなわち光子 (photon) が発射される．まずは，z 軸上を運動する光子だけを考えてみよう．z 軸の正の向きに速度 c で進む光子と z 軸の負の向きに速度 $-c$ で進む光子とがある．もし，普通のスケールで図を描いたら，これらの光子の世界線は，c に対応する非常に大きい傾きで描かれることになる．しかし，下の図では，長さの単位を変更して，傾きを見やすくしてある．メートルのかわりに，**秒** (別の呼び方では**光秒** (light-second)) を使ったのだ．1 光秒は，光が 1 秒間に進む距離 (約 3×10^8 m) である．長さのこの測り方を，距離，質量，時間を独立なものとして扱う普通の 3 元組立単位系[注4]での測り方と区別して，**幾何単位** (geometric unit)[注5]と呼ぶ．

幾何単位系: 長さを秒で測る

幾何単位系では，c は 1'秒毎秒' つまりただの '1' になる．したがって，上に出てきた，z 軸の正負の向きに進む光子の世界線は，それぞれ傾き ± 1 を持つ．それ以外の運動では，速度 v の値は，光速に対する比となる．身の回りの運動では，v は 1 より 0 に近い値である．したがって，幾何単位系を用いてその世界線を描くと，傾きは非常に小さくなる．



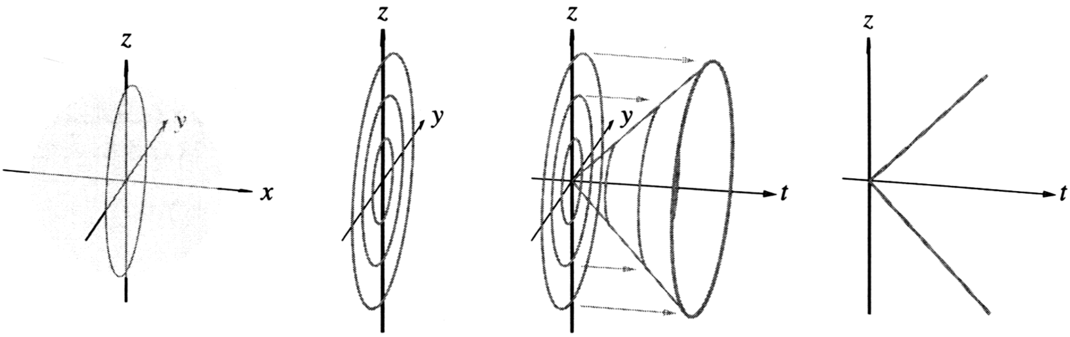
光円錐

z 軸方向だけでなく 3 次元のすべての方向を考えると，光源から出た光子は，t 秒後には，半径 ct の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ 上にいることになる．

[注4] 訳注：原文では，単に従来の単位系 (conventional units) として言及されている．

[注5] 訳注：日本語でも英語でもあまり一般的な言葉ではないと思われる．光速度 c を 1 とおくのに加えて，プランク定数 $\hbar$ も 1 とおいたものは一般的に自然単位系と呼ばれる．自然単位系ではすべての物理量が無次元である．

これを (y,z) 平面で切った断面を見てみると，球面の切り口は，半径 ct の円周 $y^2+z^2=(ct)^2$ になる．ここで，この円周を，t の関数として，(t,y,z) 時空にプロットしてみよう．すると，円錐になる．(y,z) 平面を進むすべての光子の世界線は，この円錐上にある．この円錐を**光円錐**(light cone) と呼ぶ．最初に出てきた z 軸の正負の向きに進む光子の世界線は，この $(1+2)$ 次元時空をさらに $y=0$ で切った断面である，$(1+1)$ 次元の (t,z) 時空に入っている，2 本の直線である．これもまた**光円錐**と呼ぶ．

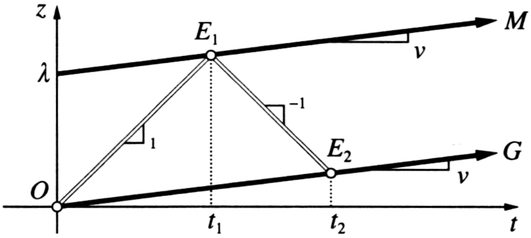


空間を広がっていく波　空間の断面　時空の断面　時空をさらに切った断面

練習問題

1. (a) 時刻 t での位置が $z=t^2-t^3$, $0\le t\le 1$ で与えられるような物体の世界線を描け．
   (b) この物体は，点 $z=0$ から最大でどれだけ離れるか？ それはいつ起きるか？
   (c) 物体が点 $z=0$ から出発するときの速度は？ 点 $z=0$ に戻ってくるときの速度は？
   (d) 上の世界線とは異なる世界線を考えよう．点 $z=0$ から出発し，点 $z=1$ に達して，また $z=0$ に戻ってくる世界線で，$z=0$ での出発と到着の瞬間に速度が 0 であるようなものを 1 つ描け．このような世界線を与える具体的な式 $z=f(t)$ を 1 つ作れ．
2. (a) 空気抵抗がないとき，落下する物体は，一定の加速度 $z''(t)=-g$ で運動する．ここで g は，重力加速度 ($g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$) である．初速度が $z'(0)=v_0$, 初期位置が $z(0)=h$ であるとき，任意の時刻 t における物体の位置を表す式 $z(t)$ を求めよ．
   (b) 3 つの物体が，高さ $h=+60$ m から出発して運動する．初速度 v_0 はそれぞれ，0 m/s, +10 m/s, −2 m/s である．上で求めた式を使って，3 つの物体の世界線を描け．
   (c) 3 つの物体は，それぞれいつ，地面 $z=0$ に達するかを求めよ．結果は予想にあっているか？
3. 2 つの物体 G と M が，下の図のように，z 軸上を，一定の正の速度 v

で，距離 λ だけ離れて運動している．速度 v は1より十分に小さい（式では $v \ll 1$ と書く）．信号が，事象 O で G から発射される．信号は速度1で伝わり，事象 E_1 で物体 M に到達する．信号は物体 M に反射され，速度 -1 で伝わり，事象 E_2 で G に戻ってくる．事象 E_1,E_2 の時刻 t_1,t_2 を λ と v で表せ．



1.2　ガリレイ変換

客観性の問題

科学の目的は，客観的な事実を記述し解釈することである．しかし，科学の出発点は，一人一人の人間が行う測定であり，これは主観的なものでしかあり得ない．しかし，一人一人の測定者が結果を持ちよって，全員が合意できる点を見いだしたときには，物理的に，あるいは客観的に正しい真実を発見したと言える．（“私の計算は，あなたの計算と一致するだろうか？” “私は，あなたの実験を再現できるだろうか？”）

ガリレオの相対性原理

客観性は，近代科学において，常に問題となってきた．ガリレオガリレイ（Galileo Galilei）は，この問題を，物体の運動の場合に取り上げ，次の**相対性原理**（principle of relativity）として定式化した．

> 相対速度が一定である2人の観測者は，自然法則をまったく同じ形に定式化しなければならない．特に，観測者は，物理法則に照らして，絶対静止と絶対運動とを区別することはできない．したがって，運動には，**絶対運動**（absolute motion）というようなものはなく，観測者を基準にした運動があるだけである．

これは，両方向の主張を含んでいる．

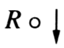
- すべての物理法則は，すべての観測者にとって，同じ形に書かれなければならない．
- すべての観測者にとって同じ形で書かれる主張は，物理法則と言える．

これから見ていくように，19世紀末の科学者たちは，ある非常に不可解な問題を解消するために，ガリレオの相対性原理を捨て去る誘惑に駆られていた．しかし，その方向は間違っていた．実際，アインシュタインが最終的にその不可解な問題を解いたのは，むしろ相対性原理を，より強い形に一般化することによってだったのだ．その相対性原理のことを，**特殊相対性**（special relativity）と呼ぶ．特殊という言葉がついているのは，アインシュタインがそのさらに10年ほどあとに行うことになる，より徹底的な一般化と区別するためである．

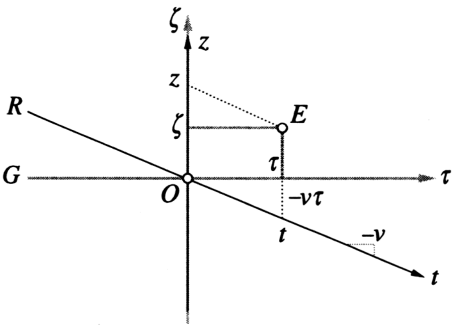
2人の観測者の時空ダイアグラム

一定の相対速度で運動する2人の観測者について，時空ダイアグラムがど

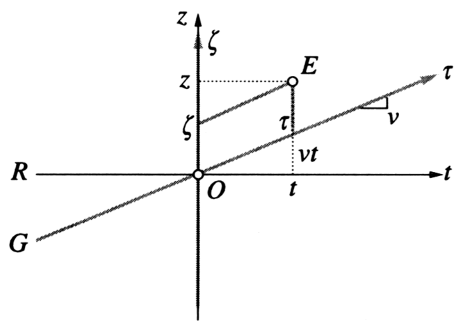
のようになっているか，調べてみよう．これはまさにガリレイが問題にした状況であり，アインシュタインの理論を理解するのには不可欠なステップだ．これらの“ガリレイ的”観測者を R と G と呼ぶことにする．観測者 G は座標にギリシャ(Greek)文字(τ, ξ, η, ζ)を使い，R はラテン(Latin or Roman)文字(t, x, y, z)を使う．ここでは，R と G の 2 人が，一定の相対速度 v で，まず互いに接近し，一瞬だけ同じ場所を占め，その後また離れていくという場合を考えよう．事象 O において 2 人の観測者が出会うとして，その時刻を $t=\tau=0$ ととろう．別の言い方をすると，2 人は，この会合を，時計をあわせるのに使うのだ．問題の本質に集中するために，2 人の観測者の対応する座標軸(ξ と x, η と y, ζ と z)は，同じ向きであると仮定しよう．さらに，観測者 G は R の z 軸上を正の向きに移動し，R は G の ζ 軸上を負の向きに移動しているとしよう．すると，2 人の時空ダイアグラムは次のようになる．







ギリシャ文字座標系



ラテン文字座標系

$$\tau = t \qquad\qquad t = \tau$$

$$\zeta = z - vt \qquad\qquad z = \zeta + v\tau$$

2 人の観測者の座標の比較

事象 E のギリシャ文字の座標 (τ, ζ) を知っていれば，これらの方程式で，E のラテン文字(ローマ文字)の座標 (t, z) を知ることができる．逆も可能である．ここで気づくのは，次の点である．

- 時間軸は観測者の世界線である．
- 時間軸と，ある空間軸との間の角が直角なら，その時間軸を世界線とするような観測者は，その空間軸の座標に関して静止している．
- もし時間軸とある空間軸との間の角の大きさが $90° - \theta$ なら，観測者は，その空間座標に関して速度 $v = \tan\theta$ で移動している．
- 任意の事象 E について，$t=\tau$ である．なぜなら，2 人の観測者の時間の測り方は同じだからである．
- 勝手な事象 E に対して，一般には $z \neq \zeta$ である．なぜなら観測者は自分の位置からの距離を測っているからである．その差 $z - \zeta = vt = v\tau$ が，z と ζ が測定された瞬間での，2 人の観測者の間の距離である．

ここで，どちらの観測者が**本当は**動いているとか，どちらの時空ダイアグラムが**本当は**正しいとか，そういうことは考えていないことに注意しよう．相

すべての時空ダイアグラムは同じように正しい

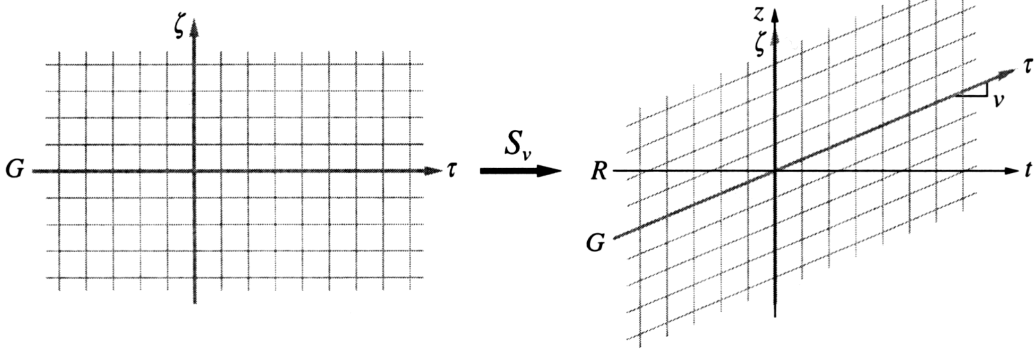
対性原理によれば，どちらが本当かを決める方法というのは存在しない．R の立場からは，動いているのは G だけであり，また，G の立場からはその逆になる．2つの時空ダイアグラムは，どちらも同じように真実を記述している．時空ダイアグラムのどの要素が物理的真実を反映していて，どの要素が反映していないかは，2つの時空ダイアグラムを比較することによってわかる．したがって，時間—より正確には，2つの事象の間の時間間隔—は客観的な量である．なぜなら，2人の観測者が同じ値を報告するからである．それに対して，2つの事象の間の空間的な距離は，客観的な量ではない．練習問題1参照．

ガリレイ変換

時空ダイアグラムの性質のうち，他の観測者の時空ダイアグラムに移ってもかわらないような性質に注目したい．そのためには，この2つの時空ダイアグラムの間の変換について詳しく知る必要がある．観測者 G の座標を R の座標に変換する式は，線型写像 $S_v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$S_v : \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix}$$

を定める．



写像 S_v は，2人のガリレイ的観測者(ガリレイの相対性原理に現れる2人の観測者)の時空ダイアグラムを結びつけているので，**ガリレイ変換**(Galilean transformation)と呼ぶのが一般的である．写像 S_v を行列として見るときは，これをガリレイ行列と呼ぶことにしよう．

幾何学的には，この変換は **ずれ**(shear)である．縦軸に平行な直線は，縦軸からの距離に比例して，上下にずらされる．特に，直線 $\tau = 1$ は v だけずらされるので，比例定数は v である．よって，横軸に平行な直線群は，ずらされた結果，互いに平行なまま傾き v となる．

言語と辞書のアナロジー

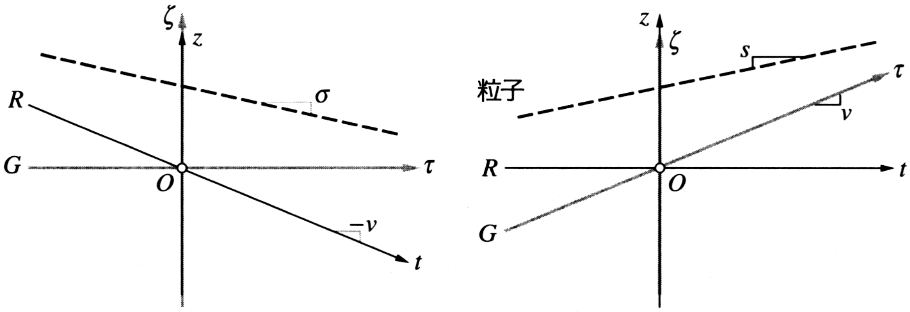
ギリシャ文字の座標系とラテン文字の座標系は，ちょうど，時空の中の事象を記述するための2つの**言語**のように考えることができる．このアナロジーでは，行列 S_v は，いわばギリシャ語をラテン語に翻訳するための**辞書**である．しかし，辞書はいつでも2つで一組だ: 希羅(ギリシャ-ラテン)辞書の他に，羅希(ラテン-ギリシャ)辞書も必要である．この羅希辞書の役目を果たすのは，明らかに逆行列 $S_v^{-1} = S_{-v}$ である．

$$\text{ギリシャ語} \underset{S_{-v}}{\overset{S_v}{\rightleftarrows}} \text{ラテン語}$$

これを簡単な例に当てはめてみよう．もう一個の粒子が，G と R に対して一定の速度で運動しているとしよう．その粒子の世界線は，どちらの時空ダイアグラムでも直線になる．その世界線上の事象を，ギリシャ文字の座標系で，(τ, ζ) とすると，G で見た粒子の速度は，$\sigma = \Delta\zeta/\Delta\tau$ である．ここで，(辞書を見ると)$t = \tau$, $z = \zeta + v\tau$ なので，R から見た速度は

$$s = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta\zeta + v\Delta\tau}{\Delta\tau} = \frac{\Delta\zeta}{\Delta\tau} + v = \sigma + v$$

となる．



速度を測定されるもの	使う座標系 ギリシャ文字座標	ラテン文字座標
G	0	v
R	$-v$	0
任意の粒子	σ	$\sigma + v$
	$s - v$	s

次に，すべての空間次元を含む $(1+3)$ 次元版の変換を考えよう．その際，観測者 G と R が運動している間，対応する空間軸はそれぞれ平行なままだとする．観測者 G の R に対する相対速度ベクトルは $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ である．練習問題 6 で，この場合のガリレイ変換が 4×4 行列　**$(1+3)$ 次元変換**

$$S_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 1 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表され，さらに $S_{\mathbf{v}}^{-1} = S_{-\mathbf{v}}$ であることを見る．これまで，運動は縦軸上で起こり，したがって $v_x = v_y = 0$ であると仮定してきた．この場合には，4×4 行列 $S_{\mathbf{v}}$ は $x = \xi$, $y = \eta$ を与える．これは，なぜ今までこれら 2 つの座標を無視できたか(そして単純な 2×2 行列で話がすんでいたか)の説明になっている．これらの座標は，どちらの座標系でも同じ値だったのだ．

練習問題

1. 観測者 R の座標系で，事象 E_1, E_2 の座標がそれぞれ $(1,0)$, $(2,0)$ だとしよう．R の座標系では，これら2つの事象の間の空間的距離はどれだけか？ G の座標系ではどうか？
2. 平面 $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル X と Y で張られる平行4辺形の面積を $A(X,Y)$ とする．線型写像 $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ に対して，$A(L(X),L(Y))=\det L\cdot A(X,Y)$ を示せ．行列式 $\det L$ が負であるときは何が起こっているのか？ 行列式 $\det L=0$ であるときは何が起こっているのか？
3. すべてのガリレイ変換 $S_v:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は面積を保存することを示せ．
4. (a) 写像 $S_v:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ に対して，$S_v^{-1}=S_{-v}$ および $S_vS_w=S_{v+w}$ を示せ．
   (b) これらの事実は，ガリレイ変換全体からなる集合が，行列の積のもとで，群 $\mathcal{G}_2$ をなしていることを示す．この群が可換であること，すなわち，$S_vS_w=S_wS_v$ が成り立つことを示せ．（実は，$\mathcal{G}_2$ は，実数 $\mathbf{R}$ を加法について群と見なしたものと同型である．群論を勉強したことのある読者は，これを証明せよ.）
5. (a) 空間が2次元で，相対速度が2次元ベクトル $\mathbf{v}=(v_y,v_z)$ で与えられるときに，ガリレイ変換の行列 $S_{\mathbf{v}}$ を求めよ．
   (b) その行列に対して，$S_{\mathbf{v}}^{-1}=S_{-\mathbf{v}}$ と $S_{\mathbf{v}}S_{\mathbf{w}}=S_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ を示せ．ここで，$\mathbf{v}+\mathbf{w}$ はベクトルの普通の和である．
   (c) これらの行列 $S_{\mathbf{v}}$ すべてからなる集合 $\mathcal{G}_3$ は，やはり群になっている．群 $\mathcal{G}_3$ もまた可換であることを示せ．（実は，$\mathcal{G}_3$ は加法群 $\mathbf{R}^2$ と同型である.）
6. 上の練習問題を，4×4 のガリレイ変換について繰り返せ．（$\mathcal{G}_4$ は加法群 $\mathbf{R}^3$ と同型である.）

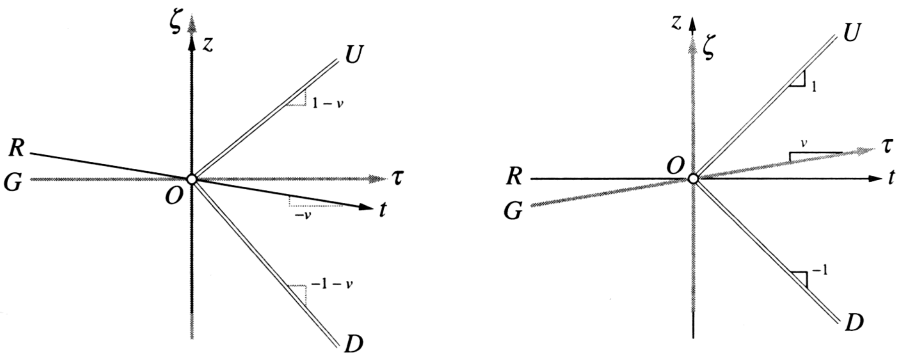
1.3　マイケルソン・モーレーの実験

ガリレイ変換のもとで光の運動はうまく変換しない．19世紀末には，この問題が物理学のいろいろな場面で現れていた．以下では，そのうちの2つ，マイケルソン・モーレーの実験とマクスウェル方程式を見てみよう．これらについては以下で詳しく説明するが，それを待つまでもなく，2人の観測者が光子の運動をどのように見るかを考えるだけで，問題の本質をつかむことができる．

マイケルソン・モーレーの実験以前

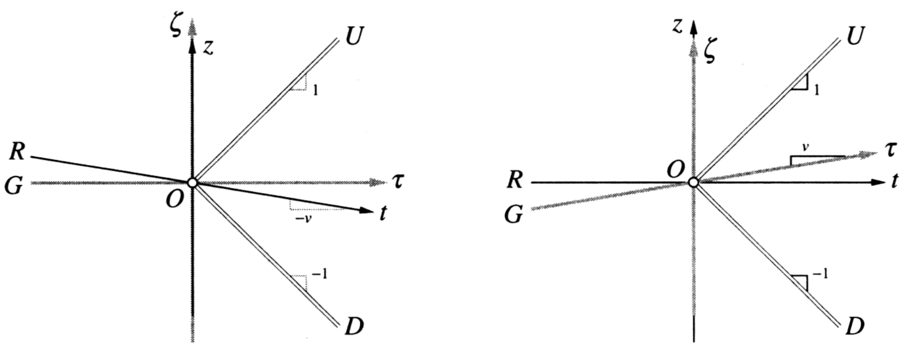
座標系 R と G の原点 O が一致していて，その事象 O で，瞬間的な発光が起ったとしよう．縦軸を上下に進む光子の世界線，U と D を描いてみる．世界線の傾きが見やすくなるように，R と G ではともに幾何単位系を採用して，距離を秒で測ろう（1.1節参照）．もし，R で U の速度が1, D の速度が -1 と測定されたら，G で測定したときの速度はそれぞれ $1-v$ と $-1-v$ に

なるはずである．



したがって，2人のガリレイ的観測者から見た，光の速度の差を測定することができるはずである．しかし，マイケルソン・モーレーの実験の結果，何と，この2つの速度には差がないことがわかったのである！ 速度の測定の結果，観測者 G の得た値は，R と同じだった．したがって，2人の時空ダイアグラムは下のようでなくてはならない．

マイケルソン・モーレーの実験後



マイケルソン・モーレー(M-M)の実験のパラドックス的な結論は，次の表のようにまとめられる．

		座標系	
速度		ギリシャ文字	ラテン文字
通常の粒子		σ	$\sigma + v$
		$s - v$	s
光子	M-M 実験前の予想	1	$1 + v$
		$1 - v$	1
	M-M 実験の結果	1	1

マイケルソン・モーレーの実験

光は，粒子であると同時に波であると考えられる．波動の理論を光に適用すると，光のいろいろな性質が説明できる．例えば，色，干渉，回折模様(例

エーテル

えばコンパクトディスクの表面に見える模様)，屈折(レンズを通る光線が曲がること)など．しかし，光が波動なら，何らかの媒質[注6]がなければならない．光は真空中も通過することから，その媒質—それは "エーテル" (ether) と呼ばれることになったが—が宇宙全体を満たしていると考えなくてはならない．したがって，地球はエーテルの中を運動していることになる—飛行機が空気の中を飛ぶように．マイケルソン (Michelson) とモーレー (Morley) は，地球のエーテルに対する速度を測定しようと，1881 年から 1887 年にかけて，一連の精密な実験を行った．

エーテルに対する速度を測る

地球の速度を測定することは，原理的には，極めて簡単に思えるかもしれない．観測者 R をエーテルに対して静止させ，観測者 G は地球上におく．そして，R に対する G の進行方向に光を発射する．そして，その光の，G から見た速度を測る．ガリレイ的描像では，G から見た光の速度は $w = 1 - v$ となるはずである．ここで，1 は真空中の(エーテルに対する)光の速度，v は，知りたい G の速度である．しかし，w を測定したのだから，v は $v = 1 - w$ で求まる．

この単純な測定方法は，2 つの理由でつまづくことになる．まず 1 つめの困難として，エーテルは直接の観測にかからないので，どこにどのように観測者 R を置いたらよいか，したがって，地球からどちらの方向に光を発射したらよいかわからない．実は，この問題は，光をいろいろな方向に発射してみることで回避できる．もう 1 つの，そしてもっと深刻な困難は，光の速度の測定方法に関係する．光の速度の測定には，発射した光を，遠く離れておいた鏡に反射させ，戻ってきた光を発射した光と比較するという方法を用いる．方法の詳細は重要でないが，大事なのは，出ていく光と戻ってくる光の速度の間に差があるということである．すなわち，往路は $1 - v$ の速度，復路は $1 + v$ の速度である．ところが，装置が測定できるのは，往復の平均速度だけである．ちょっと考えたところでは，平均速度は 1 のように思える．もしそうだとすると，決定しようとしている速度 v の情報はすべて失われてしまう．

実際には，平均速度は 1 ではなく，v の情報は失われない．マイケルソン・モーレーの実験は，これらのすべての困難を克服して，このとらえにくい量 v をすくいとるように設計されている．オランダ人の物理学者 H. A. ローレンツ (H. A. Lorentz) は，当時 (1895)，論文 [19] の冒頭でこの実験について次のように述べた．

> マクスウェルが初めて指摘したように，そして実際，簡単な計算で導けるように，2 点 A, B が同じだけ，エーテルをひきずることなしに移動する場合には，光が A 点から B 点まで進みまた A に戻ってくるのに必要な時間は，両者が静止している場合とは差がある．その差は，確かに 2 次のオーダーではあるが，干渉を使った精度の高い方法を使えば検知できる程度の大きさではある．

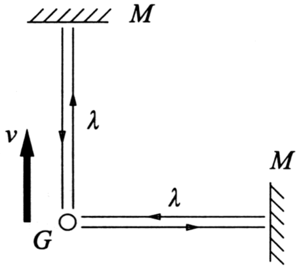
差は v^2 に比例

ローレンツの主張を理解するために，実際にその計算をしてみよう．実験では，未知の速度 v で運動している観測者 G が，光のパルスを発射する．パルスは，G の座標系から見て静止している鏡 M で反射され，G のところに

[注6] 訳注：音波の場合の空気，水面の波の場合の水のような波を伝える物質．

戻ってくる．鏡 M の位置は，G から λ 光秒離れているとする．実験装置全体を回転することによって，G から見た M の方向は自由に変えられるようになっている．

空間の図
時空図式ではない



練習問題 1 で，光が往復するのに要する時間 T が，次のように光の方向に依存することを確かめる．

$$T_{\|}(v) = \frac{2\lambda}{1-v^2} \qquad G \text{ の運動の方向に平行;}$$
$$T_{\perp}(v) = \frac{2\lambda}{\sqrt{1-v^2}} \qquad G \text{ の運動の方向に垂直.}$$

往復の平均速度が 1 でないことも確かめられる．具体的には，$c_{\|} = 1 - v^2$ および $c_{\perp} = \sqrt{1-v^2}$ となる．

マイケルソン・モーレーの実験で実際に測定されるのは，$T_{\|}$ と $T_{\perp}$ の差である．これが v とどう関係しているかを見るために，まず，$T_{\|}$ と $T_{\perp}$ を $v = 0$ のまわりにテイラー展開すると

$$T_{\|}(v) = 2\lambda + 2\lambda v^2 + O(v^4),$$
$$T_{\perp}(v) = 2\lambda + \lambda v^2 + O(v^4)$$

となる．したがって，差のテイラー展開は，次のように v^2 に比例する項から始まる．

$$T_{\|} - T_{\perp} = \lambda v^2 + O(v^4) = v^2(\lambda + O(v^2)).$$

これがローレンツの言っている “2 次の量” である．

v^2 を見積もる

測る量 v^2 がどのくらいの大きさなのかの感じをつかむため，地球が太陽の周りの公転軌道を回る速度を計算してみよう．公転軌道はほぼ円形で，その周長は約 9×10^{11}m である．公転周期は 1 年つまり約 3×10^7 秒で，公転速度は 3×10^4 m/s となる．これを幾何単位系に直すには，$c = 3 \times 10^8$ m/s $= 1$ を使えばよい．結果は，$v \approx 10^{-4}$, $v^2 \approx 10^{-8}$ となる．もちろん，太陽系が “エーテル気流” の中にあれば，速度 v がずっと小さいということもありうる．それは地球が “気流” の方向に運動している場合である．しかし 6ヶ月後には地球は反対方向に動いているので，逆に v は上で評価したよりも大きくなる．いずれにせよ，マイケルソンとモーレーが用意した実験装置は，この程度の大きさの速度は楽に検出できるくらいの精度を持つものだった．したがって，1 年のいろいろな時期に，いろいろな方向に向けて実験を続ければ，最終的には，地球のエーテルに対する速度を決定できるはずだった．

しかし実際には，意味のある結果は得られなかった．測定結果は，常に

$T_\parallel = T_\perp$ となったのだ．これは，観測者の間の相対運動に関わらず，光はすべてのガリレイ的観測者の前を同じ速度で通りすぎる，ということを意味する．要するに，光はガリレイ変換で正しく変換されないのである．

フィッツジェラルド収縮仮説

矛盾に正面から向き合う

マイケルソン・モーレーの実験の結果は，常識とも，説得力ある議論とも矛盾する．何が間違っているのだろうか？ マイケルソン自身は，常に $v = 0$, つまり，エーテルは地球とともに運動していると結論した．一方，ローレンツはこの結論には満足しなかった．そして，矛盾を解消する別の道を提示した．彼の仮説は，同じ仮説を独立に提唱したイギリス人の物理学者 G. F. フィッツジェラルド(G. F. Fitzgerald)の名前をとって，フィッツジェラルド収縮仮説(Fitzgerald contraction hypothesis)と呼ばれることのほうが多い．

運動方向の収縮

光が鏡までの往復に要する時間 $T_\parallel$ と $T_\perp$ は，鏡までの距離 λ に依存する．このことに着目したフィッツジェラルドとローレンツは，$T_\parallel$ が $T_\perp$ より大きくならないことの，単純な，しかし驚くべき説明を提案した．彼らの言うことには，距離 λ はその方向によって変化するというのである．距離 λ の方向が地球の速度と垂直か平行かの区別をするため，$T_\parallel$ と $T_\perp$ を，変数 $\lambda_\parallel, \lambda_\perp$ を導入して，

$$T_\parallel = \frac{2\lambda_\parallel}{1-v^2}, \qquad T_\perp = \frac{2\lambda_\perp}{\sqrt{1-v^2}}$$

としよう．もし仮に，

$$\lambda_\parallel = \sqrt{1-v^2}\cdot\lambda_\perp$$

であるとすれば，

$$T_\parallel = \frac{2\lambda_\parallel}{1-v^2} = \frac{2\sqrt{1-v^2}\cdot\lambda_\perp}{1-v^2} = \frac{2\lambda_\perp}{\sqrt{1-v^2}} = T_\perp$$

が満たされる．このとき，不等式 $\sqrt{1-v^2} < 1$ から，$\lambda_\parallel$ は $\lambda_\perp$ よりも小さいことになる．このことは，普通，次のように記述される．‘実験装置の長さ(最初は λ のまま一定だとされていた)が，運動と垂直な方向には変化しなかったが，平行な方向には収縮したと結論するしかない．’

収縮は直接は測れない

この収縮を直接に測る方法はない．なぜなら，長さを測るための測定装置も一緒に運動しなければならないので，収縮してしまうからである．つまり，定規をあてると，λ は変化していないように見える．この収縮を知るには，マイケルソン・モーレーの実験かそれと等価な実験による間接的な方法しかないのだ．

フィッツジェラルド収縮が起きると，2人の観測者の座標系の間の変換の形も変わる．新しい変換(フィッツジェラルド変換と呼ぼう)は

$$F_v : \begin{cases} t = \tau, \\ z = \sqrt{1-v^2}\,\zeta + v\tau, \end{cases} \qquad F_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix}$$

となる．これでよいことを確かめるのに，2人の観測者が同じ点を占める時

刻 $\tau=0$ を考えてみよう．観測者 G から見た距離 $\zeta=1$ は，フィツジェラルド収縮の結果，観測者 R から見ると確かに距離 $\sqrt{1-v^2}<1$ しかないということになる．なお，ガリレイ変換とは違って，フィツジェラルド変換に対しては $F_v^{-1}=F_{-v}$ は成立しない．実際

$$F_v^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}, \qquad F_v^{-1}:\begin{cases} \tau=t, \\ \zeta=\dfrac{z}{\sqrt{1-v^2}}-\dfrac{vt}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$$

となる．

これは，出てきた実験結果に合せるために，‘後からつじつまをあわせた’だけだという批判はもちろんあった．それ以外にも，批判された点はいろいろある．変換 F_v と F_v^{-1} の間に対称性がない，光の世界線を正しく変換しない，などである．これらのことは，練習問題 2〜5 の中で確かめられる．

練習問題

1. (a) 観測者 G が速度 v で運動している．運動と垂直な方向に離れておかれた鏡に光が反射して戻ってくるまでの往復時間 $T_\perp$ が

$$T_\perp(v)=\frac{2\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$

であることを示せ．ただし，鏡は λ 光秒だけ離れたところに置かれているとする．観測者 G の運動に垂直な方向の光の平均速度を求めよ．

(b) 光が，G の運動と平行な方向に往復する場合の往復時間 $T_\parallel$ が

$$T_\parallel(v)=\frac{2\lambda}{1-v^2}$$

であることを示せ．観測者 G の運動に平行な方向の光の平均速度を求めよ．

(c) 往復時間 $T_\perp(v)$ と $T_\parallel(v)$ の $v=0$ のまわりのテイラー展開の 3 次の項を計算して，

$$T_\parallel-T_\perp=v^2\left(\lambda+O(v^2)\right)$$

を示せ．

2. (a) 運動に平行な方向への，$\sqrt{1-v^2}$ 倍の短縮を行う線型写像 C_v : $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は

$$C_v=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix}$$

で与えられる．定義域の $\mathbf{R}^2$ に描かれた間隔 1 の正方格子の，写像 C_v による像を描け．格子の像の形を言葉で記述せよ．

(b) 写像 F_v を，本文で定義した‘フィツジェラルド変換’とする．速度 v のガリレイ変換を S_v とするとき，$F_v=S_v\circ C_v$ を示せ．

3. 線型写像 F_v による，間隔 1 の正方格子の像を描け．この像は，C_v お

よび S_v による像とどのように関係しているか？ 特に，F_v と S_v による，縦軸に平行な直線の像はどのような関係にあるか．横軸に平行な直線の像はどのような関係にあるか．

4. (a) 観測者 G から見て，ζ 軸上を上向きおよび下向きに運動する光子を考える．これらの光子の世界線は $\zeta = \pm\tau$ で，傾きは ± 1 である．これらの世界線の，写像 $F_v : G \to R$ による像を考える．それらの像の傾き $m_{\pm}$ を，相対速度 v の関数として求めよ．
   (b) 相対速度が $0 < v < 1$ のとき，$m_+ > +1$ および $m_- > -1$ が成り立つことを示せ．傾き m_+ が最大となるときの，v の値を求めよ．
5. 線型写像 F_v が，観測者 G と R の座標の間の変換を正しく記述しているとは考えられない理由を説明せよ．

1.4　マクスウェル方程式

電場と磁場はマクスウェル方程式に従う

磁石は，遠く離れて置かれた別の磁石に力を及ぼすことができる．2つの磁石は触れ合ってもいないし，何かでつながれているわけでもないのに．このことを説明するのに，次のように考える．1個の磁石のまわりには力の場が広がっている．そして，もう1個の磁石に力を及ぼすのは，そこまで広がっている力の場，すなわち磁場である．遠く離れた2個の電荷も，同様に力を及ぼし合うが，これも，電場が仲介していると考えることにする．ここで出てきた力の場は，空間を通して広がり，場所によって，また時刻によって変化するようなものである．しかし，まったく勝手に変化できるわけではない．実は，これらの場を表す関数は，ジェームズクラークマクスウェル(James Clerk Maxwell)が1864年に与えた偏微分方程式系を満たさなくてはならないのだ．

光は電磁現象

これらの“場の方程式”の帰結の1つは，場の変動(例えば，振動する電荷によって引き起こされるような)が，空間を決まった速度(媒質の種類によって決まる)で伝播し，それが検知可能だ，ということである．言い換えると，電磁波が存在する，ということである．さらに，その電磁波の持つべき速度は，知られている光の速度と一致するということがわかる．このことから自然に導かれる結論は，光は電磁的な現象で，エーテルは電場と磁場の媒質であるべき，ということである．ということは，また地球のエーテルに対する運動の問題に逆戻りとなる．しかし，今度の問題は，地球の運動はマクスウェル方程式にどのような影響を与えるか，である．

マクスウェル方程式

マクスウェル方程式(観測者 R の座標系で)には次の量に関するものである．

- **電気力**(electoric force). これは，空間，時間座標に依存する電場ベクトル[注7]

$$\mathbf{E}(t,x,y,z) = (\underbrace{E_1(t,x,y,z)}_{x\ 成分}, \underbrace{E_2(t,x,y,z)}_{y\ 成分}, \underbrace{E_3(t,x,y,z)}_{z\ 成分})$$

  で記述される．
- **磁気力**(magnetic force). 同様に，空間，時間座標に依存する磁場ベクトル

$$\mathbf{H}(t,x,y,z) = (H_1(t,x,y,z), H_2(t,x,y,z), H_3(t,x,y,z))$$

  で記述される．
- **電荷密度**(electric charge density)と呼ばれるスカラー値関数[注8] $\rho(t,x,y,z)$.
- **電流密度**(electric current density)と呼ばれるベクトル値関数 $\mathbf{J}(t,x,y,z)$
  .

マクスウェル方程式

これらの関数は，互いに独立ではなく，全体として，次の偏微分方程式の組—マクスウェル方程式—を満足しなければならない．この一組の方程式から，電気と磁気についてのすべての観測事実が導き出される．ここでは幾何単位系 $c=1$ を用いて書く．

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J},$$
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

G の座標系に移る

これらの式は，すべて，R の座標系で書かれている．それでは，G の座標系から見るとどうだろう？ この問いに答える前に，次のような道筋で導かれる，マクスウェル方程式の重要な帰結を見ておこう．

1. 空間が真空，したがって，$\rho = 0$ かつ $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ だと仮定しよう
2. 次のように，$\mathbf{E}$ を t で微分してみよう．(下付き添え字は偏微分を表す．すなわち，$\mathbf{E}_{tt} = \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$)．

[注7] 訳注：このように定義域が時空(の一部)であるようなベクトル値関数のことを，4.3 節以降では，時間に依存するベクトル場，と呼んでいる．

[注8] 訳注：関数 ρ のように，定義域が時空(の一部)であるようなスカラー値関数のことを時間に依存するスカラー場という．

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H}) && \left(\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{J}\text{ で，今は }\mathbf{J}=\mathbf{0}\text{ なので}\right)\\
&= \nabla\times\mathbf{H}_t\\
&= -\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) && \left(\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)\\
&= -\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})+\nabla^2\mathbf{E} && (\text{微積分の公式})\\
&= \nabla^2\mathbf{E} && (\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho=0)\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E}.
\end{aligned}$$

3. 2階の偏微分方程式 $\mathbf{E}_{tt}=\nabla^2\mathbf{E}$ は，**波動方程式**(wave equation)と呼ばれる．これはベクトルに対する方程式だが，電場ベクトル $\mathbf{E}$ の3つの成分 $E=E_i$ $(i=1,2,3)$ それぞれについて，

$$E_{tt}=E_{xx}+E_{yy}+E_{zz}$$

が成り立つことを意味する．

4. 電場が t と z だけに依存していて，$E=E(t,z)$ と書けるとしよう．例えば，z 軸方向に進む平面波は，波面が (x,y) 平面と平行なので，この条件を満たしている．このとき，波動方程式の各成分は簡単な形になる:

$$E_{tt}=E_{zz},\qquad \text{すなわち}\qquad E_{tt}-E_{zz}=0.$$

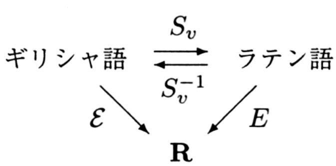
ここで R の z 軸上を速度 v で運動している G のことを考えよう．この簡単な波動方程式は，G の座標系で書くとどうなるだろうか？

$E_{tt}-E_{zz}$ のガリレイ変換

この場合に行うべきガリレイ変換は $S_v: t=\tau,\ z=\zeta+v\tau$ である．したがって，G の座標での電場ベクトルの各成分は，次の式によって E から得られる．

$$E(t,z)=E(\tau,\zeta+v\tau)=\mathcal{E}(\tau,\zeta).$$

言ってみれば，E（座標系 R での電場ベクトル)を $\mathcal{E}$（座標系 G での電場ベクトル)に読み替えるのに，S_v という "辞書" を使うということである．関数 E と関数 S_v の合成関数が $\mathcal{E}$ になる．



多変数の合成関数の微分法を使いさえすれば，$\mathcal{E}$ の τ 微分や ζ 微分を，E の t 微分や z 微分を使って表すこともできるだろう．

しかし，これは今やりたいことではない．$E_{tt}-E_{zz}$ がどのように変換するかを知るには，逆に，E の t 微分，z 微分を，$\mathcal{E}$ の τ 微分，ζ 微分で表す必要がある．これは，逆方向の "辞書"S_v^{-1}: $\tau=t, \zeta=z-vt$ を使って行える．電場ベクトル E と $\mathcal{E}$ の間の関係は，各成分ごとに，

$$\mathcal{E}(\tau,\zeta)=\mathcal{E}(t,z-vt)=E(t,z)$$

である．この式の両辺を，合成関数の微分法を用いて微分することで，欲しい関係がすぐに得られる．計算の一部分を詳細に示すと次のようになる．

$$E_t = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathcal{E}_\tau - v\mathcal{E}_\zeta.$$

残りの計算は，結果だけ示すと，次のようになる．

$$E_z = \mathcal{E}_\zeta, \qquad E_{tt} = \mathcal{E}_{\tau\tau} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} + v^2\mathcal{E}_{\zeta\zeta}, \qquad E_{zz} = \mathcal{E}_{\zeta\zeta}.$$

つまり，簡単な形をした波動方程式 $E_{tt} - E_{zz} = 0$ は，G の座標系に移ると，

$$\mathcal{E}_{\tau\tau} - \mathcal{E}_{\zeta\zeta} + v^2\mathcal{E}_{\zeta\zeta} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} = 0$$

という形に変換される．最後の 2 つの余分な項のために，G の座標系では波動方程式が違う形になっている（もちろん $v \neq 0$ ならば，である．興味があるのはその場合である）．

ガリレイの相対性原理によれば，これは起ってはならないことだった．一様な速度で相対運動する 2 人の観測者にとっては，すべての物理法則は，同じ形に書かれなければならないのだった．マクスウェルの方程式とそこから導かれる波動方程式は物理法則なので，観測者によって違う形をとってはならない．

$E_{tt} - E_{zz}$ の"フィッツジェラルド変換"

フィッツジェラルド収縮を考慮にいれると，状況はよくなるだろうか？ ガリレイ変換 S_v^{-1}，つまり $\zeta = z - vt$ のかわりに，フィッツジェラルド変換 F_v^{-1}，つまり

$$\zeta = \frac{z}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}$$

を使うと，電場ベクトルの間の関係は

$$E(t,z) = \mathcal{E}\left(t, \frac{z}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

となり，導関数は，

$$E_t = \mathcal{E}_\tau - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\mathcal{E}_\zeta, \qquad E_z = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\mathcal{E}_\zeta,$$

$$E_{tt} = \mathcal{E}_{\tau\tau} - \frac{2v}{\sqrt{1-v^2}}\mathcal{E}_{\tau\zeta} + \frac{v^2}{1-v^2}\mathcal{E}_{\zeta\zeta}, \qquad E_{zz} = \frac{1}{1-v^2}\mathcal{E}_{\zeta\zeta}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} E_{tt} - E_{zz} &= \mathcal{E}_{\tau\tau} - \frac{2v}{\sqrt{1-v^2}}\mathcal{E}_{\tau\zeta} + \frac{v^2-1}{1-v^2}\mathcal{E}_{\zeta\zeta} \\ &= \mathcal{E}_{\tau\tau} - \mathcal{E}_{\zeta\zeta} - \frac{2v}{\sqrt{1-v^2}}\mathcal{E}_{\tau\zeta} \end{aligned}$$

となり，確かに，フィッツジェラルド変換を使うと，余分な 2 個のうち 1 個はなくなる！

残りのもう 1 項も消すために，ローレンツは，ガリレイ変換にさらに変更を加えた変換を提案した．これは，ローレンツ変換と呼ばれるようになった．

ローレンツ変換

2人の観測者の空間座標を結びつける式を変更して，余分な項のうちの1つが消えたということは，もしかすると，時間座標を結びつける式を同じように変更すれば，もう一方の余分な項も消えるかもしれない．ローレンツの提案した行列 L_v^{-1} は次のような形をしている．比較のためにフィッツジェラルド行列 F_v^{-1} も比較のために並べて書こう．

$$L_v^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}, \qquad F_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}.$$

この変更で問題が解決するかどうかを考える前に，ちょっと見てすぐわかるのは，ローレンツ行列が，フィッツジェラルド行列に欠けていた美しさを持っているということである．これは対称行列であり，それは，空間変数と時間変数とが，変換のなかで対称に扱われているということの反映である．さらに，$L_v^{-1} = L_{-v}$ が成立している．これは，ガリレイ変換も持っていた，当然期待される性質である．

$E_{tt} - E_{zz}$ のローレンツ変換

実際に，ローレンツ変換が波動方程式を正しく変換することを見てみよう．変換を

$$\tau = \frac{t - vz}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \zeta = \frac{z - vt}{\sqrt{1-v^2}},$$

とすると，

$$E(t,z) = \mathcal{E}\left(\frac{t - vz}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{z - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

となり，したがって，

$$E_t = \frac{\mathcal{E}_\tau - v\mathcal{E}_\zeta}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad E_z = \frac{-v\mathcal{E}_\tau + \mathcal{E}_\zeta}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$E_{tt} = \frac{\mathcal{E}_{\tau\tau} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} + v^2\mathcal{E}_{\zeta\zeta}}{1-v^2}, \qquad E_{zz} = \frac{v^2\mathcal{E}_{\tau\tau} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} + \mathcal{E}_{\zeta\zeta}}{1-v^2}$$

となる．よって，

$$E_{tt} - E_{zz} = \frac{(1-v^2)\mathcal{E}_{\tau\tau} + (v^2-1)\mathcal{E}_{\zeta\zeta}}{1-v^2} = \mathcal{E}_{\tau\tau} - \mathcal{E}_{\zeta\zeta}$$

のように波動方程式の形は保存される．

ローレンツは，この考えを，前の節で引用した1895年の論文 [19] で導入した．彼は，τ を表す新しい式—これは観測者 R の空間座標と時間座標の奇妙な混ぜあわせ以外の何物でもない—を“局所時間”(local time)と名付けたものの，物理的直観に訴えるような説明は与えることを拒否した．10年ほど後に，アインシュタインがついにこれに対する説明を提案したときにも，ローレンツがそれを完全に受け入れることはなかった．(パイス [26, p. 166–] 参照.[注9])

注9 訳注：和訳については訳者のノート参照.

練習問題

1. (a) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ が $\mathbf{R}^3$ の任意のベクトルであるとき，$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ を示せ．

   (b) $\mathbf{F}$ が $\mathbf{R}^3$ の任意のなめらかなベクトル値関数であるとき，上の式から，$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{E}$ を導け．（注: ベクトル ∇ は，**演算子**(operator) なので，スカラー積 $\nabla\cdot\mathbf{F}$ の左側に書かなくてはならない．）

2. 任意のなめらかな $\mathbf{R}^3$ のベクトル値関数 $\mathbf{F}$ に対して，$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$ を示せ．

3. マクスウェル方程式から，**電荷の保存**(conservation of charge) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J}$ を導け．

4. 電場が $\mathcal{E}(\tau,\zeta) = \mathcal{E}(t, z-vt) = E(t,z)$ を満たすとする．次を確かめよ．

$$E_z = \mathcal{E}_\zeta, \qquad E_{tt} = \mathcal{E}_{\tau\tau} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} + v^2\mathcal{E}_{\zeta\zeta}, \qquad E_{zz} = \mathcal{E}_{\zeta\zeta}.$$

5. 電場 $\mathcal{E}$ と E が，ローレンツ変換

$$E(t,z) = \mathcal{E}\left(\frac{t-vz}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{z-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

で結ばれているとする．このとき，次を確かめよ．

$$E_t = \frac{\mathcal{E}_\tau - v\mathcal{E}_\zeta}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad E_z = \frac{-v\mathcal{E}_\tau + \mathcal{E}_\zeta}{\sqrt{1-v^2}},$$

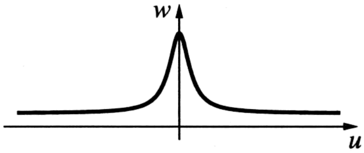
$$E_{tt} = \frac{\mathcal{E}_{\tau\tau} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} + v^2\mathcal{E}_{\zeta\zeta}}{1-v^2}, \qquad E_{zz} = \frac{v^2\mathcal{E}_{\tau\tau} - 2v\mathcal{E}_{\tau\zeta} + \mathcal{E}_{\zeta\zeta}}{1-v^2}.$$

6. (a) 幾何単位系でなく従来の 3 元組立単位系を使うことにすると，マクスウェルの方程式から導かれる波動方程式は $E_{tt} = c^2E_{zz}$ という形になる．任意の関数 $f(u)$, $g(u)$ に対して，関数

$$E(t,z) = f(z-ct) + g(z+ct)$$

がこの波動方程式を満たすことを示せ．ただし，f と g は **1 変数関数**であることに注意せよ．

   (b) 関数 $w = f(u)$ が，下のグラフのように，原点付近に鋭いピークを持つ（“ソリトン” のような）関数だとする．電場を $E(t,z) = f(z-ct)$ とする．固定した t_0 に対して，$w = E(t_0,z)$ のグラフは，$w = E(0,z)$ のグラフを ct_0 だけ平行移動したものであることを示せ．特に，平行移動の結果，ピークの位置は $z = ct_0$ に来る．グラフを用いて，$E(t,z)$ が，z 軸の正の方向に速度 c で伝播する波形を表していることを説明せよ．



(c) 同様に考えると，電場 $E(t,z) = f(z+ct)$ はどうのように解釈できるか．

第1章の内容をより深く知るには

パイス(Pais)の書いたアインシュタインの伝記 [26] は，彼の研究を詳細に検討し，当時の科学の研究の流れの中でのその位置を明らかにしている．特殊相対性についての 1905 年の決定的な論文 [11] の中では，アインシュタイン自身が，どのような物理的問題を解決するためにこの理論を提出したのか説明している．**ファインマン物理学**(Feynman Lectures) [13] では，特殊相対論のもとになっている物理的な問題が明快に議論されている[注10]．

[注10] 訳注：和訳第 1 巻 '力学'．相対論と電磁気学の関係については第 3 巻 '電磁波と物性'

第2章 特殊相対論—運動学

物体には質量があり，力を受けると，その結果として何らかの運動をする．運動学(kinematics)とは，原因である力と質量のことは考えず，結果である運動だけを問題にするものである．ここでは，最初に運動学について考えることにする．なぜなら，運動学は，力学の中の最も単純な部分であり，また特殊相対論の考え方の最も基本的な部分が，本質的に運動学的なものであるからである．

2.1 アインシュタインの解答

光速不変を物理法則として受け入れる

マイケルソン・モーレーの実験とマクスウェル方程式によれば，光速度は，観測者の運動によらずに一定である．アインシュタインは，これを困った矛盾ととらえるのをやめ，ガリレイの相対性原理に基づいて，これは1つの物理法則であると考えるしかないと主張した．そして，この新しい物理法則から何が導き出されるかを考察した．

幾何学的な見方をすると，この矛盾は，私達の使っているガリレイ変換 S_v が，光円錐の形を変えてしまうことから来る．アインシュタインは，矛盾から逃れる道は，光円錐を保つ新しい変換 $B_v : G \to R$ を用いることだと結論した．（以下では，記号 G と R を，それぞれ，観測者 G と R から見た時空を表すのにも用いる.）新しい変換 B_v の定義はどのようなものであるべきだろうか？

B_v は線型

• **変換は線型.** 観測者 G の時空での，物体 A の世界線が直線だとしよう．すると，A は，G に対して等速直線運動をしている．ところが，A は R に対しても等速直線運動している．なぜなら，R と G は互いに等速直線運動しているからである．よって，A の世界線は R の座標系でも，直線でなくてはならない．したがって B_v は直線を直線に写さなくてはならない．さらに，これまで暗黙のうちに仮定していたが，B_v が逆写像を持つということと，原点を原点に写すということを仮定すると，B_v は線型でなくてはならないということになる．(この結果は線型代数に属するものだが，普通は，線型代数の初級の講義には出てこない．その証明は，以下の練習問題2で知ることができ

る.)

$B_v^{-1} = B_{-v}$

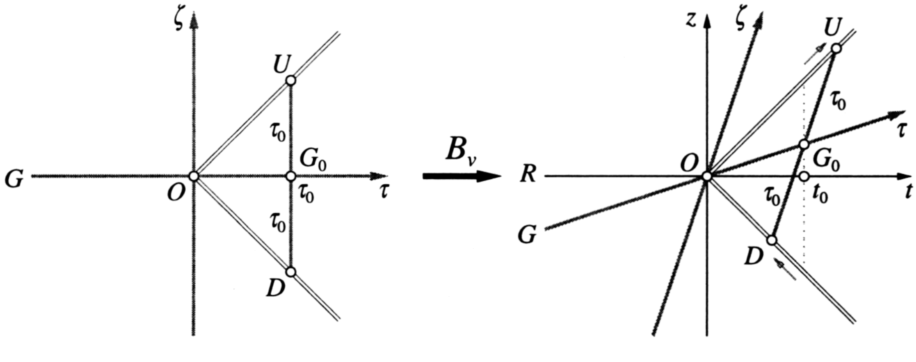
• **変換はどの2人の観測者の間でも同じ形をとる.** ガリレイの相対性原理は,互いに等速直線運動をしている観測者の間に本質的な違いがあってはならないということを言っている. したがって, G と R は, 自分の時空を他方の時空に変換するのに, 同じ変換を使わなくてはならない. 観測者 G の R に対する速度が v のとき, R の G に対する速度は $-v$ である. したがって, $B_v : G \to R$ なのだから, $B_{-v} : R \to G$ である. しかし, この写像 $R \to G$ は, 同時にこの写像 $G \to R$ の逆(inverse)でなくてはならない. したがって, $B_{-v} = B_v^{-1}$ である.

作図による解答

光円錐を光円錐自身に写す

事象 O で, R が光を一瞬だけ発するという, 以前に考えたのと同じ状況を考えよう. 縦軸を上に進む光子もあるし, 下に進む光子もある. 下のように, G の時空では, 時刻 $\tau = \tau_0$ に G は G_0 におり, 一方の光子は U に, もう一方の光子は D にある. 光の速度は1なので, U と D はともに τ_0 光秒だけ G_0 から離れている.

では, 写像 B_v が満たすべき性質を考えよう. 時空 R でも, 事象 U と D の像は, 光円錐上になくてはならない. また, G_0 は G の世界線上になくてはならない. 写像 B_v は線型で, 事象 D,G_0, U は, 時空 G では等間隔で一直線上に並んでいるので, それらの像は, R でも等間隔で一直線上に並んでいなければならない.



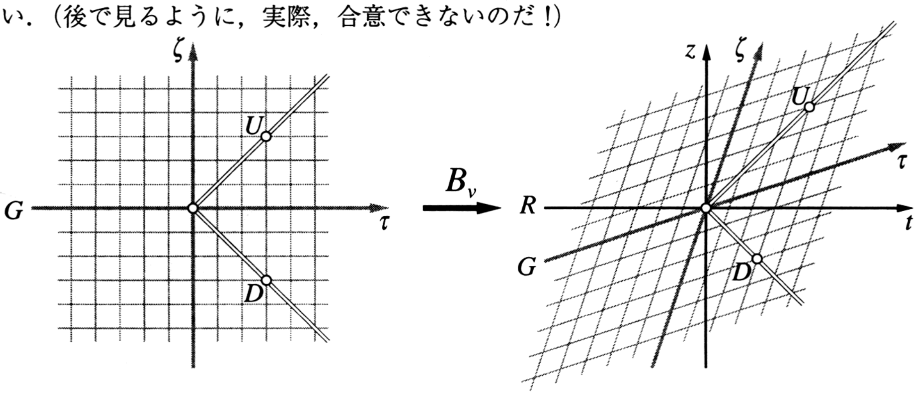
点を円錐に沿ってずらす

これがまさに問題になるところだ. 点 D, G_0, U を R の中の z 軸に平行な直線上に写すと(実際, ガリレイ変換ではそうなるのだが), この3つの点はもはや等間隔ではなくなる. 点 G_0 は上側の光円錐に近くなってしまう. これを修正するのは実は簡単だ. 3点ののっている直線を, 点 U と D を光円錐にのせたまま, G_0 を中心として時計回りに回せばよい. 回転の効果で, 線分 DG_0 は短くなり, 線分 UG_0 は長くなる. 回す角を調節すれば, この2つは同じ長さになる.

私達は, 図らずもアインシュタインの革命の核心に到達した. 観測者 G にとっては, 事象 D, G_0, U は同時刻に起こる. なぜなら, 3点は縦方向の一

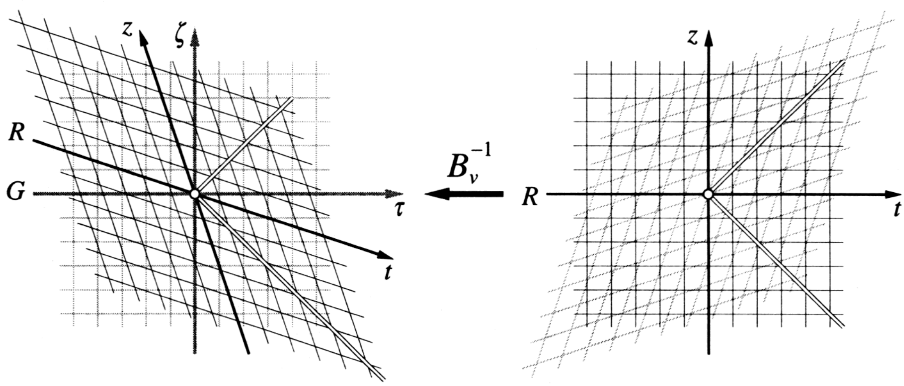
直線($\tau = \tau_0$)上にあるからだ．しかし，R の立場では，3つの事象は**異なる**時刻に起きるのだ．まず D, 次に G_0, 最後に U が起きる．変換 B_v は光円錐を不変にする．しかし，そのために同時性は犠牲にする．観測者 R と G が事象 G_0 の時刻について合意すること，つまり $t_0 = \tau_0$ であることも保証されない．(後で見るように，実際，合意できないのだ！)

同時性は失われる



細かい計算は抜きにしても，この写像の様子を想像することはできる．写像 B_v は線型なので，ζ 軸をはじめすべての縦方向の直線 $\tau =$ 定数 の像は，D と U を含む直線の像に平行だ．これはずれではない．ワインボトルのたくさん入った段ボール箱で，ボトルとボトルを区切っている格子上の段ボールの仕切りを考えよう．この写像は，この仕切りをつぶすのに似ている．つぶすときには，傾き ±45° の直線上(光円錐上)にある格子点は，原点に近づいたり遠ざかったりするが，傾き ±45° の直線上にとどまる．つまり，光円錐は不変である．

"ボトルの段ボール枠つぶし"のような写像



上の図で，右を左に写す逆写像は，B_v の効果を元に戻すようなものでなくてはならない．したがって，R のつぶれた格子(灰色)を，G の直角な格子に写さなくてはならない．そのためには，R の直交する格子(黒)は，逆方向につぶれた G の格子に写らなくてはならない．実は，これは B_{-v} と同じ写像になる．これを理解するのに，写像 B_v を表す図に戻って，v を $-v$ に変えてみよう．すると，時間軸は，右上がりでなく右下がりになる．空間軸は右でなく左に傾く．これはちょうど B_v^{-1} と同じだ．

逆写像

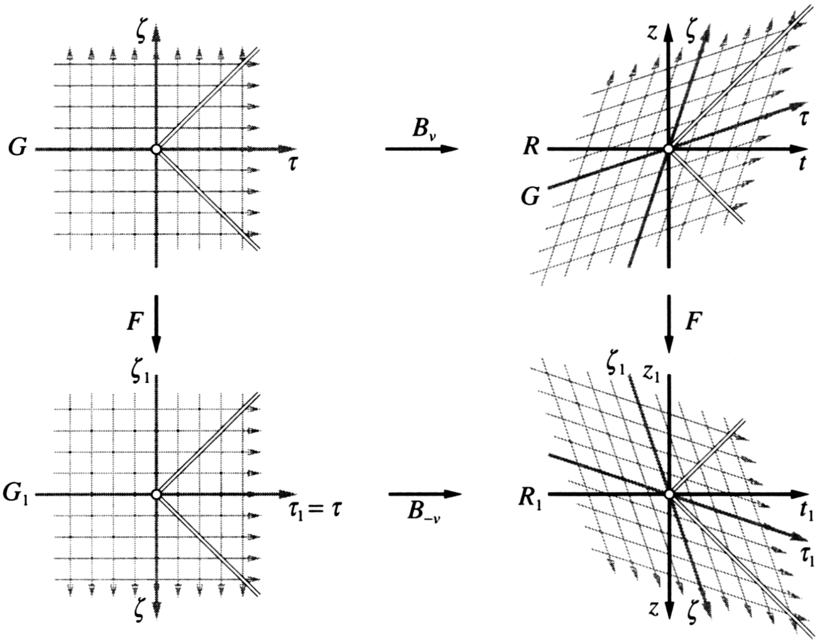
写像 B_v と B_{-v} の間にはもう1つの関係がある．この関係は，あとで B_v の行列の係数を決めるとき必要になる．観測者 G と R が，それぞれ縦軸を逆向きに取ることにしたとしよう．

写像 B_v と B_{-v} の間のもう1つの関係

$$F : \begin{cases} \tau_1 = \tau, & t_1 = t, \\ \zeta_1 = -\zeta, & z_1 = -z. \end{cases}$$

この新しい座標系では，G の R に対する相対速度は $\Delta z_1/\Delta t_1 = -\Delta z/\Delta t = -v$ になる．したがって，G と R の鏡映(空間軸を反転したもの)を G_1, R_1 とすると，写像 $G \to R$ が B_v のとき，写像 $G_1 \to R_1$ は B_{-v} で与えられなくてはならない．これは，次の図式のように書ける．

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{B_v} & R \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ G_1 & \xrightarrow[B_{-v}]{} & R_1 \end{array}$$



左上の G から出発しよう．まず縦方向の鏡映，次に B_{-v} を行うのと，まず B_v，次に縦方向の鏡映を行うのとでは同じ結果になる．すなわち，$B_{-v}F = FB_v$ である．これを B_{-v} について解くと，

$$B_{-v} = FB_vF^{-1} = FB_vF,$$

可換図式

となる．最後の等号では，F の逆写像はまた F であることを使った．この式 $B_{-v}F = FB_v$ は，F と B の順序を入れ替えるときに何が起きるかを表しているので，上の図式，(通常は主として，欄外に示された抽象的な図式)を**可換図式**(commutative diagram)と呼ぶ．

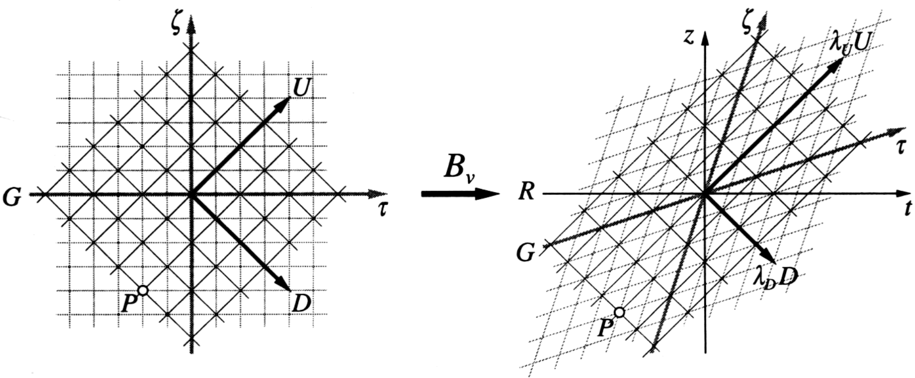
固有ベクトルと固有値

変換 B_v が単なる定数倍としてはたらくベクトル

光円錐の上下の部分はそれぞれ不変なので，光円錐上にあるベクトル

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad と \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

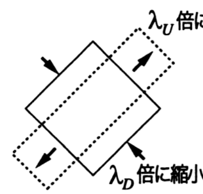
(およびその任意のスカラー倍)は特別な性質を持っている.[注1]変換 B_v は，これらのベクトルの方向を変えず，長さを伸ばしたり，縮めたりするだけである．つまり，ある正の数 λ_U と λ_D があって，$B_vU = \lambda_U U$ および $B_vD = \lambda_D D$ が成立する．(座標軸でなく)U と D を 2 辺とする正方格子は，U の方向に λ_U 倍に拡大され，D の方向に λ_D 倍に縮小される．格子の各辺は，ベクトル U と D に平行なままである．



線型性から，B_v の 2 種類の格子への作用がつじつまがあっていることが保証される．例として，G の点 P を考えよう．直角な灰色の格子で測ると，点 P は原点から 2 単位西，4 単位南である．その像は，値域の灰色の格子で測って同じ位置にある．斜めの黒の格子では，点 P は原点から 1 単位南東，3 単位南西である．その像は，値域の斜めの黒の格子で測って同じ位置にある．

したがって，B_v を定義するのに，どちらの格子を使ってもよい．しかし，(U, D)-格子を使うと，B_v の単純で美しい幾何的記述が得られる．U 方向に λ_U 倍に拡大し，D 方向には λ_D 倍に拡大する．ここで，"λ 倍に拡大する" というのは，$|\lambda| \le 1$ のときには縮小を，$\lambda < 0$ のときには鏡映を，$\lambda = 0$ のときには 1 点への縮小を意味する．

B_v の単純化された説明



実際，ベクトル U と D の方向と，それぞれの方向への拡大率 λ_U と λ_D が，B_v を完全に決定する．そのため，U と D は**固有ベクトル**(eigenvector) ,λ_U と λ_D は**固有値**(eigenvalue)と呼ばれる．(これらの英語は，ドイツ語から来ている．**eigen** は，"それ自身の" を意味する．フランス語では，同じ意味がの単語は **propre** である．そのため，固有値，固有ベクトルは，proper value, proper vector とも呼ばれる.)

固有ベクトルと固有値

定義 2.1 M を $n \times n$ 行列とする．縦ベクトル X が，$X \neq 0$ で，また数 λ があって $MX = \lambda X$ を満たすとき，X を，M の，**固有値**(eigenvalue) λ の**固有ベクトル**(eigenvector)という．

固有ベクトルの(ゼロ倍でない)スカラー倍も，同じ固有値の固有ベクトル

$n \times n$ 行列は n 個の固有値を持つ

[注1] 訳注：電場，磁場のような 3 次元の空間ベクトルを表すのに，1.4 節では $\mathbf{E}$ のような字体を用いた．また，3.2 節以降では，平面曲線，空間曲線，空間中の曲面の議論で，平面ベクトル，空間ベクトルを表すのに $\mathbf{x}$ のような字体を用いる．この 2.1 節以降では，抽象的な，主に 2 次元のベクトルを表すのに U のような字体を用いる．また，3.1 節以降では時空の 4 元ベクトル(またはそのうちいくつかの空間次元を省略したもの)を表すのに $\mathbb{V}$ のような字体を用いる．以後もこのように使い分けられる．その際，ゼロベクトルを表す記号も対応した記号を用いる．

になることに注意しよう．行列 M の固有値は，関数 $p(\lambda)=\det(M-\lambda I)$ のゼロ点，すなわち $p(\lambda)=0$ の根として与えられる．関数 $p(\lambda)$ は n 次の多項式なので，M はちょうど n 個の固有値を持つことになる(重根は重複度をこめて数える)．多項式のゼロ点は複素数になることがあるので，行列 M は複素数の固有値を持つことがありうる—たとえ行列のすべての成分が実だったとしてもである．しかし，対称行列($M^t=M$, すなわち自分自身の転置と等しいような行列)の固有値は実数になり，固有値の異なる固有ベクトルはすべて互いに直交することが知られている．

固有ベクトルを用いて M の作用を記述する

行列 M の固有ベクトルからなる組 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ が $\mathbf{R}^n$ の基底になっているとしよう．そして，これらの固有ベクトルに対応する固有値 λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n がすべて実だとしよう．すると，この基底のもとでは，$M:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ の作用は，

$$Y=a_1X_1+\cdots+a_nX_n \quad\Longrightarrow\quad MY=\lambda_1a_1X_1+\cdots+\lambda_na_nX_n$$

と非常に簡単になる．したがって，固有ベクトルに平行な格子を作れば，M の作用は単に，格子のそれぞれの方向に，対応する固有値倍に拡大するだけである．組 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ が基底であることから，逆に，この作用が M を決定する．すなわち，固有値と固有ベクトルの方向が，M を完全に決める．

やっかいなことに，すべての行列について，固有ベクトルが基底をなしているわけではない．さらに，一部の，あるいはすべての固有値が複素数になっていることもある．このような場合には，幾何的解釈は複雑になる．しかし，それでも固有値と固有ベクトルを考えることは，行列の作用を幾何的に理解する上での近道である．練習問題で，2×2 行列についてこれらの点を調べる．次の結果は，B_v を計算するのにすぐに必要になる．それは，2×2 行列と，その行列式，対角和(トレース)に関するものである．

$$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \qquad \det(M)=ad-bc, \quad \mathrm{tr}(M)=a+d.$$

命題 2.1 λ_1 と λ_2 を 2×2 行列 M の固有値とする．このとき $\det(M)=\lambda_1\lambda_2$ かつ $\mathrm{tr}(M)=\lambda_1+\lambda_2$ である．

計算による解答

定理 2.1 B_v はローレンツ行列である．すなわち，

$$B_v=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1 & v\\ v & 1\end{pmatrix}.$$

証明：$B_v=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする．未知数 a, b, c, d を v で表さなくてはならない．

まず，R の時空では，G の世界線—すなわち τ 軸の像—が傾き $v=\Delta z/\Delta t$ を持つことに注目しよう．すると，

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau a\\ \tau c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ z\end{pmatrix}$$

となり，$v = c/a$ すなわち $c = av$ となる．したがって，$a \neq 0$ である．そうでなければ，G の速度が $\pm\infty$ ということになってしまう．

次のステップでは光円錐の不変性を使う．つまり，

条件: 光円錐は不変

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{および} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が B_v の固有ベクトルであるということを使う．式 $B_v U = \lambda_U U$ は，成分を用いると

$$B_v U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \lambda_U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

となる．最後の等式から，$c + d = a + b = \lambda_U$ となる．同様に，

$$B_v D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \lambda_D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

から，$-(c-d) = a - b = \lambda_D$ となる．これにより，2 つの式

$$a + b = c + d, \qquad a - b = -c + d$$

が得られ，結局 $d = a$ かつ $c = b$ となる．すでに $c = av$ であることはわかっているので，このステップでは，

$$B_v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & av \\ av & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

と書けることがわかったことになる．

まだ決まらずに残っている係数 a を決めるために，条件 $B_v^{-1} = B_{-v} = FB_vF$ を使おう．まず，この条件を $B_v = FB_v^{-1}F$ と変形して，両辺の行列式を計算する．

条件: B_v の“鏡映”は B_{-v}

$$\begin{aligned} \det(B_v) &= \det(FB_v^{-1}F) = \det(F)\det(B_v^{-1})\det(F) \\ &= -1 \cdot \det(B_v^{-1}) \cdot -1 = \det(B_v^{-1}) = \det(B_v)^{-1}. \end{aligned}$$

したがって $\det^2(B_v) = 1$, すなわち $\det(B_v) = \pm 1$ となる．しかし，$\det(B_v) = \lambda_U \lambda_D > 0$ なので，$\det(B_v) = +1$ となり，

条件: 固有値はともに正

$$\det(B_v) = a^2 - b^2 = a^2 - (av)^2 = a^2(1 - v^2) = 1$$

が導かれる．これを a について解くと次を得る（2 つの平方根のうちから正のものを選んだ．なぜなら $2a = \mathrm{tr}(B_v) = \lambda_U + \lambda_D > 0$ であるから）．

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

証明終

今後の参照のために，B_v のもう 1 つの表示も記しておこう．

$$B_v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a^2 - b^2 = 1, \quad a > 0.$$

行列 B_v は変換 $G \to R$ のローレンツ行列である．アインシュタインは，こ

れを（ローレンツがしたように）実験事実のつじつまをあわせるためにひねりだしたのではない．彼は，ガリレイ的観測者にとっての光速度は不変である，という簡単な仮説からこれを論理的に導出したのである．

アインシュタインの枠組みでは，ローレンツ変換が以前のガリレイ変換を置き換えるものとなる．ガリレイ変換には，明快で比較的単純な，ずれという幾何学的解釈があった．ローレンツ変換にもそのような簡単な解釈はあるのだろうか？

次の節では，ローレンツ行列をより幾何学的に書き直すために，双曲線関数を導入する．これにより，驚くべき，そして有用な，通常のユークリッド幾何とのアナロジーを見ることができるだろう．

練習問題

1. 線型写像 $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を考える．写像 L が**加法的**(additive)（すべてのベクトル X,Y に対して $L(X+Y)=L(X)+L(Y)$）であり，また**同次**(homogeneous)（すべてのベクトル X と実数 r に対して $L(rX)=rL(X)$）であることを用いて，次を示せ．
   - 写像 L は直線を直線に写す．
   - 写像 L は平行線を平行線に写す．
   - 写像 L は，直線上に等間隔におかれた点を，像の直線上のやはり等間隔におかれた点に写す（しかし，写像の前後で間隔は異なるかもしれない）．
2. この練習問題の目的は，写像 $M:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ が連続であり，逆写像を持ち，直線を直線に写し，原点を原点に写すならば，M は線型写像である，ということを示すことである．M が線型写像であるとは，**加法的**（すべてのベクトル X,Y に対して $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$）であり，かつ**同次**（すべてのベクトル X と実数 r に対して $M(rX)=rM(X)$）であるということである．証明がややこしいのは，同次性のほうである．
   (a) 写像 M が平行線を平行線に写すことを示せ．（ヒント: 2 つの直線 α, β が平行だが，$M(\alpha)$ と $M(\beta)$ は交わるとする．すると，写像 M による交点の逆像が考えられなくなってしまう．）
   (b) (a)を用いて，M が加法的であることを示せ．（任意の 2 つのベクトル X, Y に張られる平行 4 辺形の像を考えるとよい．写像 M が原点を原点に写すことも使わなくてはならないだろう．）
   (c) 任意のベクトル X に対して，Y_j を $j\to\infty$ で $Y_j\to X$ となるベクトルの列とする．このとき，$M(Y_j)\to M(X)$ となるが，これはなぜか．また，このことから，$M(X+Y_j)\to M(2X)$ が導けること，さらに写像 M が加法的であることを用いると $M(X+Y_j)\to 2M(X)$ が導けることを説明せよ．このことから $M(2X)=2M(X)$ を示せ．
   (d) 正の整数 k に対して，帰納法で，$M((k-1)X+Y_j)\to M(kX)$ であること，および $M((k-1)X+Y_j)\to kM(X)$ であることを示せ．このことから，任意の正の整数 k に対して $M(kX)=kM(X)$

であることを導け．

(e) 任意の負の整数 $-k$ に対して，$M(-kX) = -M(kX)$ であることを，写像 M が加法的であることを用いて示せ．したがって $M(-kX) = -kM(X)$ であり，任意の整数 p に対して $M(pX) = pM(X)$ が成り立つ．

(f) 任意の有理数 $q = p/n$ に対して，$M(qX) = qM(X)$ であることを示せ．(ヒント: $X = nZ$ とおいて，上で示した性質 $nM(pZ) = pM(nZ)$ を用いる．)

(g) 任意の実数 r に対して q_j を r に収束する有理数列とする．上で示した性質 $M(q_jX) = q_jM(X)$ を用いて $M(rX) = rM(X)$ を示せ．これにより，M が同次でありしたがって線型であることが結論できる．

3. 定理 2.1 の結果を使わずに，条件 $B_{-v} = FB_vF$ だけを使って，a は v の偶関数であり，一方 b は奇関数であることを示せ．すなわち，

$$B_v = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ b(v) & a(v) \end{pmatrix}$$

とかいたとき，$a(-v) = a(v)$ および $b(-v) = -b(v)$ を示せ．

4. **固有値と固有ベクトル**．次の行列とベクトルを考える．

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0.$$

複素数 λ に対して $MX = \lambda X$ が成り立つとき，ベクトル X は，固有値 λ の M の固有ベクトルであるという．(ここで，$X \neq 0$ を要求しているのは，$X = 0$ に対してはすべての λ について条件が成り立ってしまうからである)．

(a) 1 次方程式 $(M - \lambda I)X = 0$ がゼロでない解を持つことを利用して，$\det(M - \lambda I) = 0$ を導け．また固有値 λ が 2 次方程式

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(M)\lambda + \det(M) = 0.$$

の根であることを導け．行列 M が 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を持つことを結論せよ．ただし，この 2 つの固有値は一致することもあり，また複素数になることもある．

(b) 関係 $\det(M) = \lambda_1\lambda_2$ および $\mathrm{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ を示せ．

(c) X_1, X_2 を，それぞれ固有値 λ_1,λ_2 の固有ベクトルであるとする．ただし．$\lambda_1 \neq \lambda_2$ と仮定する．このとき，X_1 と X_2 とが線型独立であることを示せ．

(d) 行列 M が対称であるとする．すなわち，$c = b$ であるとする．このとき，2 つの固有値 λ_1, λ_2 は実であることを示せ．また，さらに $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるなら，λ_1,λ_2 に対応する固有ベクトル X_1, X_2 が互いに直交すること ($X_1 \cdot X_2 = 0$ であること) を示せ．2 つの固有値が一致するとき，すなわち $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ となるとき，ゼロベクトルでない**すべての**ベクトルは固有ベクトルであることを示せ．この

とき，実は $M = \lambda I$ であることを示せ．

5. 本文で定義した鏡映 $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の固有値と固有ベクトルを決定せよ．
6. 行列 M が 2×2 の対称行列で，2 つの固有値が等しいとする．このとき M は単位行列のスカラー倍であることを示せ．
7. 行列 M が 2×2 の正則行列であるとする．M^{-1} の 2 つの固有値は，それぞれ，M の 2 つの固有値の逆数であること，したがって，M の固有値はゼロでないことを示せ．M^{-1} と M の固有値はどのような関係にあるか．
8. (a) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．行列が対称である場合には，固有ベクトルが直交していることを確かめよ．

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) (a)の各行列 M を線型写像 $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ と見なして，正方格子の M による像を描け．

   (c) (a)の各行列 M について，M の固有ベクトルを 2 辺とする(平行 4 辺形からなる)斜方格子を $\mathbf{R}^2$ に考え，その M による像を描け．結果を，本文の写像 B_v の格子と比べよ．
9. 円および双曲**回転行列**

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad H_u = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

   の固有値と固有ベクトルを求めよ．(これらの線型写像は，この章の以下の節で用いられる．)

2.2　双曲線関数

定義

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}, \qquad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u},$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad \coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}, \qquad \operatorname{csch} u = \frac{1}{\sinh u}.$$

発音

記号の読み方についていうと，sinh と tanh はそれぞれ “シンチ” と “タンチ” と発音されることが多い．一方 cosh と sech はつづりのまま発音される．[注2] また，coth と csch は，普通は略さないで “ハイパボリックセカント”，“ハイパボリックコセカント” と呼ばれる．[注3]

なぜ ‘双曲’？

左側の 2 つの関数は，基本的な恒等式

注 2　訳注：それぞれ，“コシュ”，“セチュ” か．

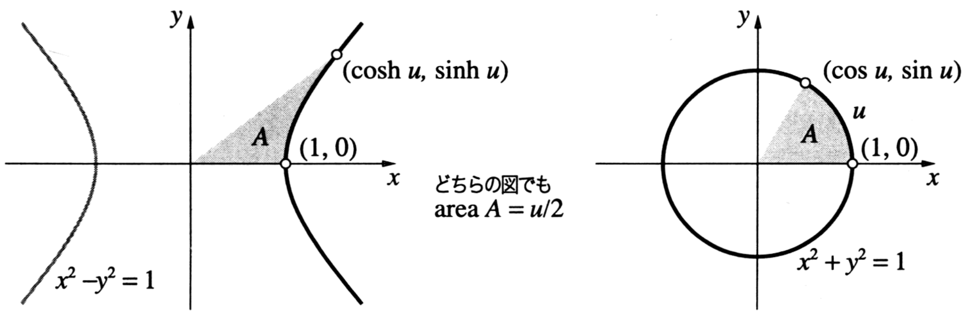
注 3　訳注：これは英語圏の話である．日本語圏にもこういう読み方をする人はいるが，ハイパボリックサインあるいはサインハイパボリックなどと略さないで言うほうが普通と思われる．また，話し言葉では，双曲正弦関数などという言い方はあまり使われない．

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \qquad (u \text{ は任意の実数})$$

を満たす．したがって，点 $(x, y) = (\cosh u, \sinh u)$ は，標準的双曲線 $x^2 - y^2 = 1$（の $x > 0$ の側の分枝）の上にある．これは，有名な 3 角関数の恒等式

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \qquad (u \text{ は任意の実数})$$

のおかげで，点 $(x, y) = (\cos u, \sin u)$ が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の上にあるのとちょうど同じである．



点 $(\cos u, \sin u)$ は，単位円上にあるというだけでなく，位置をもう少し正確に指定できる．つまり，その点は，点 $(1, 0)$ から出発して，円周上をちょうど長さ u だけ（あるいは u ラジアン (radian) の角だけ）反時計回りに進んだ位置にある．したがって，逆に，関数 $\cos u$ と $\sin u$ を**定義**するのに，円 $x^2 + y^2 = 1$ を使うことができる．その点からいうと，これら 3 角関数を**円関数**(circular functions) と呼んでもいいかもしれない．関数 $\cosh u$ と $\sinh u$ についても同じことができないだろうか？ それはできない．残念なことに，双曲線の点 $(1, 0)$ から点 $(\cosh u, \sinh u)$ までの部分の長さは，u に等しくない—少なくとも，双曲線の長さを測るのにユークリッド空間の距離を使う限りは．

なぜ双曲線関数？

しかし，面積で考えることにすれば，3 角関数と双曲線関数の間の対応はうまくいく．点 $(1, 0)$ から $(\cos u, \sin u)$ までの弧は，面積がちょうど $u/2$ の扇形 A を円から切り取る．（u が負のときは，$(1, 0)$ から時計回りの方向の扇形と考える．）**同様に**，双曲線上の点 $(1, 0)$ から $(\cosh u, \sinh u)$ までの弧も，両端点を原点と結ぶと，面積 $u/2$ の図形を作る．計算は練習問題 10 の中で詳しく見ることにしよう．とにかく，このようにすれば，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を利用して $\cosh u$ と $\sinh u$ の別の定義を与えることができる—これらの関数が双曲線関数と呼ばれる理由はここにある．

双曲線関数の満たす恒等式

最初に与えた方の定義からわかるように，双曲線関数と円（三角）関数の間には，非常に多くの面で対応する性質がある．読者は，次の表の恒等式が成立することを，3 角関数とどう違うかを意識しながら，確かめてほしい．

加法定理

$$\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v,$$
$$\cosh(u \pm v) = \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v,$$
$$\tanh(u \pm v) = \frac{\tanh u \pm \tanh v}{1 \pm \tanh u \tanh v},$$
$$\coth(u \pm v) = \frac{1 \pm \coth u \coth v}{\coth u \pm \coth v}.$$

倍角および半角公式

$$\sinh(2u) = 2 \sinh u \cosh u, \qquad \cosh(2u) = \cosh^2 u + \sinh^2 u,$$
$$\sinh\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh u - 1}{2}}, \qquad \cosh\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh u + 1}{2}}.$$

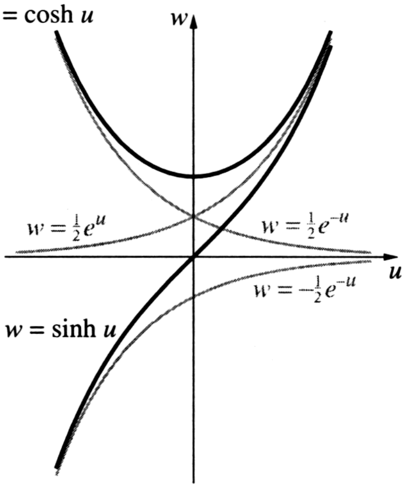
代数的恒等式

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1, \qquad 1 - \tanh^2 u = \operatorname{sech}^2 u, \qquad \coth^2 u - 1 = \operatorname{csch}^2 u.$$

微積分

$$\frac{d}{du}\sinh u = \cosh u, \quad \frac{d}{du}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u, \quad \frac{d}{du}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u$$
$$\frac{d}{du}\cosh u = \sinh u, \quad \frac{d}{du}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u, \quad \frac{d}{du}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u$$
$$\int \sinh^2(u)\, du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2}, \qquad \int \cosh^2(u)\, du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2}.$$

関数 $w = \cosh u$ と $w = \sinh u$ のグラフを，指数関数 $w = \frac{1}{2}e^u$, $w = \frac{1}{2}e^{-u}$, そして $w = -\frac{1}{2}e^{-u}$ とともに示す．関数 $\cosh u$ は，$w = \frac{1}{2}e^u$ と $w = \frac{1}{2}e^{-u}$ の和，$\sinh u$ は，$w = \frac{1}{2}e^u$ と $w = -\frac{1}{2}e^{-u}$ の和である．



sinh には逆関数がある

関数 $w = \sinh u$ は1対1で，u 軸を w 軸全体に写す[注4]ことに注意しよう．つまり，任意の実数 w_0 が与えられたとき，$w_0 = \sinh u_0$ となるような実数

注4 訳注：写像 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ として全射である

u_0 がただ1つだけ存在する．このようなとき，双曲線正弦関数には，w_0 に u_0 を対応させる関数，つまり逆関数(inverse)が存在するという．その逆関数を $\sinh^{-1}$ と書く．つまり，$u_0 = \sinh^{-1}(w_0)$ である．

命題 2.2 点 (x, y) が双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上にあり，$x > 0$ を満たすとき，

$$x = \cosh u, \qquad y = \sinh u$$

を満たす u がただ1つ存在する．

証明：$u = \sinh^{-1}(y)$ とおけばよい．あるいは，次のように，$\cosh u$ と $\sinh u$ との幾何的な関係を用いてもよい．それには，3つの点 $(0,0)$, $(1,0)$, (x,y) を直線と双曲線でつないだ内側の図形(“双曲扇形” (hyperbolic sector) A を考える．$u = 2 \cdot \text{area}\, A$ となることに注意すればよい．[注5] **証明終**

双曲線の助変数表示

この命題により，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の側の分枝の便利な助変数表示が得られる．これは，ローレンツ行列を書き表すときにも必要になるものである．

系 2.1 ローレンツ行列 B_v は，

$$H_u = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix},$$

という形にも書ける．ここで $u = \tanh^{-1} v$, すなわち $v = \tanh u$.

証明：ローレンツ行列 B_v の式を決定する際に，

$$B_v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a^2 - b^2 = 1, \quad a > 0.$$

という表示も導いた．命題 2.2 は，$a = \cosh u$ かつ $b = \sinh u$ となるような u が一意に定まることを言っている．さらに，$v = b/a = \sinh u / \cosh u = \tanh u$ であることから示される． **証明終**

ブーストと双曲回転

これで，ローレンツ変換の2つの表し方を得たことになる—物理的な表し方と幾何的な表し方である．行列 B_v で表したとき，この変換を **ブースト**(boost)(あるいは，速度 v のブースト)と呼ぶ．これは，速度 v という物理的な変数を用いた物理的な表し方である．一方，行列 H_u は幾何的な表し方になっている．次の節 2.3 で見るように，u を “双曲角”,H_u を**双曲回転**(hyperbolic rotation)と見なすことができる．これらは，通常のユークリッド的な角の大きさと回転に対応している．ローレンツ変換の2つの表し方は，次のように関係づけられている．

$$H_u = B_{\tanh u} \qquad \text{および} \qquad B_v = H_{\tanh^{-1} v}.$$

[注5] 訳注：記号 area A は，図形 A の面積を表す．

練習問題

1. 関数 $\sinh u$ と $\cosh u$ の定義から，任意の u に対して $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ が成立することを示せ．他の 2 つの代数的恒等式についても同じように示せ．
2. 双曲線関数の加法定理が成立することをすべて確かめよ．その際，加法定理が，3 角関数の加法定理と異なっているか，異なっているならどのように異なっているかを観察せよ．倍角公式と半角公式，微積分の恒等式についても，同じことを行え．
3. 関係 $\cosh u \pm \sinh u = e^{\pm u}$ を示せ．
4. 関係 $H_{u_1} \cdot H_{u_2} = H_{u_1+u_2} = H_{u_2} \cdot H_{u_1}$ を示せ．ただし，

$$H_u = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}.$$

5. (a) 次を示せ．ただし，$v = \tanh u$ とおく．

$$\sinh u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

   (b) 関係

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} = B_v$$

   を導け．

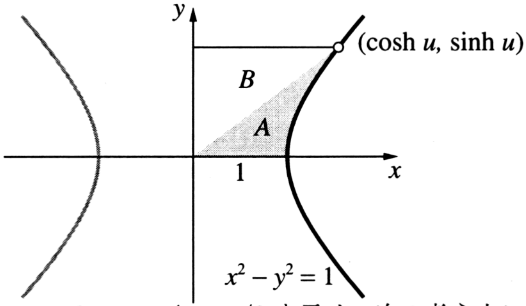
   (c) ローレンツ行列 B_v のこの表式を用いて，$B_{v_1} \cdot B_{v_2}$ を計算せよ．ある v_3 に対して $B_{v_3} = B_{v_1} \cdot B_{v_2} = B_{v_2} \cdot B_{v_1}$ が成立することを示せ．また，そのような v_3 を，v_1,v_2 を用いて具体的に書き表せ．条件 $|v_1| < 1$ かつ $|v_2| < 1$ が満たされるとき，$|v_3| < 1$ であることを示せ．
6. (a) 関数 $w = \tanh u$, $w = \coth u$, $w = \operatorname{sech} u$, $w = \operatorname{csch} u$ のグラフを重ねて描け．

   (b) これらのグラフから，$0 < \operatorname{sech} u \leq 1$ および $-1 < \tanh u < 1$ が読み取れるはずである．これらの不等式を，解析的に示せ．
7. (a) 曲線 $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ の助変数表示 $x = \cosh u$, $y = \sinh u$ を参考にして，次の曲線の助変数表示をそれぞれ作れ．

$$x^2 - y^2 = 1,\ x < 0; \qquad y^2 - x^2 = 1,\ y > 0; \qquad y^2 - x^2 = 1,\ y < 0.$$

   (b) それぞれの曲線を描いて，助変数の値が $u = -1, 0, 1$ となる点に印をつけよ．それぞれの曲線に矢印をつけて，u が増加する方向を示せ．
8. 助変数表示された曲線 $P_u = (\cosh u, \sinh u)$　$(-1 \leq u \leq 2)$ を注意深く描け．そのうえに重ねて，3 つの線分 $\{P_{-1}, P_2\}$, $\{P_{-1/2}, P_{3/2}\}$, $\{P_0, P_1\}$ を描け．これらの線分は，互いに平行であり，また，助変数が $u = 1/2$ である点における曲線の接線にも平行であるはずである．そうなっているか？

9. 単位円を考えたとき，弧の長さが u であるような扇形 A の面積が $u/2$ であることの簡明な説明を与えよ．



10. 上の図の双曲扇形 A について，$\text{area}\, A = u/2$ を示せ．次の考え方に従ってもよい．
   (a) 双曲線の右側の分枝が，関数 $x = \sqrt{1+y^2}$ のグラフになっていることを説明せよ．次に，図の図形 A,B の和集合の面積 $\text{area}(A+B)$ に対して，
$$\text{area}(A+B) = \int_0^{\sinh u} \sqrt{1+y^2}\, dy = \frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2}$$
   を示せ(積分を計算するには，例えば，$y = \sinh s$ と変数変換すればよい.)
   (b) 図形 B の面積 $\text{area}\, B$ を計算し，$\text{area}(A+B)$ から引いて，$\text{area}\, A$ を求めよ．
11. 練習問題 9 で求めた円の扇形の面積を，上の双曲扇形 A の面積計算とちょうど並行するように，積分を用いて計算せよ．
12. (a) 関数 e^u, $\cosh u$, および $\sinh u$ のテイラー級数を求めよ．
   (b) 関数 $\tanh u$ の 3 次のテイラー多項式を求めよ．
13. 双曲線関数の逆関数 $\sinh^{-1} u$, $\cosh^{-1} u$, および $\tanh^{-1} u$ のことを，$\sinh^{-1} u = \text{arcsinh}\, u$, $\cosh^{-1} u = \text{arccosh}\, u$, および $\tanh^{-1} u = \text{arctanh}\, u$ とも書く．これら逆関数の導関数をそれぞれ計算せよ．
14. (a) 関係 $\arcsin(\tanh u) = \arctan(\sinh u)$ を示せ．
   (b) 関係
$$\tanh^{-1} w = \text{arctanh}\, w = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$
   を示せ．
15. 発音の練習です(Bill Watson による)．この料理なーんだ？
   (a) $\dfrac{e^{2r}+1}{2e^r}$　　(b) $\dfrac{2e}{e^2+1}$

2.3 ミンコフスキ幾何

回転とユークリッド空間のノルム

平面の解析幾何では，基本的な作業は長さと角度を測ることで，他のすべ　**ノルムと内積**

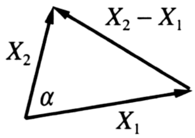
ての作業はこれらを組み合せて行われる．そのための道具が $\mathbf{R}^2$ の**内積**(inner product)である．標準的なユークリッド内積は

$$X_1 \cdot X_2 = X_1^t X_2 = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

で与えられる．ここで，$\mathbf{R}^2$ の元 X を，列ベクトルで表した．転置 X^t は対応する行ベクトルである．内積は，ベクトルの転置を普通の行列として左からかけたものと考える．こう考えておくと，後になって便利だ．内積から，ベクトルの長さ，あるいはユークリッド**ノルム**(norm)を，

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

によって作る．ノルムが定義されると，2 つの基本的な作業が可能になる．$\mathbf{R}^2$ の 2 点，あるいは，2 つのベクトル X_1, X_2 に対して，



$$X_1 \text{ から } X_2 \text{ までの距離} = \|X_2 - X_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$X_1 \text{ と } X_2 \text{ の間の角の大きさ} = \alpha = \arccos\left(\frac{X_1 \cdot X_2}{\|X_1\| \, \|X_2\|}\right)$$

である．

平面に回転を施しても，長さと角の大きさが変化しないというのは，幾何学の基本的原理である．θ ラジアンの反時計回りの回転は行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

によって与えられる．(練習問題 1 参照.) ここで定義した意味での回転が，確かに，長さと角の大きさを変えないことを示そう．それには，ノルムと内積を変えないことを示せばよい．ノルムは内積を用いて定義されているので，実は，内積を変えないことを示せば十分である．まず，ノルムを直接計算することによる証明を見てみよう．

回転は長さと角の大きさを変えない

命題 2.3 $\mathbf{R}^2$ のすべてのベクトル X について $\|R_\theta X\| = \|X\|$ である．

証明：まず，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と置こう．このとき，$p^2 + q^2 = x^2 + y^2$ を示せばよい．実際，

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 \\ &= x^2\cos^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta \\ &\quad + x^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\cos^2\theta \\ &= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

となる．　**証明終**

系 2.2 回転 R_θ は，任意の r について，円 $x^2+y^2=r^2$ を自分自身に写す．

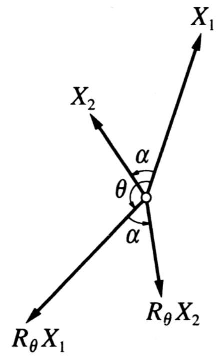
命題 2.4 $R_\theta X_1 \cdot R_\theta X_2 = X_1 \cdot X_2$.

証明： この内積を，行列の積の形に書くことによって，

$$R_\theta X_1 \cdot R_\theta X_2 = (R_\theta X_1)^t R_\theta X_2 = X_1^t R_\theta^t R_\theta X_2$$
$$= X_1^t R_{-\theta} R_\theta X_2 = X_1^t I X_2 = X_1 \cdot X_2$$

となって示せる（I は単位行列）．ここで用いた関係 $R_\theta^t = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ は練習問題 2 で確かめる．　**証明終**

系 2.3 点 $R_\theta X_1$ から点 $R_\theta X_2$ への距離は，点 X_1 から点 X_2 への距離に等しい．ベクトル $R_\theta X_1$ とベクトル $R_\theta X_2$ のなす角は，ベクトル X_1 とベクトル X_2 のなす角に等しい．



証明： $R_\theta X_1$ から $R_\theta X_2$ への距離は

$$\|R_\theta X_2 - R_\theta X_1\| = \|R_\theta(X_2 - X_1)\| = \|X_2 - X_1\|,$$

となり X_1 から X_2 への距離に等しい．$R_\theta X_1$ と $R_\theta X_2$ のなす角は，

$$\arccos\left(\frac{R_\theta X_1 \cdot R_\theta X_2}{\|R_\theta X_1\|\,\|R_\theta X_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{X_1 \cdot X_2}{\|X_1\|\,\|X_2\|}\right),$$

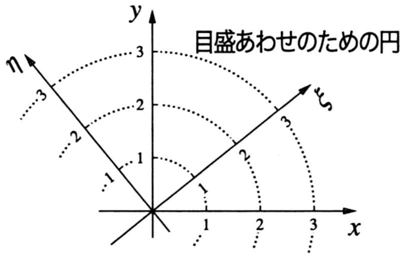
となり X_1 と X_2 のなす角に等しい．　**証明終**

絶対的な量は幾何学的意味を持つ

したがって，点の座標は回転で変化するが，ノルムは変化しない．つまり，座標は，それぞれの座標系に対して決まる**相対的**(relative)な量だが，ノルムは（回転で互いに写りあう）どの座標系でも同じ値をとる**絶対的**(absolute)な量である．ノルムは絶対的な量なので，幾何学的に実質的意味がある．同様に，2 つのベクトルの内積も絶対的な量であり，幾何学的に実質的意味がある．

目盛あわせ

ノルムが絶対的な量であるということを利用すると，2 つの座標系の目盛あわせ(calibration)を行うことができる．言い換えると，長さの単位を一方の座標系からもう一方に移せる．下の図には，1 つの円周と交わる多くの座標軸が描かれているが，同じ単位で測れば，その交点はみな，原点から同じ距離にならなくてはならない．さらに，座標系の x 軸と，**同じ**座標系の y 軸の間の目盛あわせも，90° 回転によって行える．



命題 2.5 2 つの回転の積(合成)はまた 1 つの回転である．具体的には，$R_\theta \cdot R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$ である．言い換えると，2 つの回転を合成する(積を計算する)には，回転角の和をとればよい．さらに，$R_0 = I$ であり，また $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ である．

証明：練習問題 2.

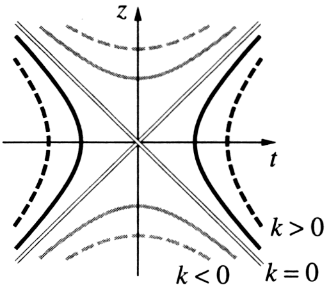
この命題は，回転の集合 $O_+(2, \mathbf{R})$ が群をなすことを主張している．この群は可換であるが，それは，角の大きさの加法が次のように可換であることに起因している．

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_{\varphi+\theta} = R_\varphi R_\theta.$$

ミンコフスキノルム

H_u は $t^2 - z^2 = k$ を不変にする

ローレンツ変換 H_u は光円錐，つまり集合 $t^2 - z^2 = 0$ を不変にするように定義された．実は，H_u はさらによい性質を持っている．次の定理は，H_u が，双曲線 $t^2 - z^2 = k$ (k は任意)を不変にすることを主張している．(光円錐は，これらの双曲線の共通な漸近線である.)



定理 2.2 もし $\tau^2 - \zeta^2 = k$ であり，かつ

$$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = H_u \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix},$$

ならば $t^2 - z^2 = k$ である．ここで，助変数 u は任意の実数である．

証明：次のように計算できる．

$$\begin{aligned} t^2 - z^2 &= (\tau \cosh u + \zeta \sinh u)^2 - (\tau \sinh u + \zeta \cosh u)^2 \\ &= \tau^2 \cosh^2 u + 2\tau\zeta \cosh u \sinh u + \zeta^2 \sinh^2 u \\ &\quad - \tau^2 \sinh^2 u - 2\tau\zeta \sinh u \cosh u - \zeta^2 \cosh^2 u \\ &= \tau^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) - \zeta^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) \\ &= \tau^2 - \zeta^2. \end{aligned}$$

証明終

$t^2 - z^2$ が $x^2 + y^2$ に対応

この証明は，回転がノルムを保つこと，すなわち $\|R_\theta X\| = \|X\|$ (命題 2.3)の証明の単なる焼き直しである．やったことは，3 角関数を双曲線関数

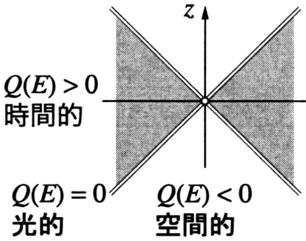
に置き換えたことだけである．差 $t^2 - z^2$ が，ユークリッド空間の距離を測るノルム $\|X\|^2 = x^2 + y^2$ に対応するということは，差 $t^2 - z^2$ を時空の‘距離’を測るノルムとして使うべきだということを意味している．これが，ハーマンミンコフスキが 1907 年にとった考え方である．

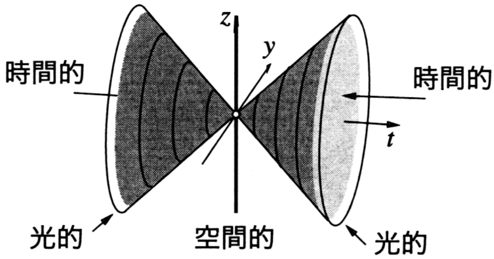
光円錐は時空を分割する

この考え方は，量 $t^2 - z^2$ が正やゼロだけでなく，負の値もとれるためにややこしくなる．このことを見るために，$(1+1)$ 次元でなく $(1+3)$ 次元で考えよう．$(1+3)$ 次元時空の事象 $E = (t, x, y, z)$ に対してノルムを

$$Q(E) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

と定義する．$(1+1)$ 次元の事象 $E = (t, z)$ に対しては $Q(E) = t^2 - z^2$ である．集合 $Q(E) = 0$ は，時空を 2 つの領域に分割する．Q の値は，2 つの領域のうちの一方では正，もう一方では負である．





時間的，空間的，光的な事象

このとき，光円錐の内側のすべての点(上の図で影のついている点)に対して，$Q(E) > 0$ となることがわかる．どの観測者の時間軸をローレンツ写像 H_u で写しても，像は光円錐の内部に含まれるので，光円錐の内部の事象 E を**時間的**(timelike)ということにする．光円錐の外部($Q(E) < 0$ の部分)は，他の観測者の空間軸の像を含むので，この領域の事象 E を**空間的**(spacelike)ということにする．そして，事象が光円錐上にあるとき，事象は**光的**(lightlike)であるという．

定義 2.2 事象 $E = (t, x, y, z)$ の**ミンコフスキノルム**(Minkowski norm)を

$$\|E\| = \begin{cases} \sqrt{Q(E)} & E \text{ が 時間的なとき} (Q(E) > 0) \\ \sqrt{-Q(E)} & E \text{ が 空間的なとき} (Q(E) < 0) \\ 0 & E \text{ が 光的なとき} (Q(E) = 0) \end{cases}$$

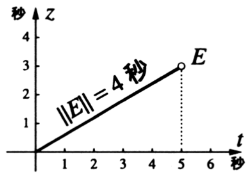
と定義する．

ミンコフスキノルムは時間

幾何単位系では長さは時間と同じ次元(dimensions)を持つので，ミンコフスキノルムは時間の次元を持つ．[注6] したがって，例えば，事象 $E = (5\,\text{秒}, 3\,\text{秒})$ に対しては，$\|E\| = 4$ 秒となる．これは計算違いではない．ユークリッド幾何には辺の長さが 3-4-5 の直角 3 角形があるが，ミンコフスキ幾何には，3-5-4

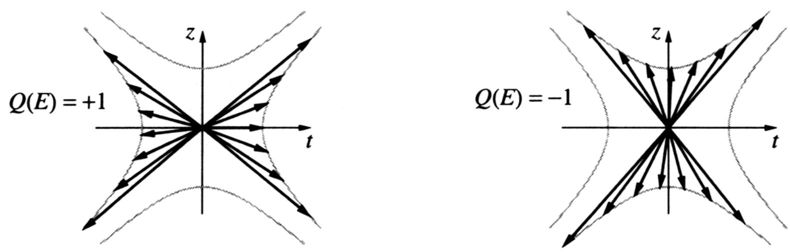
注6 訳注：ここでいう次元は，空間が 3 次元，などという意味の次元とは異なる．物理量は，質量，長さ，時間を適当な巾でかけあわせたものだが，この 3 個の巾の組のことも次元と呼ばれており，ここで使われている次元はこちらの方である．

の直角3角形があるのだ．



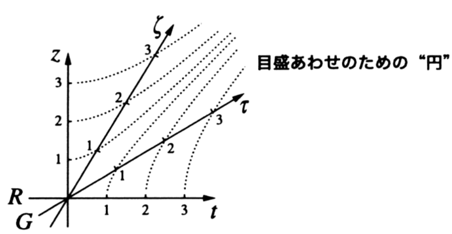
直観のはたらかない長さと"単位円"

このノルムを使って時空での長さを測ると，一見したところ，驚くような，そして直観に反するような結果になる．手始めに，このノルムでの"単位円"は，2組の双曲線 $t^2 - z^2 = \pm 1$ になる．したがって，下の図に描かれたすべてのベクトルは**単位**ベクトルである．左の図には時間的ベクトル，右の図には空間的ベクトルを描いた．もちろん，ユークリッドノルムで測れば(私達の目は本能的にそうしてしまうわけだが)，漸近線 $z = \pm t$ に近いベクトルほど長さが大きいことになる．



目盛あわせ

通常のノルムを使ってユークリッド座標系の目盛をあわせたように，ミンコフスキノルムを使うことによって，時空の座標系の目盛をあわせることができる．下の図の τ 軸と ζ 軸にふられた目盛の間隔は，私達の本能的にユークリッド的な目には大きすぎるように見えるかもしれないが．実は正確にこの通りでなければならない．



時空における過去と未来

物理的には過去と未来の区別は重要なので，この点を考慮にいれて，時空をさらに細かく分割して考えることにする．

定義 2.3 時空は，事象 $E = (t, x, y, z)$ ($E = (t, z)$ でもよい)の，互いに共通部分を持たない次の6個の集合の和集合として表せる．

$\mathcal{T}_+$：時間的未来集合　$Q(E) > 0,\ t > 0$,

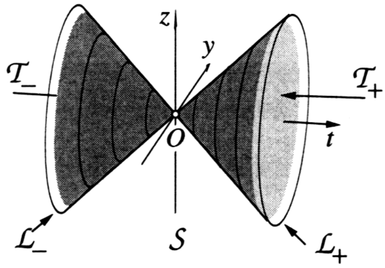
$\mathcal{T}_-$：時間的過去集合　$Q(E) > 0,\ t < 0$,

$\mathcal{S}$　：空間的集合 $Q(E) < 0$,

$\mathcal{L}_+$：光的未来集合 $Q(E) = 0,\ t > 0$,

$\mathcal{L}_-$：光的過去集合 $Q(E) = 0,\ t < 0$,

O　：原点．



定理 2.3 任意の u に対して，ローレンツ写像 H_u は，時空の 6 つの領域をそれぞれ自分自身に写す．

証明： 定理 2.2 によれば $Q(H_u(E)) = Q(E)$ である．したがって，あとは未来集合と過去集合がそれぞれ写像によって自分自身に写されることを言えばよい．そこで，事象 E を $\mathcal{T}_+$ の元としよう．すると，

$$E = \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \tau > 0; \qquad H_u(E) = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}.$$

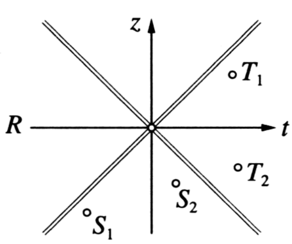
示すべきことは $t > 0$ である．事象 E は $\mathcal{T}_+$ の点だから，$\tau > 0$ であり，$-\tau < \zeta < \tau$ である．よって，

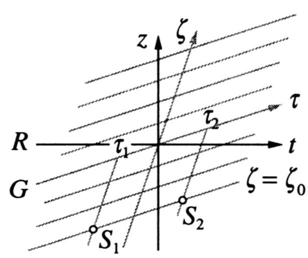
$$t = \tau \cosh u + \zeta \sinh u > \tau \cosh u - \tau \sinh u = \tau e^{-u} > 0$$

となる．残りの 3 つの場合も同様に示せる． **証明終**

定義 2.4 事象 E_1 から E_2 への**距離ベクトル**(separation) をベクトル $E_2 - E_1$ と定義し，E_1 と E_2 の間の**間隔**(interval) を $\|E_2 - E_1\|$ と定義する．間隔が時間的，空間的，あるいは光的であるとは，対応する距離ベクトルがそれぞれ時間的，空間的，あるいは光的であることをいう． **事象の間の間隔**

間隔は，ノルムと同様に秒で測られる．2 つの事象が空間的，時間的であるからといって，その 2 つの事象の間の間隔が空間的，あるいは時間的であるとは限らない．例えば，下の左側の図では，事象 S_1 と S_2 の間の間隔は時間的であり，事象 T_1 と T_2 の間の間隔は空間的である．





定理 2.2 から任意の事象 E と任意の実数 u について $\|H_u E\| = \|E\|$ が成立することがわかる．したがって，事象のミンコフスキノルム，および 2 つの事象の間の間隔は**絶対的な**量である．すなわち，等速直線運動しているすべての観測者は，これらの量を観測すると同じ値を得る．よって，ガリレイ **ノルムと間隔には物理的意味を持つ**

の相対性原理により，それらは客観的な量であり，すべての観測者が合意できる物理的意味を持つ．

時間的間隔は普通の時間差を測る

このことの意味を，具体的な状況で考えてみよう．上の右の図では，事象 S_1 と S_2 の間の間隔は時間的である．したがって，距離ベクトル $S_2 - S_1$ の傾き v は $|v| < 1$ を満たす．したがって，R に対して速度 v であるような観測者 G を考えることができる．すると，事象 S_1, S_2 は G の時間軸と平行な直線 $\zeta = \zeta_0$ の上にあることになる．つまり，G から見ると，S_1 と S_2 は，同じ場所で，異なる時刻 τ_1, τ_2 に起きた事になる．すなわち，S_1 と S_2 の間には，時間の差 $\tau_2 - \tau_1$ だけがあることになり，距離ベクトルは $S_2 - S_1 = (\tau_2 - \tau_1, 0)$ という簡単な形になる．

もちろん，R から見ると，S_1 と S_2 は，異なる場所 z_1, z_2 で，異なる時刻 t_1, t_2 に起きたように見える．ここで，$S_2 - S_1 = (t_2 - t_1, z_2 - z_1)$ である．しかし，定理 2.2 によって，ノルム $\|S_2 - S_1\|_R$ と $\|S_2 - S_1\|_G$ は等しい．したがって，

$$\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \|S_2 - S_1\|_R = \|S_2 - S_1\|_G = \tau_2 - \tau_1$$

となる．言い換えると，$S_2 - S_1$ が時間的である場合，どの観測者が間隔 $\|S_2 - S_1\|$ を測っても，その値は，これらの事象を“経験しつつ移動”する特別な観測者が測った，これらの事象の間の普通の意味での時間差と一致する．この意味で，S_1 と S_2 の間の間隔は客観的である．

空間的間隔は普通の距離を測る

同様に，2 つの事象の間の間隔が空間的であるなら，この 2 つの事象が別の場所で同時に起きたと見るような観測者を考えることができる．この観測者にとっては，距離ベクトルは空間成分だけを持つ．したがって，これらの事象の間の間隔は，どの観測者が間隔を測定しても，事象が同時に起きたと見る特別な観測者が測った，これらの事象の間の普通の意味での空間的距離と一致する．

双曲角と双曲回転

未来集合 $\mathcal{F}$ に注目

これまで注目してきた R_θ と H_u の間の対応関係では，u はユークリッド空間の角の大きさ θ に対応する．したがって，u は“双曲角”として，H_u はその角だけの回転として，それぞれ意味づけられるべきである．実は，双曲線関数と単位双曲線との関係から，このような意味づけが導かれる．だが，この点を追究する前に，H_u が時空の 6 つの領域それぞれに別々に作用する様子を見ておく必要がある．ここでは，時間的未来集合 $\mathcal{T}_+$ に注目しよう．各観測者の世界線が対応しているのは，この集合の元である時間的未来ベクトルである．簡単のために，今後はこの集合を単に**未来集合**(future set)$\mathcal{F}$ と表すことにする．

定理 2.4 任意の実数 u について，H_u は $\mathcal{F}$ を自分自身の上に 1 対 1 で写す．

証明： 写像 H_u が $\mathcal{F}$ の値域が自分自身に含まれることはすでに示した．これは，逆写像 $H_u^{-1} = H_{-u}$ についても成立する．したがって，H_u は $\mathcal{F}$ を自分

自身の上に1対1で写す. **証明終**

命題 2.6 集合 $\mathcal{F}$ は, ベクトルの加法と, **正の**スカラー倍のもとで閉じている.

証明： 2番目の主張は明らかに正しい. 1番目の主張を証明しよう. まず,

$$E_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

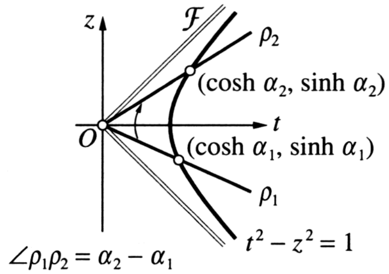
が未来ベクトルであるとする. すると,

$$\begin{aligned} &0 < t_1, \qquad && -t_1 < z_1 < t_1, \\ &0 < t_2, \qquad && -t_2 < z_2 < t_2 \end{aligned}$$

が成立する. したがって, $0 < t_1 + t_2$ かつ $-(t_1 + t_2) < z_1 + z_2 < t_1 + t_2$ であり, 和 $E_1 + E_2$ もまた未来ベクトルである. **証明終**

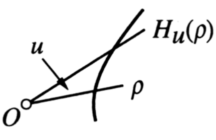
写像 R_θ は, ユークリッド平面の原点から発するすべての半直線(ray)の角度を θ だけ変える. そこで, H_u が**未来半直線**(future ray)をどのように動かすかに注目することにする. 未来半直線とは, 原点から発する半直線で, 未来集合 $\mathcal{F}$ の部分集合であるものをいう. **未来半直線**

定義 2.5 2つの未来半直線 ρ_1, ρ_2 は, ρ_1 **から** ρ_2 **への双曲角** $\angle\rho_1\rho_2$ (hyperbolic angle $\angle\rho_1\rho_2$ from ρ_1 to ρ_2)を定める. 半直線 ρ_1 と ρ_2 が単位双曲線 $t^2 - z^2 = 1$ と交わる点をそれぞれ $(\cosh\alpha_1, \sinh\alpha_1)$,$(\cosh\alpha_2, \sinh\alpha_2)$ とすると, $\angle\rho_1\rho_2$ は $\alpha_2 - \alpha_1$ 双曲ラジアンである.



命題 2.2 から, α_1, α_2 は一意的に定まる. 双曲角は符号のある量であり, $\angle\rho_2\rho_1 = -\angle\rho_1\rho_2$ となることに注意しよう. 混乱が起きない場合には, **双曲**という語は省略することにする.

定理 2.5 未来半直線 ρ に対して, ρ から $H_u(\rho)$ への双曲角は u 双曲ラジアンである.



証明： 未来半直線 ρ が, 単位双曲線と点 $(\cosh\alpha, \sinh\alpha)$ で交わるとする. このとき, 半直線 $H_u(\rho)$ と単位双曲線との交点は

$$H_u \begin{pmatrix} \cosh\alpha \\ \sinh\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha \\ \sinh\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(u+\alpha) \\ \sinh(u+\alpha) \end{pmatrix}$$

である（ここで，双曲正弦関数，双曲余弦関数の加法定理を使った）．双曲角の定義から，ρ から $H_u(\rho)$ への双曲角は $u+\alpha-\alpha=u$ である．　**証明終**

系 2.4 半直線 ρ_1 から半直線 ρ_2 への双曲角が β のとき，$\rho_2=H_\beta(\rho_1)$ である．

証明： これは定理の逆である．半直線 ρ_1 から β 双曲ラジアンだけ離れた半直線はただ 1 つ存在することから，成立する．　**証明終**

系 2.5 H_u は未来半直線の間の双曲角を保つ．

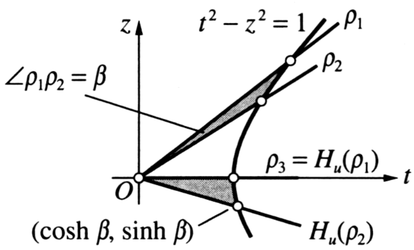
証明： ρ_1 から ρ_2 への双曲角が β であるとする．直前の系により，$\rho_2=H_\beta(\rho_1)$ と書ける．一方，

$$H_u(\rho_2)=H_u(H_\beta(\rho_1))=H_{u+\beta}(\rho_1)=H_\beta(H_u(\rho_1))$$

である．定理 2.5 から，$H_u(\rho_1)$ から $H_u(\rho_2)$ への双曲角は β である．**証明終**

系 2.6 双曲角 $\angle\rho_1\rho_2=\beta$ のとき，半直線 ρ_1,ρ_2 と単位双曲線とに囲まれる双曲扇形の符号つき面積は $\beta/2$ である．

証明： 半直線 ρ_3 を t 軸の正の部分とする．実数 u を $H_u(\rho_1)=\rho_3$ となるようにとる．このとき，系 2.5 から $\angle H_u(\rho_1)H_u(\rho_2)$ もまた β となる．したがって，$H_u(\rho_2)$ は点 $(\cosh\beta,\sinh\beta)$ で単位双曲線と交わる．2.2 節の練習問題 10 から，ρ_3 と $H_u(\rho_2)$ に挟まれる扇形の符号つき面積は $\beta/2$ になる．一方，$\det(H_u)=1$ なので，写像 H_u は面積と向きを保つ．したがって，系で述べられている双曲扇形は，この双曲扇形と同じ符号つき面積 $\beta/2$ を持つ．**証明終**



H_u は双曲回転

これらの結果から，R_θ と H_u の間に完全な対応が得られた．これにより，“H_u は未来集合 $\mathcal{F}$ の点を双曲角 u だけ回転する” という主張が正当化される．また，双曲角の等価な定義として，“2 つの半直線と単位双曲線とに囲まれる双曲扇形の（ユークリッド的）符号つき面積の 2 倍” というものも可能であることが系 2.6 から分る．

これらの系を示す際に導いたことを，次の定理としてまとめておく．この定理は，ユークリッド空間の回転と同じような性質を持つ可換群であることを主張している．

双曲回転は群をなす

定理 2.6 2 つの双曲回転の合成はまた双曲回転になる．特に，$H_u\cdot H_w=H_{u+w}$ が成立する．言い換えると，双曲回転を合成するには角の大きさの和をとればよい．さらに，$H_0=I$（恒等写像），$H_u^{-1}=H_{-u}$, $H_uH_w=H_wH_u$ が成り立つ．

ミンコフスキ内積

2 つのベクトル X_1, X_2 の標準的なユークリッド内積は,

$$X_1 \cdot X_2 = X_1^t I X_2 = (x_1, y_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

で与えられる．このときユークリッドノルム $\|X\|$ は $X \cdot X = x^2 + y^2 = \|X\|^2$ と書けるので，ユークリッドノルムとミンコフスキノルムの間の対応から，2 つの事象 E_1 と E_2 の**ミンコフスキ内積** (Minkowski inner product) を

$$E_1 \cdot E_2 = E_1^t J_{1,1} E_2 = (t_1, z_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_2\\ z_2\end{pmatrix} = t_1t_2 - z_1z_2$$

と定義すべきだろう．内積をこのように表すと，通常の行列の積だけを用いて計算できる．ユークリッド内積とミンコフスキ内積の違いが，定義に用いる行列だけであることもわかる．ユークリッドの場合には単位行列 I であり，ミンコフスキの場合には行列 $J_{1,1}$ である．$(1+3)$ 次元時空でのミンコフスキ内積を定義するには，行列

行列 $J_{p,q}$

$$J_{1,3} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

を使うだけでよい．すると，$E \cdot E = E^t J_{1,3}\, E = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = Q(E)$, であり，

$$E \cdot E = \begin{cases} -\|E\|^2 & E \text{ が空間的なとき,}\\ \|E\|^2 & \text{それ以外}\end{cases}$$

となる．

定理 2.7 双曲回転はミンコフスキ内積を保つ．

証明： $H_u(E_1) \cdot H_u(E_2) = (H_uE_1)^t J_{1,1} H_u E_2 = E_1^t H_u^t J_{1,1} H_u E_2$

$$= E_1^t \begin{pmatrix}\cosh u & \sinh u\\ \sinh u & \cosh u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh u & \sinh u\\ \sinh u & \cosh u\end{pmatrix} E_2$$

$$= E_1^t \begin{pmatrix}\cosh u & -\sinh u\\ \sinh u & -\cosh u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh u & \sinh u\\ \sinh u & \cosh u\end{pmatrix} E_2$$

$$= E_1^t \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} E_2$$

$$= E_1 \cdot E_2.$$

証明終

未来ベクトル E_1, E_2 が，それぞれ未来半直線 ρ_1, ρ_2 上にあるとき，$\angle E_1E_2 = \angle\rho_1\rho_2$ と定義する．次の結果は，ユークリッド平面上で角 θ をなす 2 つのベクトル X_1, X_2 の満たす性質 $X_1 \cdot X_2 = \|X_1\|\|X_2\|\cos\theta$ に対応するものである．

未来ベクトルのなす角

定理 2.8 E_1, E_2 が未来ベクトルであり，$\angle E_1E_2 = \beta$ であるならば，$E_1 \cdot E_2 = \|E_1\|\|E_2\|\cosh\beta$ である．

証明： まず，E_1, E_2 と同じ向きの**単位**ベクトル $U_i = E_i/\|E_i\|$, $i = 1, 2$ について証明する．このとき，ベクトル U_i は E_i と同じ半直線上にあるので，$\angle U_1U_2 = \angle E_1E_2 = \beta$ である．単位ベクトル U_1 は単位双曲線上にあるので，適当な双曲回転 H_u をとると，

$$H_u(U_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．系 2.6 の証明から，この u に対しては

$$H_u(U_2) = \begin{pmatrix} \cosh\beta \\ \sinh\beta \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$H_u(U_1) \cdot H_u(U_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh\beta \\ \sinh\beta \end{pmatrix} = \cosh\beta.$$

回転 H_u はミンコフスキ内積を保つので，$U_1 \cdot U_2 = \cosh\beta$ である．最後に $E_1 \cdot E_2$ を考えて，

$$E_1 \cdot E_2 = (\|E_1\|U_1) \cdot (\|E_2\|U_2) = \|E_1\|\|E_2\|\,(U_1 \cdot U_2) = \|E_1\|\|E_2\|\cosh\beta$$

を得る． **証明終**

次に，定理 2.8 の系を 2 つ述べる．最初の系は，ユークリッド平面での余弦定理の直接の対応物である．しかし，符号が異なっていることに注意しよう．2 番目の系は，ある意味不思議でおもしろい．というのは，ユークリッド平面での対応する主張とちょうど反対になっているからだ．それは，“線分は 2 点の間の**最長**経路である” ことを主張する．

系 2.7 双曲余弦定理(The law of hyperbolic cosines)．ベクトル E_1, E_2 が未来ベクトルで $\angle E_1E_2 = \beta$ であるとき，

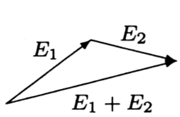
$$\|E_1 + E_2\|^2 = \|E_1\|^2 + \|E_2\|^2 + 2\|E_1\|\|E_1\|\cosh\beta$$

である．

証明： 和 $E_1 + E_2$ は未来ベクトルであり，$\angle E_1E_2 = \beta$ なので，

$$\begin{aligned}\|E_1 + E_2\|^2 &= (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2) = (E_1 \cdot E_1) + 2(E_1 \cdot E_2) + (E_2 \cdot E_2) \\ &= \|E_1\|^2 + 2\|E_1\|\|E_2\|\cosh\beta + \|E_2\|^2.\end{aligned}$$

証明終



系 2.8 反対向きの 3 角不等式(The reverse triangle inequality)．ベクトル E_1, E_2 が未来ベクトルであるとき，$\|E_1 + E_2\| \geq \|E_1\| + \|E_2\|$ である．

証明： $\angle E_1E_2 = \beta$ とおく．$\cosh\beta \geq 1$ なので，

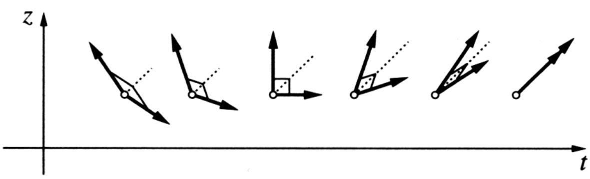
$$\begin{aligned}\|E_1+E_2\| &= \sqrt{\|E_1\|^2+2\|E_1\|\|E_2\|\cosh\beta+\|E_2\|^2}\\ &\geq \sqrt{\|E_1\|^2+2\|E_1\|\|E_2\|+\|E_2\|^2}\\ &= \|E_1\|+\|E_2\|.\end{aligned}$$

証明終

ピタゴラスの定理

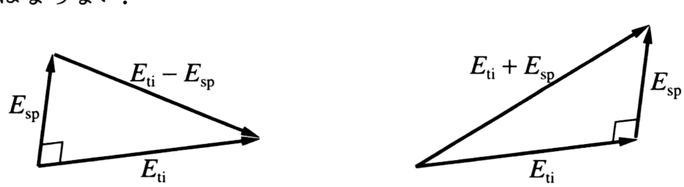
ベクトルの直交

時間的ベクトルと空間的ベクトルのなす双曲角，というのはどうやってもうまく定義できない．実際，どんな双曲回転も時間的ベクトルを空間的ベクトルには写さないので，その双曲角も考えられない．しかし，ユークリッド幾何の場合に対応して，2 つのベクトル E_1, E_2 が $E_1\cdot E_2=0$ を満たすとき，**垂直である**(perpendicular)，または**直交する**(orthogonal)ということはできる．このとき，$E_1\perp E_2$ と書く．光的ベクトルは他のすべての光的ベクトルと直交する．時間的ベクトルが直交するベクトルは空間的ベクトルだけである．時間と空間を測るのに同じ単位を使っているので(したがって光円錐の傾きは ±1 なので)，ミンコフスキ幾何で直交する 2 つのベクトルが光円錐となすユークリッド的角は等しい．ユークリッド幾何では，垂直な 2 直線の傾きは m と $-1/m$ だが，ミンコフスキ幾何では，m と $+1/m$ となる．



直角 3 角形

時間的ベクトル $E_{\rm ti}$ と空間的ベクトル $E_{\rm sp}$ が直交している$(E_{\rm ti}\perp E_{\rm sp})$としよう．直角 3 角形で，これらのベクトルが直角をはさむ 2 辺となっているものは 2 種類考えることができる．1 つの場合の斜辺は $E_{\rm ti}+E_{\rm sp}$ であり，もう 1 つの場合の斜辺は $E_{\rm ti}-E_{\rm sp}$ である．斜辺は時間的，空間的，光的のどれでもありうるが，2 つの直角 3 角形について，どちらも同じ種類の時空ベクトルでなくてはならない．



命題 2.7 時間的ベクトル $E_{\rm ti}$ と空間的ベクトル $E_{\rm sp}$ が $E_{\rm ti}\perp E_{\rm sp}$ を満たすとき，2 つのベクトル $E_{\rm ti}\pm E_{\rm sp}$ は，同じ種類の時空ベクトルである．

証明： ベクトル $E_{\rm ti}$ は時間的なので，適当な双曲回転 H_u をとると $H_u(E_{\rm ti})$ が R の時間軸上にあるようにできる．すなわち，ある $a\neq0$ に対して $H_u(E_{\rm ti})=(a,0)$ である．双曲回転 H_u はミンコフスキ内積を保つので，$H_u(E_{\rm ti})\cdot H_u(E_{\rm sp})=0$ であり，したがって，ある b を用いて $H_u(E_{\rm sp})=(0,b)$ となる．したがって，

$$H_u(E_{\rm ti}\pm E_{\rm sp})=H_u(E_{\rm ti})\pm H_u(E_{\rm sp})=\begin{pmatrix}a\\ \pm b\end{pmatrix}$$

となり,

$$Q(E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}) = Q(H_u(E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp})) = a^2 - b^2$$

である．したがって，2 つのベクトル $E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}$ は，同じ種類の時空ベクトルである．

定理 2.9 (ピタゴラスの定理(The Pythagorean theorem)) 時間的ベクトル $E_{\rm ti}$ と空間的ベクトル $E_{\rm sp}$ が $E_{\rm ti} \perp E_{\rm sp}$ を満たすとき，

$$\pm\|E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}\|^2 = \|E_{\rm ti}\|^2 - \|E_{\rm sp}\|^2$$

が成り立つ．ただし，左辺の符号は，ベクトル $E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}$ が空間的なとき負，それ以外のとき正をとる．

証明： ベクトル E に対して $E \cdot E = \pm\|E\|^2$ が成立する．右辺の符号は，E が空間的な場合に限って負となる．したがって，

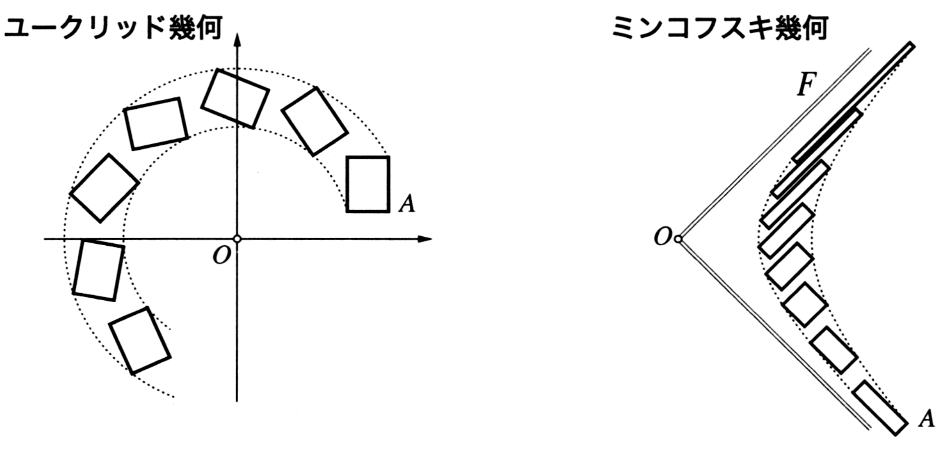
$$\begin{aligned}\pm\|E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}\|^2 &= (E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}) \cdot (E_{\rm ti} \pm E_{\rm sp}) \\ &= (E_{\rm ti} \cdot E_{\rm ti}) \pm 2(E_{\rm ti} \cdot E_{\rm sp}) + (E_{\rm sp} \cdot E_{\rm sp}) \\ &= \|E_{\rm ti}\|^2 - \|E_{\rm sp}\|^2.\end{aligned}$$

証明終

合同

合同変換

ユークリッド幾何では，回転は**合同変換**[注7]の 1 つである．平面に原点のまわりの回転を行ったとき，回転後の図形はもとの図形と合同(congruent)である．ミンコフスキ幾何でもこのことが成立するように，合同の概念を定義しよう．未来集合 $\mathcal{F}$ に含まれる図形の，双曲回転による像はもとの図形と合同である，とする．このとき，私達のユークリッド的な目からは明らかではないが，右側の図に描かれた長方形はみな互いに合同になる．つまり，ミンコフスキ幾何においては，これらはみな“同じ”長方形である．



注7 訳注：原文では rigid motion であり直訳すると剛体運動である．合同変換は単に motion である．

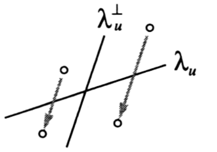
合同変換には，他にも2つの種類がある．鏡映(reflection)と並進(translation)である．ユークリッド平面においては，すべての鏡映は，ある回転と，x 軸に関する鏡映との合成に等しい． **鏡映**

命題 2.8 写像 $F_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が x 軸と角 θ をなす直線に関する鏡映であるとき，$F_\theta = R_{2\theta}F_0$ と書ける．

命題 2.9 鏡映 F_θ はユークリッド内積を保つ．すなわち，$F_\theta^t I F_\theta = I$. 逆に，行列 M がユークリッド内積を保つなら，M の表す写像は回転または鏡映である．

これらの証明は練習問題8になっている．ミンコフスキ幾何においては，鏡映はどのようなものと定義すべきだろうか．ユークリッド平面の鏡映 F_θ は，x 軸と角 θ をなす直線上の点を動かさず，それと直交する直線は，向きを逆にして自分自身に写す．ミンコフスキ平面においても，直交という概念があるので，これを用いて双曲鏡映を定義できる．

定義 2.6 λ_u を，原点を通り t 軸と u 双曲ラジアンをなす直線とする．$\lambda_u^\perp$ を λ_u と直交する直線とする．**直線 λ_u に関する双曲鏡映**(hyperbolic reflection across λ_u)とは，$\lambda_u^\perp$ を向きを逆にして自分自身に写し($\lambda_u^\perp$ 上にある任意のベクトル X に対し $K_u(X) = -X$ となり)，λ_u 上のベクトルを動かさないような線型写像 K_u のことをいう．



この定義は，固有値と固有ベクトルの言葉を使って言い換えることができる．写像 K_u は，(単位)固有ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sinh u \\ \cosh u \end{pmatrix}$$

で，対応する固有値が $+1$ と -1 であるような線型写像である．したがって，$\det K_u = +1 \cdot -1 = -1$ である．ユークリッド鏡映の場合との対応を考えると，次の定理が成立することが予想される．

定理 2.10 $K_u = H_{2u}K_0$.

証明：行列

$$M = H_{2u}K_0 = \begin{pmatrix} \cosh 2u & \sinh 2u \\ \sinh 2u & \cosh 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh 2u & -\sinh 2u \\ \sinh 2u & -\cosh 2u \end{pmatrix}$$

を考えよう．M が K_u と同じ固有ベクトルと固有値を持つことを示すことによって，関係 $M = K_u$ を証明しよう．双曲正弦関数，双曲余弦関数の加法定理から，

$$M \begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh 2u \cosh u - \sinh 2u \sinh u \\ \sinh 2u \cosh u - \cosh 2u \sinh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(2u-u) \\ \sinh(2u-u) \end{pmatrix}$$

である．よって，

$$M \begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix} = +1 \cdot \begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix}.$$

同様に，

$$M\begin{pmatrix}\sinh u\\ \cosh u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh 2u\sinh u-\sinh 2u\cosh u\\ \sinh 2u\sinh u-\cosh 2u\cosh u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sinh u\\ -\cosh u\end{pmatrix}$$

である．すなわち，

$$M\begin{pmatrix}\sinh u\\ \cosh u\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}\sinh u\\ \cosh u\end{pmatrix}.$$

証明終

系 2.9 双曲鏡映 K_u はミンコフスキ内積を保つ．すなわち，$K_u^t J_{1,1} K_u = J_{1,1}$ である．逆に，行列 M がミンコフスキ内積を保ち，かつ $\mathcal{F}$ を自分自身に写すならば，M は双曲回転または双曲鏡映を表す．

証明：前半の主張は，K_u が，ミンコフスキノルムを保つ行列の積で表せることによる．後半の主張を示すために，

$$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

とおく．M が $\mathcal{F}$ を自分自身に写すことから，ベクトル

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}$$

は $\mathcal{F}$ に含まれていなければならない．特に $a>0$ でなければならない．また，条件 $M^t J_{1,1} M = J_{1,1}$ から，

$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-c^2 & ab-cd\\ ab-cd & b^2-d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

が導かれる．条件 $a^2-c^2=1$ と $b^2-d^2=-1$ は，M の 2 つの列ベクトルが，時間的，および空間的単位双曲線上にあることを言っており，したがって，それらは

$$C_1=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh u\\ \sinh u\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\sinh v\\ \cosh v\end{pmatrix}$$

のように双曲角 u, v を用いて助変数表示できる．ここで，$a>0$ なので，C_1 の符号の選び方は一通りに定まるのに対し，一方，C_2 の符号は正負どちらにもとれることに注意しよう．

最後に，条件 $ab-cd=0$ から，$C_1\perp C_2$ が導かれ，これは

$$\cosh u\sinh v-\sinh u\cosh v=\sinh(v-u)=0,$$

すなわち，$v-u=\sinh^{-1}(0)=0$ を意味する．したがって M は，

$$\begin{pmatrix}\cosh u & \sinh u\\ \sinh u & \cosh u\end{pmatrix}=H_u \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix}\cosh u & -\sinh u\\ \sinh u & -\cosh u\end{pmatrix}=K_{u/2} \tag{2.1}$$

のいずれかである．

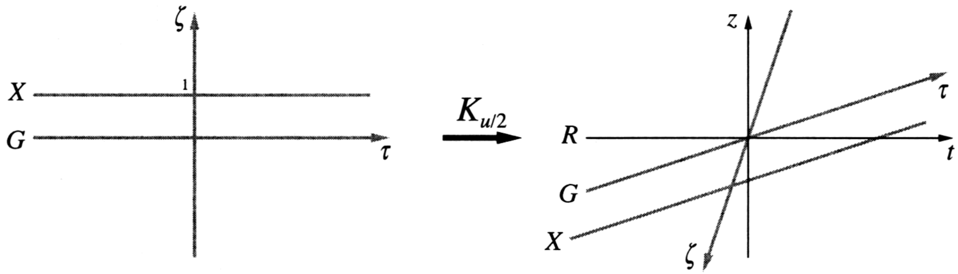
証明終

ミンコフスキ幾何を完結させるには，明らかに，双曲鏡映を考えることが必要である．しかし，時空の物理学においては，双曲鏡映はどのような役目を果たすのだろうか．その答えは，1.2 節で一番最初に仮定し，そのままここまで仮定し続けてきた事実と関係している．そこでは，2 人のガリレイ的観測者の空間軸の向きが同じ，G の ζ 軸の正の向きは R の z 軸の正の向きと同じと仮定したのだった．この仮定により計算は簡単になったが，これは本質的な仮定ではない．もし，G と R の空間軸が逆むきであることをここで許すことにすれば，G の時空を R の時空に写すのに双曲鏡映が必要になる．

双曲鏡映が物理で必要とされる場面

このことを確かめよう．X を，$\zeta = +1$ で G に対して静止している物体とする．すると物体 X の世界線は，G から見ても R から見ても τ 軸と平行になる．しかし，R は X の世界線を τ 軸の**下側**に描くはずである．R から見た τ 軸の傾きを $v = \tanh u$ とすると，G の時空を R に写すのには，まず G を鏡映 K_0 で写し，次に双曲回転 H_u を行う．結果は双曲鏡映 $H_u K_0 = K_{u/2}$ である．

空間軸の向きを逆にする



観測者の空間軸の向きが同じだと仮定したことで，私達は不注意にもある種のローレンツ変換を見逃していたのである．今後は，観測者に，空間軸の向きを自由に決めることを許すことにすると，許されるローレンツ変換に双曲鏡映をつけ加えなければならない．もちろん，時間のほうはすべての観測者にとって同じ方向に流れているということは引き続き仮定する．つまり，ローレンツ変換が未来集合 $\mathcal{F}$ を保つことは仮定する．

ローレンツ群を拡大する

定義 2.7 順時ローレンツ群 $\mathcal{L}$(orthochronous Lorentz group)は，線型写像 $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ で，ミンコフスキ内積と未来集合 $\mathcal{F}$ を保つものすべてからなる集合である．群の演算は，写像の合成，言い換えると行列の乗法である．

形容詞 orthochronous の大体の意味は，“時間を正しく扱う” ということであるここでは，正の時間軸の像が $\mathcal{F}$ の中にあることを意味している．ここでは，この性質を持たないような写像を考える必要性はまったくないので，通常はこの形容詞を省略して，$\mathcal{L}$ を単にローレンツ群と呼ぶことにする．

上の定義には，$\mathcal{L}$ が群をなすという主張が含まれている．これは，2 つのローレンツ写像の合成がまたローレンツ写像であるということを意味する．2 つの回転の合成がまた回転であることはすでに確かめた．2 つの鏡映の合成がやはり**回転**であること，鏡映と回転の合成が鏡映であることは，練習問題 10 の中で証明する．実際，多数の回転と鏡映をどのように合成したものも，ただ 1 つのローレンツ写像と見なすことができる．最初に偶数個の鏡映が含まれていれば，結果は 1 つの回転になる．それ以外の場合には，1 つの鏡映

$\mathcal{L}$ の乗法

になる．これを示す 1 つの方法は，合成される写像の順序を適当に変更して鏡映を片側に集めることである．$\mathcal{L}$ の演算の順序交換の規則は次の可換図式に示されている．ここでは写像に主な関心があるので，定義域と値域は省略して点で表した．

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{H_{-u}} & \cdot \\ K_v\big\downarrow & & \big\downarrow K_v \\ \cdot & \xrightarrow[H_u]{} & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{K_{2v-u}} & \cdot \\ K_v\big\downarrow & & \big\downarrow K_v \\ \cdot & \xrightarrow[K_u]{} & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{K_{v-u}} & \cdot \\ H_u\big\downarrow & & \big\downarrow H_u \\ \cdot & \xrightarrow[K_v]{} & \cdot \end{array}$$

例えば最初の図式は $H_uK_v = K_vH_{-u}$ を意味している．これは，

$$K_v^{-1}H_uK_v = K_vH_uK_v = H_{-u}$$

とも書くことができる．特に $v = 0$ ととれば，$H_{-u} = K_0H_uK_0$ となり，2.1 節の可換図式に現れる $B_{-v} = FB_vF$ と同一の式が得られる．

2 番目の図式の主張を証明してみよう．これは，$K_{2v-u} = K_vK_uK_v$ と書ける．$K_p = H_{2p}K_0$ であるので，

$$K_vK_uK_v = H_{2v}\underbrace{K_0H_{2u}K_0}_{H_{-2u}}H_{2v}K_0 = H_{2v}H_{-2u}H_{2v}K_0 = H_{2(2v-u)}K_0 = K_{2v-u}.$$

上で示したもの以外の図式の導出は練習問題 9 で行う．

並進

最後に検討する合同変換は並進である．並進は，ある定数ベクトル C により，$T(X) = X + C$ と表せる．これは，ミンコフスキ幾何でもユークリッド幾何でも，原点を移動するという同じ意味を持つ．

定義 2.8 ミンコフスキ平面の**合同変換**は，非同次のローレンツ写像である．すなわち，$\mathcal{L}$ の元であるローレンツ写像 L と，並進との合成 $M(E) = LE+C$ である．

定義 2.9 A, B をミンコフスキ平面の 2 つの図形とする．A を B の上に写す，すなわち，$M(A) = B$ となるような合同変換 M があるとき，A は B に**合同である** (is congruent to) といい，$A \sim B$ と表す．

命題 2.10 任意の合同変換 M は，2 つの事象 E_1, E_2 の間の間隔を保つ．

証明： $Q(M(E_2) - M(E_1)) = Q(E_2 - E_1)$ を示せばよい．いま，

$$M(E_2) - M(E_1) = LE_2 + C - (LE_2 + C) = L(E_2 - E_1)$$

であり，であり，また L はミンコフスキ内積を保つので，

$$\begin{aligned} Q(M(E_2) - M(E_1)) &= Q(L(E_2 - E_1)) = L(E_2 - E_1) \cdot L(E_2 - E_1) \\ &= (E_2 - E_1) \cdot (E_2 - E_1) = Q(E_2 - E_1). \end{aligned}$$

証明終

命題 2.11 合同な図形は，符号を除いて等しい (ユークリッド的) 面積を持つ．

証明： $A \sim B$ であり $M(A) = L(A) + C = B$ であると仮定しよう．並進は面積を保存するので，$\mathrm{area}(B) = \mathrm{area}(L(A)+C) = \mathrm{area}(L(A))$ となる．したがって，

$$\mathrm{area}(B) = \mathrm{area}(L(A)) = \det(L) \cdot \mathrm{area}(A) = \pm 1 \cdot \mathrm{area}(A)$$

となり結論が得られる． **証明終**

練習問題

以下の練習問題では，写像 $R_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は行列

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表される線型写像とする．

1. R_θ が平面 $\mathbf{R}^2$ を θ ラジアンだけ回転することを示せ．（ヒント: 線型写像は基底への作用で完全に決定されるので，基底ベクトル $(1,0)$, $(0,1)$ が θ ラジアン回転されることを示せば十分である.）
2. 練習問題 1 から，R_θ の逆写像が $R_{-\theta}$ であることが直ちに導ける．なぜか．また，$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ を直接の計算によっても示せ．
3. 練習問題 1 から，$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$ であることも導ける．なぜか．また，正弦関数，余弦関数の加法定理を使った直接の計算で別証明を与えよ．この結果は，回転行列の集合 $O_+(2,\mathbf{R})$ が**群**(group)をなしていることを示している．
4. 双曲回転 H_u が，集合 $\mathcal{T}_-$, $\mathcal{L}_+$, および $\mathcal{L}_-$ をそれぞれ保つことを示せ．
5. 未来ベクトル E_1, E_2 が $\angle E_1E_2 = \beta$ を満たすとする．このとき，$E_1 \cdot E_2 = \|E_1\|\|E_2\| \cosh\beta$ であり，また $\cosh\beta \geq 1$ なので，$E_1 \cdot E_2 \geq \|E_1\|\|E_2\|$ である．これは，**反対向きのコーシー-シュワルツ不等式**(reverse Cauchy–Schwarz inequality)である．これを，$(1+1)$ 次元時空の内積とノルムの定義だけを使って直接証明せよ．
6. (a) x 軸の正の部分と角 θ をなす直線に関する鏡映 $F_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える．この線型写像が，次の固有値と固有ベクトルを持つことを説明せよ．

$$\lambda_1 = +1,\ X_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1,\ X_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   (b) 線型写像 $R_{2\theta}F_0$ が，上の鏡映と同じ固有値と固有ベクトルを持つことを示し，$F_\theta = R_{2\theta}F_0$ を導け．鏡映 F_θ を表す行列を求めよ．

   (c) $F_\theta^t I F_\theta = F_\theta^t F_\theta = I$ を確かめよ．
7. 2 つの鏡映の合成は回転であること，具体的には，$F_\alpha F_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$，を示せ．
8. この問の目的は，行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

がユークリッド内積を保つならば，すなわち，$M^tM = I$ が成り立つならば，M は回転または鏡映であることを示すことである．

(a) 条件 $M^tM = I$ から，M の列ベクトルが単位円上にあり，互いに直交することを示せ．

(b) ある θ が存在して，

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ．なぜ，これが M が回転または鏡映であることを意味するのか説明せよ．注: ユークリッド内積を保つ 2×2 行列 M 全体の集合を**直交群**(orthogonal group) $O(2, \mathbf{R})$ という．この問では，すべての**直交**行列は回転または鏡映であることを示したことになる．

9. 写像 H_u を双曲角 u の双曲回転，K_v を直線 λ_v に関する双曲鏡映とする．ただし，λ_v は t 軸の正の方向と v 双曲ラジアンの角をなす直線．次の関係を示せ．

$$H_{-u} = K_0 H_u K_0, \qquad H_{-u} = K_v H_u K_v, \qquad K_{v-u} = H_{-u} K_v H_u.$$

10. (a) 任意の 2 つの双曲鏡映の合成は双曲回転であることを示せ．これを $K_{v_1} K_{v_2} = H_u$ とかいたとき，u を v_1 と v_2 で表せ．

(b) 双曲回転と双曲鏡映の合成は，また双曲鏡映であることを示せ．これを $H_{u_1} K_{u_2} = K_v$ とかいたとき，v を u_1 と u_2 で表せ．

11. 非順時ローレンツ写像 M の例を作ってみよ．つまり，ミンコフスキ内積は保つが未来集合 $\mathcal{F}$ は保たないような線型写像 M を見つけてみよ．

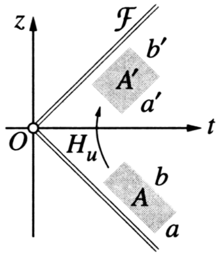
12. (a) 助変数表示された曲線 $P_u = (\cosh u, \sinh u)$ と，3 つの線分 $\{P_{-3/2}, P_{3/2}\}$, $\{P_{-1}, P_1\}$, $\{P_{-1/2}, P_{1/2}\}$ を考える．（ここで，線分は端点の組で指定した.） これらの線分が互いに平行であり，また，曲線の P_0 における接線とも平行であることを説明せよ．

(b) 今度は，3 つの線分 $\{P_{-1}, P_2\}$, $\{P_{-1/2}, P_{3/2}\}$, $\{P_0, P_1\}$ を考える．（ここで，線分は端点の組で指定した.） これらの線分もやはり互いに平行であり，また，曲線の $P_{1/2}$ における接線とも平行であることを示せ．（ヒント: 双曲回転 $H_{1/2}$ を考える.）

13. (a) 下の図に示されているように，A を $\mathcal{F}$ に含まれる長方形で，2 組の辺が，それぞれ，直線 $z = \pm t$ に平行でユークリッド的長さが a,b であるようなものとする．写像 $H_u : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を双曲角 u の双曲回転とする．図形 $A' = H_u(A)$ が，再び 2 組の辺が直線 $z = \pm t$ に平行な長方形であり，その辺のユークリッド的な長さが

$$a' = e^u a, \qquad b' = e^{-u} b$$

であることを示せ．



(b) 未来 $\mathcal{F}$ に含まれる半径 r のユークリッド的円 S の，双曲回転 H_u による像がどのようなものか述べよ．その過程で，次の練習問題 14 の結果が必要になるだろう．楕円 $H_u(S)$ を指定するのには，長軸，短軸の方向と長さを求めればよい．

14. 一般に，正則な線型写像 $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ による円の像は楕円であることを示せ．さらに，行列 L が対称なとき，像の楕円の長軸，短軸の方向は，行列 L の固有ベクトルの方向に一致することを示せ．行列の固有値が $\lambda_1\le\lambda_2$ で，もとの円の半径が r であるとき，像の楕円の長半径，短半径はそれぞれ，$\lambda_2 r$, $\lambda_1 r$ となる．

2.4 物理的帰結

長さと時間

長さの目盛を時間で決める

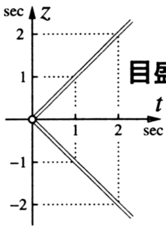
一見したところでは，長さ，時間，質量は独立な量である．しかし，ひとたびすべてのガリレイ的観測者が，長さと時間の単一の比—ここでは光の速度 c なわけだが—が物理定数であることに同意すれば，この比が一方の単位をもう一方の単位に結びつける．したがって，アインシュタインの相対論から出てくる帰結の 1 つは長さと時間はもはや無関係ではないということである．例えば，時間をメートルで表すことができる．しかし，私達は時間のほうを基本的なものと考え，長さを秒で表すことにする．これは，時間が，観測者の世界線に沿って測るのに自然な単位だからである．観測者にとっては，自分の世界線上の事象は**時間**だけが異なっており，**場所**は同じである．

私達は，c を好きな値にとることができる．しかし，実用的な選択は，$c=1$ である．3 元組立単位系では

$$c=2.9979246\times10^8\ \frac{\text{メートル}}{\text{秒}}$$

だから，この目盛あわせにより，2.9979246×10^8 メートルが 1 秒に等しく，1 メートルが 3.3356409×10^{-9} 秒に等しいことになる．グラフの言葉で言うと，私達は光円錐が傾き ±1 であると宣言し，これを使って時間軸につけら

れている単位をすべての空間軸に写したのだ.



目盛あわせのための格子

“幾何化された” 単位

他の物理定数にも同じアイデアを適用することで，他の単位も “幾何化”(geometrize)することができる．例えば，ニュートンの万有引力の法則(Newton's law of universal gravitation)に現れる重力定数 G は，3 元組立単位系で，値

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

をとる．したがって，$G = 1$ とおくことによって，質量を時間で測ることができる．

$$1\ \mathrm{kg} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{(3.3356409 \times 10^{-9}\ \mathrm{s})^3}{1\ \mathrm{s}^2} = 2.48 \times 10^{-36}\ \mathrm{s}.$$

幾何単位系を使うと，速度は無次元になり，エネルギーと運動量はどちらも質量の 1 次の次元，したがって時間の 1 次の次元を持つ．加速度は，(時間)$^{-1}$ の次元を持つ．

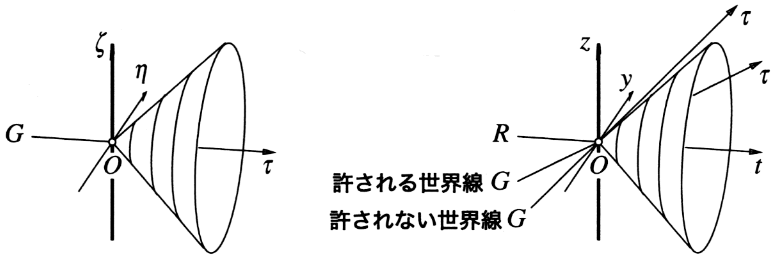
速度の上限

時間軸は光円錐の中になくてはならない

ガリレイ的観測者 G の，別のガリレイ的観測者 R に対する相対速度は，光速を越えてはならない.[注8]これは，これまでも頻繁に使ってきた仮定だ．例えば，ローレンツ変換の式の形を導くのにも使った．しかし，このことはまだ証明はしていない．実は，このことは光速の不変性から直ちに導ける．観測者 G の座標系では，時間軸(つまり，観測者の世界線)は，光円錐の回転軸でなくてはならない．特に，G の世界線は，光円錐の**内側**になくてはならない．そして，写像 $G \to R$ を施したときにも，R の光円錐の内側になければならない．しかし，G の R に対する相対速度 v が c より大きいと，G の世界線の傾きは光円錐の傾きより大きくなり，世界線は光円錐の外に出てしまう．

注 8 訳注：より正確には，ローレンツ変換では関係づけられる 2 人の観測者の相対速度は光速を越えない，と言ったほうがよいかもしれない．

これはあり得ない．

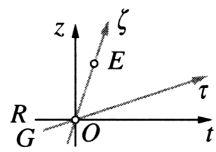


同時性

命題 2.12 任意の空間的事象 E に対して，E と O が同時になるような観測者がある．

証明：

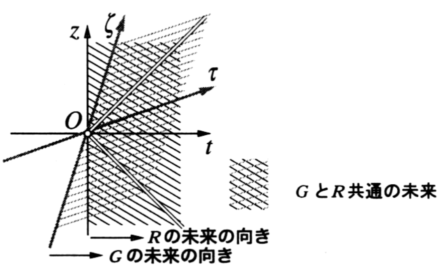
事象 E は空間的なので，R の座標系では，適当な実数 k で $E = (t, z) = (k \sinh u, k \cosh u)$ と書ける．観測者 G を，R に対して速度 $v = \tanh u$ を持つものとしよう．このとき，事象 E は G の ζ 軸上にあることが分かる．したがって，G から見ると E と O は同一の時刻 $\tau = 0$ に起きる．　**証明終**

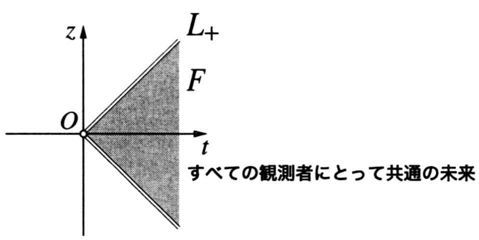


ガリレイ的観測者は，2 つの事象が同時に起きたかどうかについて必ずしも同意できるとは限らないので，相対性原理から，**同時性**(simultaneity)の概念は物理的に意味がないことになる．私達は，光速の不変性を得るかわりに同時性を失ったのだ．

客観的未来

O より後に起きた事象は，観測者 R の立場では，半平面 $t > 0$ に位置する．一方，観測者 G の立場では，半平面 $\tau > 0$ に位置する．これらは異なる集合であり，R と G は，未来とは時空のどの部分を指すかについて合意できない．しかし，この 2 つの集合の共通部分に属する事象が未来であることについては合意する．この共通部分を R と G の**共通の未来**(common future)と呼ぼう． **共通の未来**





第 3 の観測者が現れると，3 人の共通の未来は小さくなる．さらに，存在しうるすべてのガリレイ的観測者を考えると，**全員**の共通の未来は，$\mathcal{F}$ と未来 **すべての観測者に共通の未来**

光円錐 $\mathcal{L}_+$ の共通部分にまで小さくなってしまう．なぜなら，上で見たように，空間的事象 E は，ある観測者から見ると O と同時に起っているので，共通の未来には属せないからである．この，すべての観測者に共通の未来のことを，O の**客観的未来**(objective future)と呼ぶことにする．任意の事象 P について，原点を P に写すような並進を考えて，同様に P の **客観的未来**を定義する．同様に P の客観的過去も定義できる．

因果律

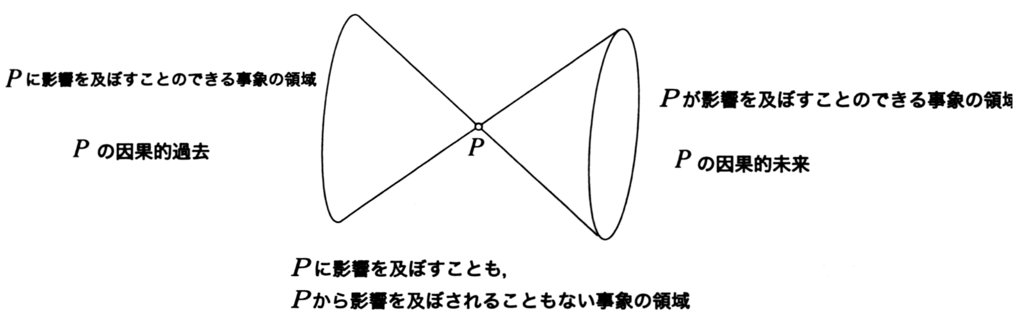
定義 2.10 事象 A の**因果的未来**(causal future)は，A が影響を及ぼすことのできるすべての事象からなる集合である．事象 A の**因果的過去**(causal past)とは，A に影響を及ぼすことのできるすべての事象からなる集合である．

因果律

結果の前に原因がある，という原理から出発しよう．事象 A が事象 B の原因である，または事象 A が事象 B に影響を及ぼすならば，A は B の前に起きていなければならない．この因果律が物理法則であるためには，A は**どのガリレイ的観測者から見ても** B より前に起きていなければならない．したがって，B は A の客観的未来になくてはならず，A の因果的未来は A の客観的未来と一致する．

3つの因果領域

同様に，A は B の客観的過去になくてはならない．したがって，1つの事象 P を指定すると，時空は3つの領域に分けられる．事象 P の因果的未来，因果的過去，そして P に影響されずまた影響を与えることもできない事象からなる領域である．この3番目の領域は，間隔 $Q-P$ が空間的である事象 Q からなる領域である．



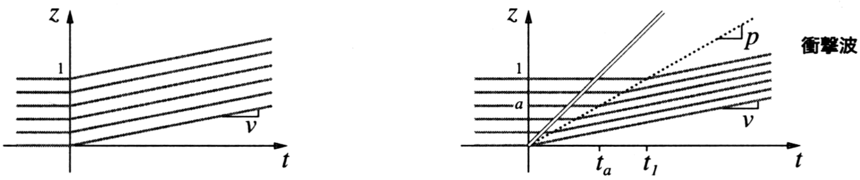
事象 P が影響を与えられるようなすべての事象は，P を通る適当な傾き v の世界線上にのっている．ただし，v は $|v| \leq 1$ を満たす．すなわち，因果は光よりは速く伝わらない．したがって，離れた点に瞬時に影響を及ぼすことはできない．

剛性

完全な剛体はない

時空の因果構造の1つの帰結は，どんな物体も完全な剛体ではありえないということである．このことを，具体的な例で見てみよう．観測者 R が，棒を z 軸に沿って $z=0$ から $z=1$ まで置いたとする．そして，棒の原点側の

端を，時刻 $t=0$ にハンマーでたたいて，棒に z 軸に正の向きの速度 v を与えたとしよう．下の 2 つの図には，棒に等間隔につけられた印の世界線が描かれている．左側の図は，棒が完全な剛体だった場合の様子である．印の間の空間的距離は一定だ．この運動では，たたかれたのと反対側の端は直ちに動き始めているが，因果律は，離れた点にこのように作用が直ちに伝わることを禁じている．



衝撃波が棒を伝わる

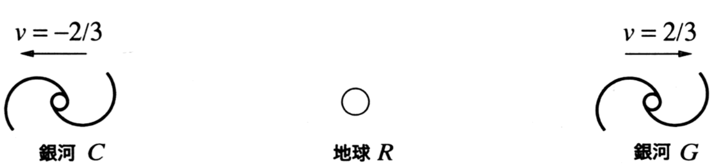
一方，右側の図は因果律を考慮にいれて描かれている．この図では，棒の $z=a$ の点は，$t=0$ には動き始めない．世界線は，少し後の時刻 $t=t_a$ まで水平なままである．考えられる最も簡単な仮定は，t_a は a に比例するとすることだろう．ここでは $t_a=ka$ あるいは $a=(1/k)t_a=pt_a$ とおこう．時空にひかれる直線 $z=pt$ は，運動を棒に伝えながら棒を速度 p で伝播する"衝撃波"と解釈できる．ここで，p は $|v|<|p|<1$ を満たす．衝撃波が時刻 $t=t_1$ に棒の反対側まで到達すると，棒全体が動き始める．

話はこれで終りではない．衝撃波の右側では，左側より，棒の各点の世界線が互いに近くなっていることに気づくだろう．衝撃波が棒を圧縮したのだ．もし棒に弾力があれば，反発してもとの長さに戻ろうとするだろう．その際にも，棒を伝わる衝撃波が生じる．これらの現象についてはこれ以上触れない．

速度の合成

銀河は光速より速く運動する？

遠くの銀河は，非常に大きな速度で地球から遠ざかっている．いちばん遠いものの速度はほとんど光速に近い．互いに天球の反対側に位置する，それぞれ光速の 2/3 で地球から遠ざかっている 2 つの銀河を考えよう．普通に考えると(ガリレイ変換の枠組みで考えると)，一方の銀河に住んでいる観測者には，もう一方の銀河が光速の 4/3 倍の速度で遠ざかっているように見えることになりそうだ．しかしこれはあり得ないことである．

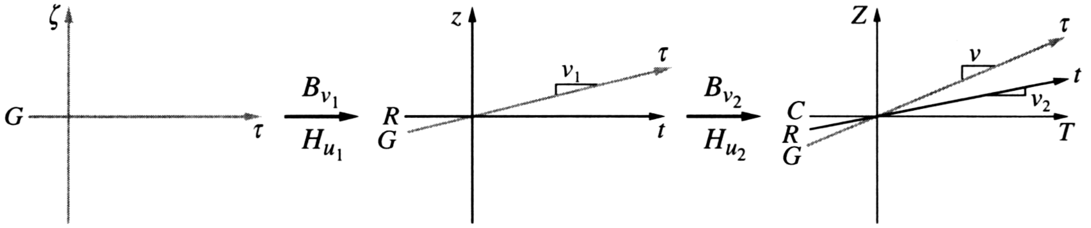


ブーストを合成する

もっと一般的な状況で考えてみよう．観測者 G が，R に対する相対速度 v_1 で運動しており，R は，第 3 の観測者 C に対して相対速度 v_2 で運動しているとする．このとき，1 つの座標系を，ブースト(すなわち，速度を使って表されるローレンツ変換)

$$B_{v_1}: G \to R, \qquad B_{v_2}: R \to C$$

でもう1つの座標系に写すことができる．ここで，知りたいのは，$B_v = B_{v_2}B_{v_1}$，すなわち G の座標系を C の座標系に直接写すブースト $B_v : G \to C$ に現れる速度 v である．



合成則

双曲回転の合成のほうが簡単なので，ブーストを双曲回転と見なす．その間の関係は，$v = \tanh u$（あるいは $u = \tanh^{-1} v$ でも同じこと）のとき $H_u = B_v$ である．$H_u = H_{u_2}H_{u_1}$ であるなら $u = u_1 + u_2$ なので，

$$v = \tanh u = \tanh(u_1 + u_2) = \frac{\tanh u_1 + \tanh u_2}{1 + \tanh u_1 \tanh u_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

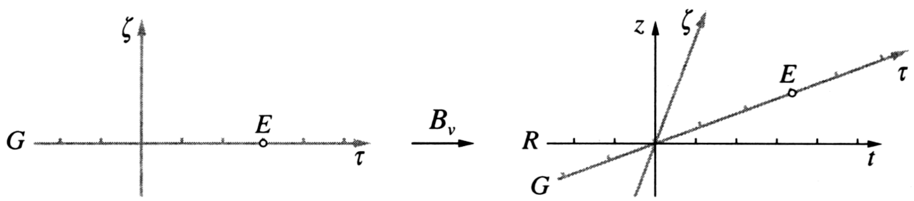
となる．

例えば，銀河の場合だと，$v_1 = v_2 = 2/3$ であり，一方の銀河はもう一方の銀河から，速度

$$v = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}} = \frac{12}{13} < 1$$

で離れていくように見える．任意の u に対して，$|v| = |\tanh u| < 1$ なので，ブーストをどのように組み合せても，一方の観測者の，もう一方の観測者に対する相対速度が光速を越えることはない．

動いている時計はゆっくり進む



固有時間

観測者 G が時計を持っていて，観測者 R に対して速度 v で運動しているとする．この時計は，R の座標系で，G の**固有時間**(proper time)τ を測る．（ここでも，proper は“それ自身の”を意味する．これは，固有値に対応する proper value と同じである．）観測者 R から見ると，G の固有時間はどうなるだろうか．

動いている時計の刻みを知るのにブーストを使う

事象 $E = (\Delta\tau, 0)$ が，G の世界線上で，時刻 $\Delta\tau$ に起きたとする．知りたいのは，R にとっての E が起きた時刻である．R の座標系での E の座標は，ブースト B_v を使って計算できる．

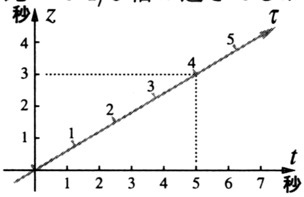
$$\begin{pmatrix}\Delta t\\ *\end{pmatrix}=B_v\begin{pmatrix}\Delta\tau\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1 & v\\ v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\tau\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta\tau/\sqrt{1-v^2}\\ *\end{pmatrix}.$$

ここで $*$ は，いまは関心のない量を表す．この結果から，$\Delta t=\Delta\tau/\sqrt{1-v^2}>\Delta\tau$，あるいは $\Delta\tau=\Delta t\sqrt{1-v^2}$ となる．つまり，R から見ると，G の時計は $\sqrt{1-v^2}$ 倍の速さで**ゆっくり進む**．

例えば，$v=1/2$ の場合は，この倍率は $\sqrt{1-0.25}=\sqrt{0.75}\approx 0.866$ である．したがって，R にとっては 1 時間が経過したときに，G の時計は，52 分弱しか進んでいない．もし $v=0.9$ なら，倍率は $\sqrt{1-0.81}=\sqrt{0.19}\approx 0.436$ になる．光速の 9/10 で運動する時計は，静止した時計に比べて，半分以下の速さでしか進まない．

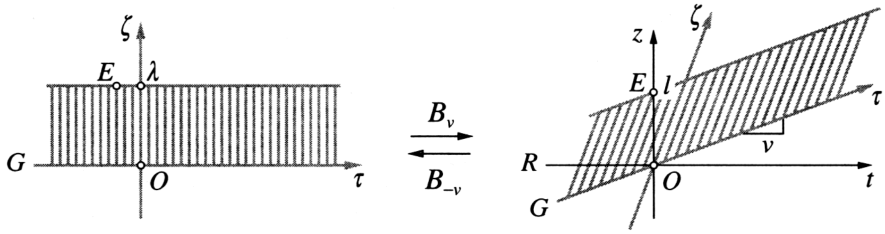
時間の伸びは目盛の調整

幾何的には，時間の伸びは，双曲回転によって異なる時間軸の間で目盛をあわせた結果であり，ミンコフスキノルムを保つことと関係している．ミンコフスキ–ピタゴラスの 3-5-4 の直角 3 角形が，非常に単純でかつ明快な例を与える．もし時計が速度 $v=3/5$ で運動していたら，それは静止した時計に比べて 4/5 倍の速さでしか進まない．



動いている定規は縮む

観測者 G が，長さ λ 秒の定規を持っているとしよう．話をはっきりさせるため，定規は ζ 軸に平行で，両端が $\zeta=0$ と $\zeta=\lambda$ であるように置かれているとする．観測者 G の時空では，定規の世界線は，幅 λ 秒の水平な帯である．



観測者 G と定規が，R に対して速さ v で，ζ 軸を，したがって z 軸上を運動しているとする．観測者 R の座標系では，定規の世界線は傾き v の帯になる．図の事象 E の z 座標が，観測者 R から見た定規の長さ l を与える．長さ l と λ の関係はどうなっているだろう？ この関係を見つけるのに，事象 E の G の座標系での ζ 座標を 2 つの異なる方法で計算して，等しいとおくことにする．一方の方法では，左の図から E の ζ 座標は明らかに λ である．もう一方の方法では，B_{-v} で D を R から G に逆に写すという計算を行う．すると，

事象 E の座標を 2 つの方法で求める

$$\begin{pmatrix}*\\ \lambda\end{pmatrix}=B_{-v}\begin{pmatrix}0\\ l\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1 & -v\\ -v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ l/\sqrt{1-v^2}\end{pmatrix}$$

となる．ここで，∗は，求める必要のない座標だということを表している．したがって，

$$l = \sqrt{1 - v^2}\,\lambda$$

を得る．すなわち，観測者 R からは，定規は $\sqrt{1-v^2}$ 倍に収縮したと観測される．

フィッツジェラルド収縮

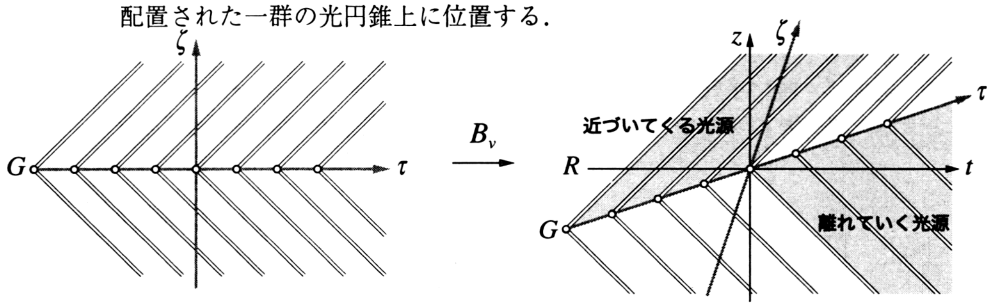
これがフィッツジェラルド収縮にほかならない．もちろん，こうなるしかなかったのだ．なぜなら，これが実験と矛盾しない唯一の可能性だからだ．しかし，ここでは，フィッツジェラルド収縮は，すべてのガリレイ的観測者に対する光速の不変性というアインシュタインの単純な仮定から論理的に導かれた．

ドップラー効果

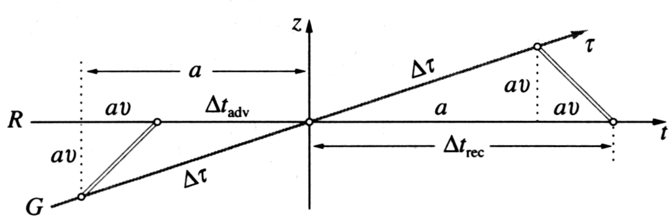
動いている光源からの光の周波数は変化する

光源が運動しているかどうかによって，光の速度は変化しないが，光の周波数は変化する．それがドップラー効果だ．光源が観測者に近づいているなら，周波数は大きくなり，可視光なら紫の側に偏移する．光源が観測者から遠ざかっているなら，周波数は小さくなる．可視光なら赤の側に偏移する．ドップラー効果は，非相対論的力学で理解できるが，偏移の大きさは，特殊相対論で初めて正しく計算できる．

変位の大きさを計算するのに，次の状況を考えよう．観測者 G は常に周波数 ν（これはギリシャ文字ニューである）の光を発している．これを，$1/\nu$ 秒に1回，ピークとなる（変位が正の最大値をとる）振動と考えよう．観測者 G の時空では，これらのピークは，τ 軸上で測ると $\Delta\tau = 1/\nu$ 秒ずつの間隔で配置された一群の光円錐上に位置する．



観測者 G が速度 v でもう一人の観測者 R を通りすぎるとき，光源は，最初は R に近づき，次に離れていく．隣り合う光円錐の間の，t 軸上で測った間隔 Δt が，R の観測する光の周波数 n を $n = 1/\Delta t$ によって決める．図からは，接近するときの周波数 n_{adv} は ν より大きく，離れていく時の周波数 n_{rec} は ν より小さいようである．これらの値を正確に求めるために，R の原点付近の様子を計算してみよう．



原点のどちら側でも，$\Delta\tau^2 = a^2 - a^2v^2$ であり，$a = \Delta\tau/\sqrt{1-v^2}$ となる．接近する側では，ピークの間の時間方向の間隔は，

$$\Delta t_{\text{adv}} = a - av = \Delta\tau\frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{したがって} \quad n_{\text{adv}} = \frac{1}{\Delta t_{\text{adv}}} = \nu\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} > \nu$$

となり，一方，離れていく側では，

$$\Delta t_{\text{rec}} = a + av = \Delta\tau\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{したがって} \quad n_{\text{rec}} = \frac{1}{\Delta t_{\text{rec}}} = \nu\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} < \nu$$

となる．この計算は，光源のほうが動いている，R の座標系で行った．観測者のほうが動いている G の座標系でも同じ結果になることを，演習問題で見ることになる．つまり，ドップラー効果は，光源と観測者のどちらが動いていると考えるかは関係なく，相対運動だけで決まる．

ただ 1 つの公式

この 2 つの式は，1 つにまとめてしまって，n_{adv} と n_{rec} との区別をなくしてしまうこともできる．それには，v を，光源と観測者の相対座標 z の時間的変化率でなく，**距離**の時間的変化率に取り直せばよい．すると，光源と観測者が離れていくときに v は正となり，離れていくときには負となる．観測者 R にとっての周波数は，

$$n = \nu\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

とまとめられる．

非相対論近似

多くの場合と同様，この場合も，非相対論的な結果は，相対論で速度が小さいとした場合の近似になっている．テイラーの定理を用いると，$|v| \ll 1$ のときには，

$$\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \approx 1 - v$$

となり，近似式 $n \approx \nu(1-v)$ を得る．非相対論的力学では，これが**厳密**な式である．相対論と非相対論の場合の違いが最も鮮明になるのは $v = -1 = -c$ のとき，すなわち，光源と観測者が光速で近づいている場合である．このとき，非相対論的には，周波数は 2 倍になるが，相対論では，周波数は無限大になる．

練習問題

1. 2 つの銀河 C と G が，それぞれ，地球から速度 $-v$ と v で遠ざかっているとする．つまり，これら 2 つの銀河は，同じ速さで反対の方向に運動している．このとき G は，C から見て速度

$$f(v) = \frac{2v}{1+v^2}$$

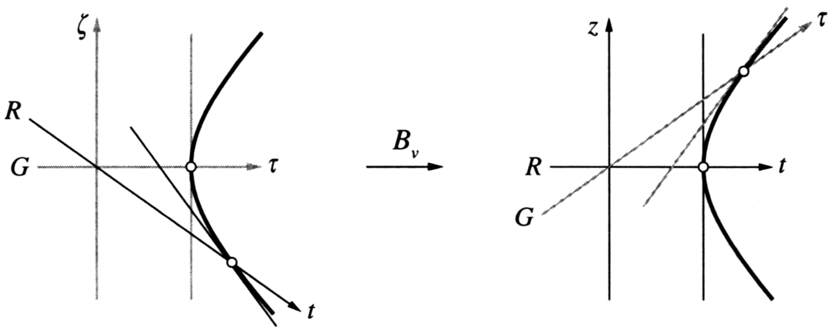
で遠ざかっている．

(a) 範囲 $0 \le v \le 1$ で $f(v)$ のグラフを描け．速さ v が小さいとき $f(v) \approx 2v$ であること，一方，$v \approx 1$ であるとき $f(v) \approx 1$ であることを示せ．

(b) C 上にいる観測者が，G は光速の半分の速度で C から遠ざかっていると考えるとき，C と G が地球から遠ざかる速さはどれだけか．

2. 光速の 99% の速さで運動する素粒子を考えよう．実験室に固定された座標系で，この素粒子の寿命が 10^{-10} 秒であるとする．すなわち，10^{-10} 秒でこの素粒子は崩壊して別の粒子になる．[注9] この素粒子に固定された座標系では，この素粒子の寿命はどれだけになるか．

3. (a) G が R に対して速度 v で運動しているとき，R には，G の時計が倍率 $\sqrt{1-v^2}$ でゆっくり進んでいるように見える．一方，R は G に対して速度 $-v$ で運動しているのだから，G の立場からは，R の時計がやはり倍率 $\sqrt{1-(-v)^2} = \sqrt{1-v^2}$ でゆっくり進んでいるように見える．このパラドックスの謎を解け．すなわち，2 人の観測者に対称な見方で説明せよ．下の図式を使って，このパラドックスを‘立証’し，また反証せよ．



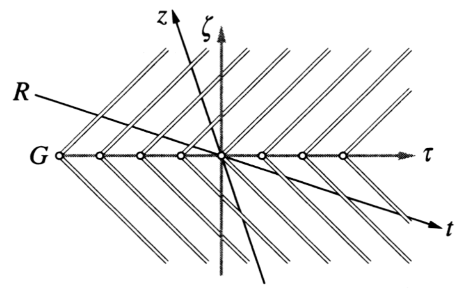
(b) フィツジェラルド収縮にも，よく似たパラドックスがある．G が R に対して速度 v で運動しているとき，R には，G の長さが倍率 $\sqrt{1-v^2}$ で速度方向に収縮しているように見える．一方，G の立場からは，R の長さがこの倍率で収縮しているように見える．このパラドックスを‘立証’する図式，反証する図式を描け．

4. 関数 $f(v) = \sqrt{\dfrac{1-v}{1+v}}$ の 1 次のテイラー多項式を求めよ．

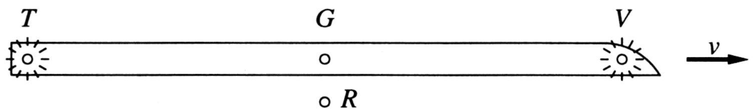
5. ガリレイ変換の引き起こす，非相対論的なドップラー効果が $n = \nu(1-v)$ で与えられることを示せ．ここで n は，振動数 ν の波源が観測者 R に対して速度 v で運動しているとき，R に観測される振動数である．

6. 下の図を使って，G の座標系で周波数 ν の光が発射されているときの，動いている観測者 R の感じるドップラー効果を計算せよ．光円錐の間の間隔は，G の世界線上で $\Delta\tau = 1/\nu$ 光秒である．

注9 訳注：正確には，崩壊するまでの時間はポアソン分布に従う確率変数である．寿命 10^{-10} 秒はその平均である．



7. 3 人の観測者 T, G, V が，高速の列車に乗っている観測者 T が後尾，G が中央，V が先頭にのっている．列車が静止した状態で測って，T と V は，それぞれ，G から a 光秒離れている．この列車は，線路脇に立っている 4 人目の観測者に対して，速度 v で走っている．ここで，すべての量は幾何単位系で測っている．
   G が R を通過する瞬間に，2 人は T と V からの瞬間的な発光を見た．



   (a) 観測者 T, G, V, R の世界線と，T と V から発する光の光円錐を，G の座標系と R の座標系で描け．
   (b) G の立場では，T と V の発光は同時か．それとも一方が先か．一方が先なら，G の立場ではどれだけ先か．
   (c) R の立場では，T と V の発光は同時か．それとも一方が先か．一方が先なら，R の立場ではどれだけ先か．
   (d) G の立場では，発光が起きたのはいつか．R の立場では，発光が起きたのはいつか．

第 2 章の内容をより深く知るには

この章で必要となる線型代数の知識はいろいろな教科書から得ることができるが，特に，バーコフ(Birkhoff)とマクレーン(Mac Lane)の古典的教科書 [3] は，ここでの応用に特に適した視点から書かれている．ローレンツ変換は，ローレンツによって論文 [19] で導入され，アインシュタインによって論文 [11] で特殊相対論の基礎とされた．ミンコフスキは，論文 [23] でアインシュタインのアイデアを幾何学的な言葉で再構成した．ミンコフスキ幾何の詳細で徹底した解説として Yaglom の著書 [30] がある．

第3章 特殊相対論—力学

力学(kinetics)とは，力の作用を受けている物体の運動を調べることである．力は物体を加速させる，すなわち，速度を変化させる．加速する物体の，時空の中の世界線は曲がる．このようにして，力という物理的情報は，時空の幾何学的情報と結びつけられる．出発点は，ニュートン(Newton)の運動の 3 法則である．

3.1 ニュートンの運動法則

17 世紀の科学における最大の問題の 1 つは，惑星と月の運動を理解することだった．ニュートンは，この問題を解き，著書**プリンピキア**(Principia)(Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687)の中に記した．[注1]この本は，ユークリッド幾何の教科書のような '定義-定理-証明' という演繹的なスタイルで書かれたもので，最初におかれた定義と公理から出発してすべての結論が導いている．その公理とは，次の運動の 3 法則である．

1. “すべての物体は，加えられた力によって状態を変えることを強制されないかぎりは，静止の状態，または，一直線上を一定の速度で運動する状態を取り続ける．”
2. “運動の変化は，変化の原因となる，物体に加えられた力に比例する．変化は，力と平行で同じ向きに起きる．”
3. “すべての作用には，向きが反対で大きさの等しい反作用がある．言い換えれば，2 つの物体が互いに及ぼす力は，大きさは等しく向きは逆である．”

第 1 法則は慣性を定義する

第 1 法則は実はガリレイによって発見されたものであり，慣性の法則と呼ばれる．この法則は，すべての物体が速度の変化に抵抗する能力，すなわち**慣性**(inertia)を持つことを主張する．この法則では，静止状態と等速直線運動が同じ地位を与えられていることに気づく．これはガリレイの相対性原理

[注1] 訳注：和訳については訳者のノート参照．

を認めれば当然のことである．

慣性質量

物体が慣性を持つならば，それをどれだけ持つかを問うことに意味がある．つまり，その物体の速度を変えるのにどれだけの努力を要するか，を問うのである．ここでは私達の直観が役に立つ．ドックの中に，小さなボートと長さ 30 フィートのクルーザーが隣り合って係留されて静止しているとしよう．これらを押してやると，どちらの船も動かすことができる．しかし，同じ押し方でもボートに対する効果のほうがずっと大きい．したがって，ボートほうが慣性が小さいわけだが，それはまさにボートの質量が小さいからである．物体の “慣性容量”(inertia content) はその物体の質量であり，この 2 つの概念の関連を強調して，**慣性質量**(inertial mass) とも呼ばれる．

運動量と第 2 法則

ニュートンは慣性質量の概念を第 2 法則で用いた．彼は，第 2 法則に現れる “運動”(“motion”) という量を，質量 m と速度 $\mathbf{v}$ ので定まるベクトルと定義した．これは，今日，私達が**運動量**(momentum) と呼んでいる量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ である．さらに，“運動の変化” という言葉は単位時間あたりの運動量の変化 $d\mathbf{p}/dt$ を意味すると考えられる．第 2 法則によれば，この変化率は加えられた力 $\mathbf{f}$ に比例する．この比例定数が 1 となるように単位系を選べば，第 2 法則は

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

という形になる．

質量が定数なら $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$

質量 m が定数なら，$d(m\mathbf{v})/dt = m\,d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{a}$ となり，第 2 法則はもう少し見慣れた形 $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ になる．しかし，私達は以下で，特殊相対論においては慣性容量 m が定数ではあり得ず，速度とともに増加するのを見ることになる．しかし，m は小さな速度に対しては本質的に定数と見なしてよいので，その場合には第 2 法則を $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ と書くのが便利である．

第 3 法則は全運動量が保存することを主張する

第 3 法則は，2 つの物体 G_1, G_2 に関するものである．この法則によれば，G_1 が G_2 に力 $\mathbf{f}_1$ を加えるなら，G_2 は G_1 に力 $\mathbf{f}_2$ を加え，$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$ が成立する．例えば，人がボートを押せば，ボートは人を同じ強さで押し返す．ここで，G_1 と G_2 を合せた系の全運動量 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ を考えよう．第 3 法則によれば，

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$$

となり，全運動量は時間が経過しても変化しない．**全運動量は保存する**．

2 つの困難

ニュートンの法則には前提条件が必要

ニュートンの法則が現実に反していると感じられることもある．例えば，地球の表面近くにある物体は，目に見えるような力を何も受けていないのに下向きに加速され，放っておけば落下する．もっと微妙な例はフーコー(Foucault) の振り子である．振り子は鉛直平面内を往復するが，その平面は一定ではなく時間とともにゆっくり回転していく．(すべての回転運動は加速度運動である.)

理論と現実の不一致を解消するには少なくとも 2 つの方法がある．まず，1

番目の方法は，説明不可能な加速のひとつひとつに，原因となる目に見えない力を仮定するというものである．この方法に従えば，物体は**重力**によって下向きに加速される，あるいは，**コリオリ(Coriolis)の力**が振り子の往復する平面を回転させる，などということができる．

2番目の方法は，加速が無くなるような座標系を選ぶことである．例として，北極点に置かれたフーコーの振り子を考えよう．遠方の恒星に対しては，回転しているのは地球であって振り子の運動の平面ではないことはすぐわかる．恒星が動かないように見える座標系では，振り子の運動の平面も動かず，コリオリ力も存在しない．

それでは，重力も，適当な座標系を選べば同じように消去できるだろうか．地球を周回する軌道にある宇宙船は無重力状態にあるように思える．船内では手を離しても物体は浮遊するだけである．静止していた物体は静止を続け，ある速度で運動していた物体は，壁やその他の障害物にぶつかるまでその速度で運動を続ける．慣性の法則は無条件に成立している．

慣性座標系

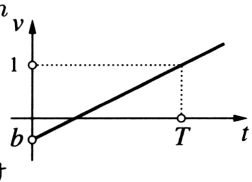
このように，ニュートンの法則が成立するかどうかは座標系に依存する．そこで，ニュートンの法則が成立する座標系を選びだし，**慣性座標系**(inertial frame)と呼ぶことにする．慣性座標系では物理が簡単になる．私達が最も慣れている座標系—地球上に固定された実験室の壁が定義する座標系—は慣性座標系ではない．

特殊相対論の適用は慣性座標系に限る

今後は，観測者の座標系は慣性座標系であると仮定することにする．実際，特殊相対論が特殊であるのは，考える座標系が慣性座標系に限定されているからである．観測者たちが互いに等速直線運動している限り，観測者の一人の座標系が慣性座標系だと仮定すれば十分である．ガリレイの相対性原理によって，すべての観測者は同じ物理法則に到達し，特に，ニュートンの法則も各自の座標系で成立するはずである．

慣性質量は定数ではあり得ない

もう1つの困難は，慣性質量が定数だという直観に関するものである．もし定数であるとすれば，一定の力で物体を押し続ければ，光速を越えて加速することができてしまう．具体的に，大きさが k, 向きが観測者 R の z 軸の正の向きの一定の力が物体 G に加えられているとしよう．G の z 軸方向の速度(スカラー)を v とする．もし G の慣性質量 m が一定であるなら，R はニュートンの第2法則を G に適用できるはずで，$k = m\,dv/dt$ すなわち $dv/dt = k/m$ となる．加速度 k/m は一定なので，速度は時間の1次関数



$$v(t) = \frac{k}{m}t + b$$

になる．時刻 T を $v(T) = 1$ で定義しよう．すると，力 k を T 秒間加え続けることで，G を光速を越えて加速できることになる．これは，特殊相対論における速度の上限に矛盾する(2.4 節)．

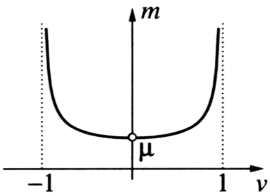
質量は速度とともに増加する

この問題はどのように解決できるだろうか．速度に上限があるためには，G の速度が大きくなればなるほど，速度をもっと大きくするのは困難にならなくてはならない．しかし，この困難さが G の慣性容量の大きさそのものなので，結局，G の慣性質量は速度の関数 $m = m(v)$ となって，速度とともに増加しなければならない．

実際，質量は $v \to 1$ の極限で無限大にならなければならない．このことを確かめるために，無限大にならないと仮定してみよう．すると，上界 $m(v) \le M$ があるはずで，観測者 R が $k = d(m(v)v)/dt$ という形で第2法則を使うとやはり，

$$kt + c = m(v)v \le Mv(t), \qquad \text{したがって} \qquad \frac{kt+c}{M} = \frac{k}{M}t + \frac{c}{M} \le v(t)$$

となる．言い換えると，$v(t)$ は下から1次関数でおさえられる（最初の議論では，ある1次関数にちょうど等しくなったのだった）．時刻 T を $(k/M)T + c/M = 1$ となるように決めると，依然として $t \ge T$ のとき $v \ge 1$ となる．よって，v の関数 m のグラフは下の図のようでなくてはならない．



質量は相対的

ここで，R から見ると G の質量は増加するのに対し，G からはそうは見えないことに注目しよう．つまり，質量が絶対的な量であるという考えを放棄しなければならない．質量が**本当**はどれだけかというような言い方には意味がなく，言えるのは，指定された観測者が観測する質量はどれだけか，ということだけである．質量は，長さや時間と同様，相対的なのだ．しかし，値 $\mu = m(0)$ には意味がある．これを G の**静止質量**（rest mass），あるいは**固有質量**（proper mass）という．（ここでも **proper** という言葉が"それ自身の"という意味で使われている．）

運動量保存は物理法則か

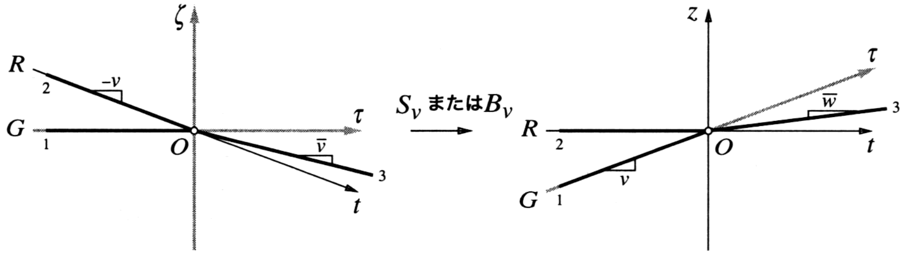
まだ，m が v にどのように依存するかを決める仕事が残っている．そのために，第3法則をさらに検討してみよう．ここで注目するのは，これが物理法則である，というニュートンの主張だ．ガリレイの相対性原理によれば，**ある**観測者が相互作用を観察して運動量が保存されていたなら，**すべての**観測者はこれに同意するはずである．もしそうでなければ，運動量保存は物理法則とは呼べない．次のような例を，とりあえずは質量は速度に依存しないと仮定して，考えてみよう．

例: 非弾性衝突

物体 X_1 は質量1を持ち，観測者 G とともに運動する．X_2 は質量2を持ち，観測者 R とともに運動する．事象 O で2つの物体が衝突し合体して，質量3の新しい物体 X になったとしよう．（このような衝突は**完全非弾性**（completely inelastic）衝突と呼ばれる．）ここで，G の座標系では全運動量が保存されるとして，R の座標系ではどう見えるかを考えてみることにしよう．

いつものように，G は R に対して速度 v を持っているとして，G の座標系で衝突を調べよう．観測者 G の座標系では，衝突前には，X_1 は静止していて運動量は0で，X_2 は速度 $-v$ で運動量 $-2v$ である．したがって，衝突前の全運動量は $p = -2v$ である．一方衝突後には，X は，これから求める速度 $\overline{v}$ で運動するので運動量は $\overline{p} = 3\overline{v}$ となる．観測者 G から見ると $p = \overline{p}$

であると仮定するので，$-2v = 3\overline{v}$ すなわち $\overline{v} = -(2/3)v$ となる．



それでは，R から見るとどうなっているだろう．この問に答えるには，G の座標系を R の座標系に変換すればよい．まず，ずれ写像であるガリレイ変換 $S_v : G \to R$ を使ってみる．R での物体の速度を求めるには，G での速度に v を加えればよい．R では X_2 は静止していて運動量は 0 で，X_1 は速度 v で運動量 $1 \cdot v = v$ である．したがって，R から見ると衝突前の全運動量は $p = v$ である．衝突後には，X は速度 $\overline{w} = \overline{v} + v = (1/3)v$ で運動するので運動量は $\overline{p} = 3\overline{w} = v$ となる．というわけで，R は，全運動量が保存するということで G と合意する．（しかし，R と G は，保存された運動量の**値**については合意しないことがわかる．このことはもちろん予想されることである．特殊相対論を持ち出す以前に，運動量は速度に依存する相対的な量である.）

ガリレイ変換—ずれ写像で変換する

ガリレイ変換のかわりにローレンツ変換 $B_v : G \to R$ を使うと結論は変わってくる．衝突前の描像は変わらない．全運動量が $p = v$ であることを確かめてみよう．衝突後の，X の速度 $\overline{w}$ はブーストの際の速度の合成則から

ブーストによる変換

$$\overline{w} = \frac{\overline{v} + v}{1 + \overline{v}v} = \frac{-\frac{2}{3}v + v}{1 - \frac{2}{3}v^2} = \frac{\frac{1}{3}v}{1 - \frac{2}{3}v^2}$$

と計算される．運動量は

$$\overline{p} = 3\overline{w} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{3}v}{1 - \frac{2}{3}v^2} = \frac{v}{1 - \frac{2}{3}v^2} \neq v = p$$

となる．したがって，R の立場では運動量は保存**されない**. 今度は R と G はこの点で合意できず，運動量保存則は物理法則としての資格を失う．

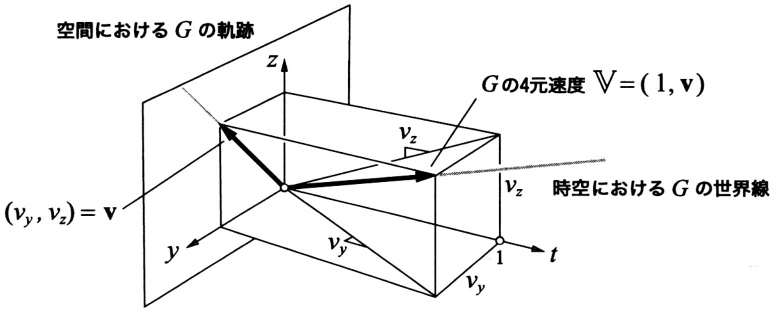
ここまででわかったのは，質量を定数と考える限りにおいては（上では，X_2 は静止していても速度 $-v$ で運動していても質量 2 と考えた)，ローレンツ写像のもとで運動量は適切に変換されないということである．以下では，運動量がローレンツ写像のもとで適切に変換**する**ように関数 $m(v)$ を定義することを目標にしよう．適切に定義すると，物理法則としての運動量保存則を守り抜けることを以下で見ることになる．

ゴール: 運動量保存則を守る

相対論的質量と相対論的運動量

ローレンツ写像は時空ベクトルにはたらくので，運動量が適切に変換するためには，まず運動量を時空ベクトルとして表さなければならない．$(1+3)$

次元に戻って，運動量を自然に時空ベクトルとして表す方法を考えよう．



4 元速度

観測者 G の速度を，R の (x, y, z) 座標系で書くと，3 次元ベクトル $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ になる．したがって，時空ベクトル $\mathbb{V} = (1, \mathbf{v})$ は R の座標系での G の世界線の方向を向いている．ベクトル $\mathbb{V}$ を **G の R に対する 4 元速度（4-velocity）**と呼ぶ．[注2]いつもと同じように，G が z 軸に平行に運動しているという特別な場合を考えてみよう．このときは，$v_x = v_y = 0$ であり，速度はスカラー $v = v_z$ だけで決まるので，$\mathbb{V} = (1, v)$ と書く．この場合は $\mathbb{V}$ は $\mathbf{R}^2$ のベクトルだが，時空ベクトルであることを強調してやはり $\mathbb{V}$ を G の 4 元速度ということにする．

次に，R から見た G の相対論的質量が $m = m(v)$ であるとしよう．ただし，v は G の速さ

$$v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

4 元運動量

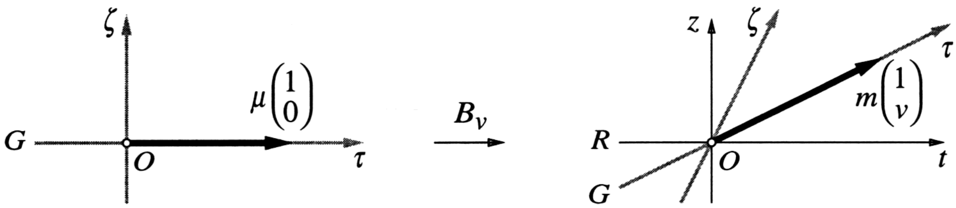
である．ここで，**R から見た G の 4 元運動量（4-momentum）**を 4 元ベクトル $\mathbb{P} = m\mathbb{V} = (m, m\mathbf{v}) = (m, \mathbf{p})$ と定義する．時空の $(1+1)$ 次元断面では 4 元運動量は単に $\mathbb{P} = (m, mv) = (m, p)$ となる．

観測者 G の座標系では，G の 4 元速度は $\mathbb{V} = (1, 0)$ であり，4 元運動量は $\mathbb{P} = \mu\mathbb{V} = (\mu, 0)$ となる．ここで，μ は G の固有質量 $m(0)$ である．このように定義した 4 元運動量がすべてのローレンツ変換のもとで適切に変換するなら，特に，$B_v : G \to R$ のもとでも適切に変換して，$B_v(\mathbb{P}_G) = \mathbb{P}_R$ すなわち

$$B_v(\mathbb{P}_G) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbb{P}_R$$

となるはずである．ここで，下付き文字で 2 つの観測者から見た 4 元運動量を区別した．

注2　訳注：3 元組立単位系というときの 3 元は，物理量の次元のことで，基本となる，質量，長さ，時間の 3 つの物理量を意味する．一方，4 元座標というときの 4 元は，空間の次元のことで，時間軸と 3 つの空間軸の 4 次元ということを意味する．



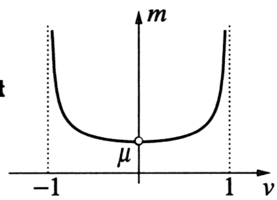
この等式が**相対論的質量**(relativistic mass)を計算する式

$m(v) = \dfrac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}$

$$m = m(v) = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}$$

を与える.

速度 v の関数としての相対論的質量



この関数は，質量に求められる性質 $m(0) = \mu$ (静止質量)，および $v \to \pm 1$ の極限で $m(v) \to \infty$, を持っており，グラフは期待される対称性を持っている．以下ではこれを質量として採用する．

すべての座標系の間でチェックする

ここで，この質量を採用したときに，**すべての座標系の間で**4元運動量が正しく変換するかどうかを確かめることにする．すでに，運動する物体(静止質量 μ)に固定した座標系を G としてしまったので，R 以外にもう 1 つ新しい座標系が必要である．そこで，座標系 (T, X, Y, Z) を導入し，C (**大文字**(Capital)の C)という名前で呼ぶことにする．観測者 G の速度が，R の座標系で v,C の座標系で V のとき，4元運動量は

$$\mathbb{P}_R = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1\\ v\end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}_C = \frac{\mu}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix}1\\ V\end{pmatrix}$$

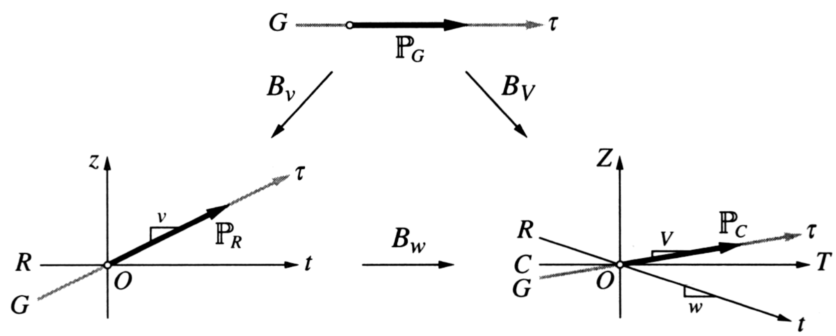
となる．次の命題は，この4元運動量が本当にすべての座標系の間で正しく変換することを主張する．

命題 3.1 座標系 C に対する R の速度 w とすると，写像 $B_w : R \to C$ に対して $B_w(\mathbb{P}_R) = \mathbb{P}_C$ となる．

証明：2種類の証明を示す．最初のものは，$\mathbb{P}_R$ から $\mathbb{P}_G$ を経由して $\mathbb{P}_C$ に到達するもので，2番目のものは力まかせの計算によるものである．

証明 1:定義から，各座標系での G の4元運動量は，G 自身の座標系で見た4元運動量 $\mathbb{P}_G = \mu(1, 0)$ の，それぞれ適当なローレンツ写像による像である．すなわち，

$$\mathbb{P}_R = B_v(\mathbb{P}_G), \qquad \mathbb{P}_C = B_V(\mathbb{P}_G).$$



3 つの座標系 G, R, C は上に示した可換図式で結びつけられているので，$B_wB_v = B_V$ であり，$B_w(\mathbb{P}_R) = B_w(B_v(\mathbb{P}_G)) = B_wB_v(\mathbb{P}_G) = B_V(\mathbb{P}_G) = \mathbb{P}_C$ となる．

証明 2:ベクトル

$$B_w(\mathbb{P}_R) = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1 & w\\ w & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ v\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\mu}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1+vw\\ w+v\end{pmatrix} = \frac{\mu(1+vw)}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{w+v}{1+vw}\end{pmatrix}$$

を成分ごとに計算して $\mathbb{P}_C$ に等しいことを示そう．まず，$B_V = B_wB_v$ についてブーストによる速度の合成則を考えると，

$$V = \frac{w+v}{1+vw}$$

となる．これでベクトルの第 2 成分がちょうど V であることがわかった．

次に，ベクトルの前のスカラー倍の係数を考える．まず

$$\frac{1+wv}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1-w^2)(1-v^2)}{(1+wv)^2}}}$$

と書き換える．上の V の式を使って，根号の中の量は次のように計算される．

$$\begin{aligned}\frac{(1-w^2)(1-v^2)}{(1+wv)^2} &= \frac{1-w^2-v^2+w^2v^2}{(1+wv)^2}\\ &= \frac{1+2wv+w^2v^2-w^2-2wv-v^2}{(1+wv)^2}\\ &= \frac{(1+wv)^2-(w+v)^2}{(1+wv)^2}\\ &= 1-\frac{(w+v)^2}{(1+wv)^2} = 1-V^2.\end{aligned}$$

したがって，

$$B_w(\mathbb{P}_R) = \frac{\mu(1+vw)}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{w+v}{1+vw} \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix} = \mathbb{P}_C.$$

証明終

共変性

B_w **は座標を翻訳する辞書**

第 1 章では，(t,x,y,z) や (T,X,Y,Z) のような座標は，それぞれの観測者が事象に与える“名前”だという見方を導入し，写像

$$B_w : R \to C, \qquad B_w^{-1} : C \to R$$

はそれぞれ，1 つの名前をもう 1 つの名前に翻訳する“辞書”だと考えた．したがって，事象 E の R での名前がわかれば，辞書 B_w を使って C での名前も知ることができる．

4 元運動量は共変

命題 3.1 もまた名前と辞書に関するものである．命題の主張は，運動する物体 G の 4 元運動量の，R での名前がわかれば，C での名前も知ることができるということ，さらに，4 元運動量の翻訳にも，座標の翻訳に使ったのと同じ“辞書”B_w が使えるということである．言い換えると，4 元運動量ベクトルは，ある観測者の座標から別の観測者の座標に移るとき，事象の座標とまったく同じしかたで変化する．このことを，4 元運動量は**共変的**(covariant)であるという．

共変性の原理

4 元速度 V は $\mathbb{V} = m(v)^{-1}\mathbb{P}$ と表せるので，4 元速度もまた共変である．一般に，ある共変的な量の R の座標での値がわかれば，その量の C の座標での値を，時空の座標を写す写像 $B_w : R \to C$ を使って知ることができる．共変的な量を使うことなしには，意味のある物理法則を書き表すことはできない．このことは，**共変性の原理**(principle of cavariance)と呼ばれる．ここでは慣性座標系だけを考えているので，この共変性は正確には**特殊**共変性(special covariance)と呼ばれるものである．これに対して，後で出会うアインシュタインの一般相対論では，**すべての**座標系が対等に扱われる．

第 1 章で見たように，アインシュタインの特殊相対論を登場させた物理学の危機は，マクスウェル方程式がガリレイ変換のずれ写像のもとで共変的でないが，ローレンツ変換のもとでは共変的であるという観察だった．マクスウェルの法則の正しさは疑う余地のないものだったので，特殊共変性の原理は，ガリレイのずれ写像が，異なる観測者の時空の座標系を結びつける写像として不適格であることを示していた．

4 元運動量の保存

例 1: 2 物体の衝突

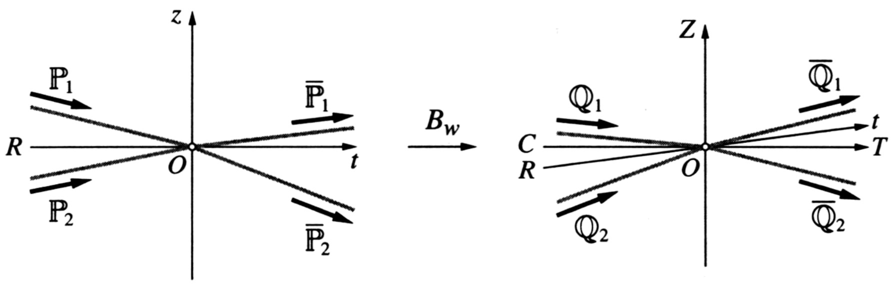
4 元運動量が共変的であることがわかると，運動量保存則が物理法則としての地位を回復したことは簡単に確かめられる．それぞれ静止質量 μ_1, μ_2 の 2 つの物体 G_1, G_2 を考え，これらを事象 O において衝突させる．ここでは観測者 R の立場では全 4 元運動量が保存しているとし，観測者 C がこれに

同意するかどうかを調べよう．

まず，R の立場で衝突を見てみよう．物体 G_1, G_2 の衝突前の 4 元運動量がそれぞれ $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ であり，衝突後は $\overline{\mathbb{P}}_1, \overline{\mathbb{P}}_2$ になったとする．観測者 R の立場では，衝突の際に全 4 元運動量は保存される，すなわち，$\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = \overline{\mathbb{P}}_1 + \overline{\mathbb{P}}_2$ だとする．観測者 C はこれに同意するだろうか．

C と R はローレンツ写像 $B_w : R \to C$ で結びつけられるとする．すると，4 元運動量は共変的なので，C における 4 元運動量はそれぞれ，R での対応する 4 元運動量の，写像 B_w による像になっている．

	前	後
G_1:	$\mathbb{Q}_1 = B_w(\mathbb{P}_1)$	$\overline{\mathbb{Q}}_1 = B_w(\overline{\mathbb{P}}_1)$
G_2:	$\mathbb{Q}_2 = B_w(\mathbb{P}_2)$	$\overline{\mathbb{Q}}_2 = B_w(\overline{\mathbb{P}}_2)$



命題 3.2 $\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2 = \overline{\mathbb{Q}}_1 + \overline{\mathbb{Q}}_2$.

証明：これは，B_w が線型写像であるということと $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = \overline{\mathbb{P}}_1 + \overline{\mathbb{P}}_2$ とから直ちに導かれる帰結である．実際，

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2 &= B_w(\mathbb{P}_1) + B_w(\mathbb{P}_2) = B_w(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2) = B_w(\overline{\mathbb{P}}_1 + \overline{\mathbb{P}}_2) \\ &= B_w(\overline{\mathbb{P}}_1) + B_w(\overline{\mathbb{P}}_2) = \overline{\mathbb{Q}}_1 + \overline{\mathbb{Q}}_2.\end{aligned}$$

証明終

したがって，ある衝突について，4 元運動量が保存されていることを一人のガリレイ的観測者が発見したとすれば，他のすべての観測者も同意する．これで，ニュートンの第 3 法則を，特殊相対論において **4 元運動量の保存**として再定式化したことになる．

例 2: 完全非弾性衝突

もう 1 つ例をあげよう．今度は，逆方向に同じ大きさの速度で運動する 2 つの物体の完全非弾性衝突を考える．物体は，時速 60 マイルで逆方向から走ってくる 2 台の 10 トントラックだ．衝突後に 2 台はめりこんで合体するとすると，このとき，対称性から合体した 2 台は静止することになる．

$v_1 = +60$ マイル/時	$v_2 = -60$ マイル/時
$G_1 \longrightarrow$	$\longleftarrow G_2$
$\mu_1 = 10$ トン	$\mu_2 = 10$ トン

トラック 1 台の静止質量を $\mu_1 = \mu_2 = 10\ \mathrm{t} = 10^4\ \mathrm{kg} = 10^7\ \mathrm{g}$, 衝突前の速さを

$$60 \text{ マイル/時} \approx 88 \text{ フィート/秒} \approx 30\ \mathrm{m/s} \approx 10^{-7} \times \underbrace{3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}_{\text{光速}},$$

つまり幾何単位系で $v_1 = -v_2 = 10^{-7}$ とする．テイラーの定理から，

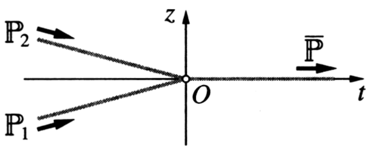
$$\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}} \approx 1 + \tfrac{1}{2}v_1^2 = 1 + \tfrac{1}{2} \times 10^{-14}$$

と評価できる．衝突前の 2 台のトラックの 4 元運動量はそれぞれ

$$\mathbb{P}_1 = \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{1-v_1^2}}, \frac{\mu_1 v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \right) \approx \left(10^7 + \tfrac{1}{2} \times 10^{-7}, 1\right)\ \mathrm{g},$$

$$\mathbb{P}_2 = \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{1-v_2^2}}, \frac{\mu_1 v_2}{\sqrt{1-v_2^2}} \right) \approx \left(10^7 + \tfrac{1}{2} \times 10^{-7}, -1\right)\ \mathrm{g}$$

である．



衝突後に合体した 2 台のトラックの 4 元運動量を $\overline{\mathbb{P}}$ とすると，

$$\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \approx \left(2 \times 10^7 + 10^{-7}, 0\right)\ \mathrm{g}$$

となる．第 2 成分を見ると衝突後の速度が 0 になることがわかるので，第 1 成分は合体した 2 台のトラックの**静止質量**である．ところが，

$$\text{合体後の静止質量} = 1\text{ 台ずつの静止質量の和} + 10^{-7}\ \mathrm{g}$$

となっている．余分の 10^{-7} グラムは，静止質量は，衝突の際には保存せず，新たに**生成された**ことを示している．この余分の質量は一体どこからやってきたのだろうか．

エネルギーが質量に転換される

答えは，走っていたトラックの運動エネルギーが，静止したときに質量に転換された，ということだ．なぜそうであるかを理解するために，運動している 1 台のトラックの相対論的質量を考えよう．テイラーの定理から，

$$\frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}} = \mu\left(1 + \tfrac{1}{2}v^2 + O(v^4)\right) \approx \mu + \tfrac{1}{2}\mu v^2 = \underbrace{10^7\mathrm{g}}_{\text{静止質量}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} \times 10^7 \times 10^{-14}\mathrm{g}}_{\text{運動エネルギー}}$$

という形に書ける．したがって，v が小さいときには，相対論的質量への主要な寄与は，静止質量と，静止質量を用いて計算された(非相対論的な)運動エネルギーである．衝突後に現れた余分の質量は，1 台の運動エネルギー

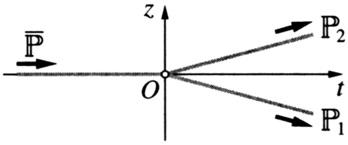
$$\tfrac{1}{2}\mu v^2 = \tfrac{1}{2} \times 10^{-7}\ \mathrm{g}$$

の 2 台分である．このエネルギーがそのまま質量に転換されたのだ．このような現象は，ニュートンの非相対論的物理学では絶対に起らない．これは，相対論的質量が速度とともに増加するという事実の帰結である．

核分裂: 質量がエネルギーに転換される

上の例とは逆の現象も起きることがある．最初は，1 個の物体が静止している．事象 O において物体は，外部からエネルギーを受け取ることなしに，何らかの過程で自発的に爆発し，等しい 2 つの破片に分裂して，ある速さで互いに遠ざかっていく．破片の静止質量は，合計してももとの質量より少なく，その差が破片の運動エネルギーになる．この**分裂**(fission)と呼ばれる過

程では，質量の一部がエネルギーに直接転換される．例えば，核分裂反応におけるウランやプルトニウムの原子核の分裂のような場合，解放されるエネルギーの量は莫大である．物質とエネルギーは相互転換が可能なので，**物質–エネルギー**(matter–energy)という単一の単語で両者を指すこともある．



3元組立単位系

式を3元組立単位系で書き換える

これまで使ってきた幾何単位系は，式の含む重要な情報を隠してしまうことがある．例えば，有名な方程式 $E = mc^2$ は，幾何単位系では $E = m$ というまるで暗号のような式になってしてしまう．とはいっても，この式から3元組立単位系での式を復元することはできる．式 $E = m$ は両辺の次元が釣り合っていない．左辺はエネルギーなので，次元は (質量) × (速度)^2 であり，右辺の質量に因子 c^2 をかけることによって，両辺の次元を釣りあわせ，3元組立単位系での正しい式を得ることができる．

この方法で，等式をいつでも一方の単位系からもう一方の単位系に書き直すことができる．しかし，それですべての問題が解決するわけではない．例えば，4元速度 $\mathbb{V} = (1, \mathbf{v})$ を3元組立単位系に書き換えると，後ろ3つの空間成分は正しい次元，メートル毎秒になる．しかし，最初の成分は無次元のままである．1つのベクトルの成分ごとに次元が異なるのでは，物理的に混乱を招くし，数学的にも問題のややこしさを増すだけである．この欠点は，後に一般相対論を議論するときにひどくなる．

次元同次座標

ここでも，実は簡単な解決策がある．事象 $E = (t, x, y, z)$ に，すべての成分が同じ次元を持つ新しい座標 (x_0, x_1, x_2, x_3) を割り当てることにしよう．それには，どれかの成分に c の適当な巾をかけてやればよいが，やり方は2つ考えられる．まず，1つは，後ろ3つの空間成分を c で割って4元速度のすべての成分が秒の次元を持つようにすることである．もう1つの，より優れた方法は，時間成分に c をかけて，4元速度と4元運動量が，それぞれ(3元組立単位系での)速度と運動量と同じ次元を持つようにすることである．このとき，4元座標，4元速度，4元運動量はそれぞれ

$$\mathbb{X} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x}) \quad \text{m},$$

$$\mathbb{V} = \frac{\Delta\mathbb{X}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta t}, \frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \frac{\Delta x_2}{\Delta t}, \frac{\Delta x_3}{\Delta t}\right) = (c, \mathbf{v}) \quad \text{m/sec},$$

$$\mathbb{P} = m\mathbb{V} = (mc, m\mathbf{v}) = (mc, \mathbf{p}) \quad \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

となる．座標 (ct, x, y, z) を R の系での**次元同次座標**(dimensionally homogeneous coordinates)と呼び，座標 (t, x, y, z) をその**次元非同次座標**

(traditional coordinates)と呼ぶことにする.[注3]

次元同次座標性の性質をいくつか見てみよう．まず，座標系 R で次元同次座標を用いると，観測者 R 自身の 4 元速度は $(1,0,0,0)$ でなく $\mathbb{V}=(c,0,0,0)$ となり，別の観測者 G の 4 元運動量の第 1 成分は，G の質量でなく，その c 倍になる．

ミンコフスキノルム

次元同次座標でのミンコフスキノルムは，次元非同次座標と場合と同様に，光円錐の方程式

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

から，$Q(\mathbb{X}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ と決まる．（これは (長さ)^2 の次元を持つ.）また，ミンコフスキ内積を定める行列は見慣れた形

$$J_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

になる．（この行列は無次元である.）この内積を使って作った 4 元速さは

$$\|\mathbb{V}\| = \sqrt{\mathbb{V}\cdot\mathbb{V}} = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1-(v/c)^2} \quad \text{m/sec}$$

のように次元非同次座標での速さと同じ次元を持つ．

双曲回転とブースト

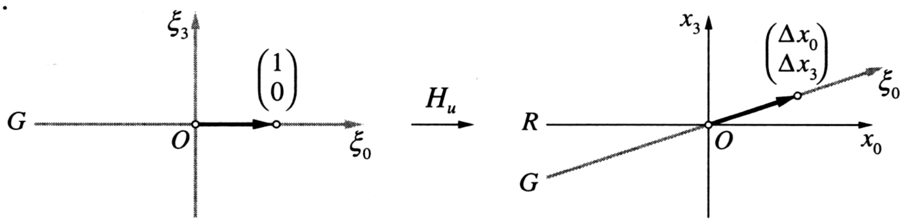
双曲回転とは，線型変換 M であって，ミンコフスキ内積を保つ($M^tJ_{1,3}M = J_{1,3}$)ようなものである．幾何単位系をとったとき，次元非同次座標と使った場合も，次元同次座標を使った場合も同じ行列 $J_{1,3}$ が現れる．, 同様に，$(1+1)$ 次元時空(この場合の行列は $J_{1,1}$)での u 双曲ラジアンの双曲回転の行列も，どちらの場合でも同じ形

$$H_u = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

になる．座標系 G, R に次元同次座標を用いたとき，$H_u : G \to R$ を考える．双曲角 u と，G の R に対する速度の大きさ v の間の関係を考えると，

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta x_3}{\Delta x_0}\frac{\Delta x_0}{\Delta t} = c\,\frac{\Delta x_3}{\Delta x_0}$$

である．



比 $\Delta x_3/\Delta x_0$ は，R の時空での G の世界線の傾きである．事象

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix}$$

[注3] 訳注：射影空間の同次座標とは別のものである．

は世界線の上の点なので，$\Delta x_3/\Delta x_0 = \sinh u/\cosh u = \tanh u$ すなわち $v = c\tanh u$ と求められる．一方，この式は次のようにも導出できる．幾何単位系では $v = \tanh u$ だったが，前に述べた3元組立単位系への書き換え方法に従うと，$\tanh u$ は無次元の量なので，v が正しい次元になるようにこれに c をかけることが必要であることがわかる．いずれにせよ，この結果から，H_u に対応するブーストは

$$B_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

時間の伸び

観測者 R と G の固有時間を関係づける比 $\Delta t/\Delta\tau$ を時間の伸びの因子と呼ぶ．この因子は，次のように，ブースト B_v を事象 $(\xi_0,\xi_3)=(c\Delta\tau,0)$ に作用させた結果に現れる．

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ * \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c\Delta\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c\Delta\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ * \end{pmatrix},$$

$$\text{時間の伸びの因子:}\quad \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

固有4元速度

2つの時間座標 t と τ は，時間の伸びの因子によって結びつけられるので，R の座標系での G の位置 $\mathbb{X}$ を，G の固有時間 τ の関数と見なすことができる．τ に対する $\mathbb{X}$ の変化率

$$\mathbb{U} = \frac{\Delta\mathbb{X}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta\mathbb{X}}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbb{V} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(c,\mathbf{v})$$

を考えると，これは，G の速度の共変的な書き表し方になっている．これを，R での G の**固有4元速度**(proper 4-velocity of G in R)と呼ぶ．固有4元速度のノルムは

$$\|\mathbb{U}\| = \frac{\|\mathbb{V}\|}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{c\sqrt{1-(v/c)^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = c$$

となって常に c であることに注意しよう．特に，次元同次座標であれ，次元非同次座標であれ，幾何単位系を用いると $\mathbb{U}$ は**単位**4元ベクトルになる．

観測者 G の固有質量を μ とすると，その相対論的質量は，3元組立単位系で $m=\mu/\sqrt{1-(v/c)^2}$ となる．このことから，G の4元運動量のとりわけ単純で美しい式

$$\mathbb{P} = m\mathbb{V} = \frac{\mu}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbb{V} = \mu\mathbb{U}$$

が導かれる．4元運動量 $\mathbb{P}$ が，明らかに共変的な量である4元速度と不変な量である固有質量の積として表せたことから，4元運動量が共変的な量であることがここでも確認できた．

まとめ

ここで，固有質量が μ, 固有時間が τ である G に関するいろいろな量を，観測者 R の(1+3)次元時空の次元同次座標で書いたものをまとめておく．

$$
\begin{aligned}
&\text{4 元座標：} && \mathbb{X} = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x}),\\
&\text{4 元速度：} && \mathbb{V} = \frac{\Delta \mathbb{X}}{\Delta t} = \left(c, \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = (c, \mathbf{v}),\\
&\text{4 元速さ：} && \|\mathbb{V}\| = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1-(v/c)^2},\\
&\text{時間の伸びの因子：} && \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\\
&\text{固有 4 元速度：} && \mathbb{U} = \frac{\Delta \mathbb{X}}{\Delta \tau} = \frac{\Delta t}{\Delta \tau}\frac{\Delta \mathbb{X}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbb{V},\\
&\text{4 元運動量：} && \mathbb{P} = m\mathbb{V} = \frac{\mu}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbb{V} = \mu\mathbb{U}.
\end{aligned}
$$

3 元組立単位系での，質量のエネルギーへの転換

幾何単位系から 3 元組立単位系への書き換えは，単に式の外見の変更を強いるだけでなく，物理的意味を明らかにしてくれる．例えば以前に議論したトラックの衝突では，1 台のトラックの相対論的質量の一部が運動エネルギーと見なせることに着目した．しかし，エネルギーの次元は (質量) × (速度)^2 であり，3 元組立単位系では質量の次元と同じではない．(同じなのは幾何単位系でだけである.) したがって，“質量の一部は運動エネルギーだった” というのは正確でない．むしろ，質量の式に光速の 2 乗 c^2 をかけてエネルギーにして，

$$
\begin{aligned}
E = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} &= \mu c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right)\\
&= \underbrace{\mu c^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \cdots}_{\text{運動エネルギー}}
\end{aligned}
$$

静止エネルギーと運動エネルギー

と書くほうがよい．これですべての項がエネルギーになり，方程式の両辺は同じ次元を持つようになった．ここで μ は静止質量なので，μc^2 を**静止エネルギー** (rest energy) と呼ぼう．第 2 項は，3 元組立単位系を用いて書かれた運動エネルギーであり，それ以降の項も “運動に関係している” (なぜなら，速度 v を含んでいる) ので，第 2 項以降のすべての項の和を**相対論的運動エネルギー** (relativistic kinetic energy) と呼ぼう．すると，合体したトラックの静止エネルギーは，1 台のずつのトラックの静止エネルギーの和よりも大きく，その差は 2 台が運動していたときの運動エネルギーである，と言うことができる．両方をあわせた E のことを **全エネルギー** (total energy) と呼ぶことにすれば，全エネルギーは衝突の前後で保存される，と言うことができる．

エネルギー–運動量ベクトル

3 元組立単位系では，相対論的質量は $m = \mu/\sqrt{1-(v/c)^2}$, 全エネルギーは $E = mc^2$ で与えられる．したがって，次元同次座標での 4 元運動量は

$$
\mathbb{P} = (mc, \mathbf{p}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)
$$

とも表せる．このことから，$\mathbb{P}$ はしばしば **エネルギー–運動量ベクトル** (energy–momentum vector) と呼ばれる．

練習問題

1.
$$\overline{p} = \frac{v}{1 - \frac{2}{3}v^2}$$

が成立するとする．変数 v が小さいとき，$\overline{p} = v(1 + (2/3)v^2 + \cdots) \approx v$ であることを示せ．

2. (a) $v = c\tanh u$ ならば $\cosh u = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ であることを示せ．
   (b) $\sinh u$ を v で表し，次元同次座標ではブースト B_v が次の形を持つことを示せ．
$$B_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 幾何単位系では，速度 v, w でのブーストを続けて行うと，速度 $V = (v+w)/(1+vw)$ での 1 回のブーストと同じ結果になった．速度 V の式を，3 元組立単位系で書き表せ．
4. 事象 $E = (t, x, y, z)$ の次元同次座標を，もう 1 つの可能な定義
$$\mathbb{X} = (t, x/c, y/c, z/c)\ \text{秒}$$
で定めたとしよう．4 元速度 $\mathbb{V} = \Delta\mathbb{X}/\Delta t$, そのミンコフスキノルム，4 元速さ，固有 4 元速度，4 元運動量を求めよ．次元同次座標 $\mathbb{X} = (ct, x, y, z)$ で表したこれらの量と比較してみよ．

3 元組立単位系と次元非同次座標を組み合せて使うこともしばしば行われる．この場合には，4 元ベクトルの各成分が異なった次元を持つことになる．例えば
$$\mathbb{X} = (t\ \mathrm{s}, x\ \mathrm{m}, y\ \mathrm{m}, z\ \mathrm{m})$$
である．以下の練習問題では，3 元組立単位系と次元非同次座標の組み合せを用いよ．

5. (a) 幾何単位系から 3 元組立単位系への書き換えのルールを用いて，$(1+1)$ 次元時空における双曲回転 $H_u : G \to R$ の式
$$H_u = \begin{pmatrix} \cosh u & \frac{1}{c}\sinh u \\ c\sinh u & \cosh u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \frac{1}{c}\sinh u \\ c\sinh u & \cosh u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix}$$

を 3 元組立単位系に書き換えよ．

(b) 助変数 u と，R の座標系での G の速度 v との関係を求めよ．

(c) 双曲回転 H_u に対応するブースト B_v の式を求めよ．

6. (a) ミンコフスキ 2 次形式 $Q(\mathbb{X})$ を，秒^2 の次元を持つように定義せよ．

(b) この 2 次形式 $Q(\mathbb{X})$ に対応するミンコフスキ内積を定義する行列 $J_{1,3}$ を求めよ．行列 $J_{1,3}$ の各成分の次元は何か．特に，すべての成分の次元は一致するか，それとも異なるものがあるか．

(c) 練習問題 5 で求めた H_u の式を，関係

$$H_u^t J_{1,1} H_u = J_{1,1}, \qquad J_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{c^2} \end{pmatrix}$$

から直接求めよ．

7. (a) ブースト $B_v : (\tau, \zeta) \to (t, z)$ を表す行列を，$v = 30$ m/s（光速度は $c = 3 \times 10^8$ m/s）の場合に 3 元組立単位系で計算せよ．練習問題 5 で求めた 3 元組立単位系でのブーストの表式を用いるとよい．

(b) ガリレイ変換のずれ写像 $S_v : (\tau, \zeta) \to (t, z)$ を，$v = 30$ m/s の場合に 3 元組立単位系で計算せよ．2 つの行列 B_v, S_v を比較し，$c \to \infty$ の極限で $B_v \to S_v$ となることを示せ．

3.2 曲線と曲率

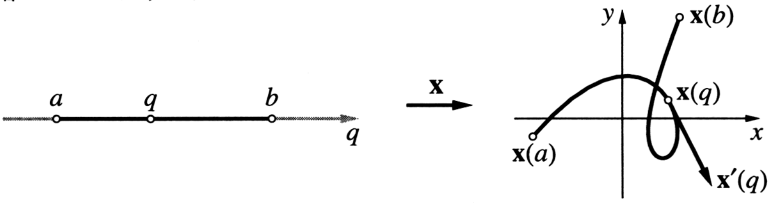
助変数表示された曲線と弧長

力を受けて運動する物体は加速される，すなわち速度を変えられる．最も単純な状況では，速度は世界線の傾きであり，世界線の傾きを変えるということは世界線を曲げるということである．このようなわけで，力と加速度を取り扱うには，多変数の微積分を用いて記述される曲線の微分幾何学を使う必要がある．

まずは，通常のユークリッド平面の曲線を考えよう．助変数表示された道 (path)，つまり，閉区間から平面への滑らかな写像 **助変数表示された曲線**

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : [a,b] &\to \mathbf{R}^2, \\ q &\mapsto \mathbf{x}(q) = (x(q), y(q)) \end{aligned}$$

から議論を始めることにする．

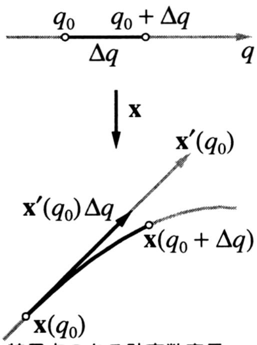


変数 q が a から b に動いていくと，点 $\mathbf{x}(q)$ は平面上の何らかの道をたどる．この変数 q を，道上の各点に与えられた“座標”と考えることもできる．この理由から，q は**助変数** (parameter) と呼ばれる．この単語の語源は para-（“そ

ばで”)と meter(“測る”)にある．

接ベクトル

助変数による表示は，定義により，**滑らか**(smooth)である．ここで滑らかとは，$\mathbf{x}(q)$ の導関数を任意の階数まで計算できることを意味する．1 階微分 $d\mathbf{x}/dq = \mathbf{x}'(q) = (x'(q), y'(q))$ は，$\mathbf{x}'(q) \neq \mathbf{0}$ のときには，点 $\mathbf{x}(q)$ での接ベクトルである．変数 q を**時間**変数と考えると，$d\mathbf{x}/dq$ は時間に関する位置の変化率，すなわち速度を与えるので，このベクトルは，曲線の**接速度ベクトル**(tangent velocity vector)とも呼ばれる．



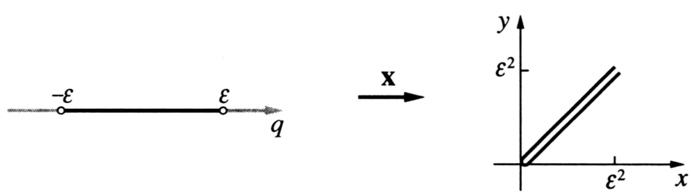
特異点のある助変数表示

接ベクトルは重要な情報を含んでいる．写像 $\mathbf{x}$ による，区間 $[a,b]$ の小部分 $[q_0, q_0+\Delta q]$ の像を考えよう．テイラーの定理から

$$\mathbf{x}(q_0 + \Delta q) \approx \mathbf{x}(q_0) + \mathbf{x}'(q_0)\Delta q$$

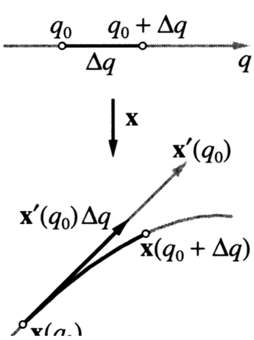
と近似できる．点 $\mathbf{x}(q_0+\Delta q)$ は，$\mathbf{x}'(q_0) \neq \mathbf{0}$ の場合には，点 $\mathbf{x}(q_0)$ から接ベクトルの方向に長さ $\|\mathbf{x}'(q_0)\|\Delta q$ だけ進んだ点に非常に近いだろう．特に，写像 $\mathbf{x}$ は q_0 の十分小さい近傍で 1 対 1 写像になっているだろう．

これに対して $\mathbf{x}'(q_0) = \mathbf{0}$ の場合には，写像 $\mathbf{x}$ は q_0 のどんなに小さな近傍に制限しても 1 対 1 写像にならない可能性がある．例で説明しよう．任意の正の実数 ε に対して，区間 $-\varepsilon \leq q \leq \varepsilon$ で定義された写像 $\mathbf{x}(q) = (q^2, q^2)$ を考えよう．接ベクトルは $\mathbf{x}'(q) = (2q, 2q)$ なので，$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$ である．実際，点 $q=0$ で写像 $\mathbf{x}$ は特異である．区間 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ は $q=0$ を折り目として 2 重に折りたたまれ，点 $(0,0)$ と点 $(\varepsilon^2, \varepsilon^2)$ を両端とする $\mathbf{R}^2$ の線分に 2 対 1 で写される(ただし，原点では 1 対 1 である)．



写像 $\mathbf{x}$ が非特異($\|\mathbf{x}'\| > 0$)であることを要求

助変数表示 $\mathbf{x}(q)$ が局所的に 1 対 1 である(つまり，各点の十分に小さい近傍で 1 対 1 である)ことを保証するために，$[a,b]$ のすべての点 q において $\mathbf{x}$ が**非特異**(nonsingular)である，すなわち $\|\mathbf{x}'(q)\| > 0$ である，という条件をおくことにする．通常，これは厳しい制限にはならない．というのは，1 つの道には無限個の異なる助変数表示が可能であり，そのそれぞれで道をたどるときの助変数の変化の速さが違うからである．例えば，$(0,0)$, $(1,1)$ を両端とする平面上の線分を助変数表示するのには，$[a,b]$ を $[0,1]$ の上に写す任意の関数 $f(q)$ を使って $\mathbf{x}(q) = (f(q), f(q))$ とすればよい．区間 $[a,b]$ 上の任意の q に対し $f'(q) \neq 0$ である限り，$\mathbf{x}(q)$ は非特異性の条件を満足する．より興味深い例として単位円を考えよう．最も見慣れた助変数表示 $\mathbf{x}(q) = (\cos(\alpha q), \sin(\alpha q))$ 以外にも，



$$\mathbf{X}(q) = \left(\frac{2q}{1+q^2}, \frac{1-q^2}{1+q^2}\right), \quad -\infty < q < \infty$$

という助変数表示も考えられる．後者では，実軸全体が，単位円から点 $(x,y) = (0,-1)$ を除いたものと 1 対 1 に対応している．前者では，助変数の増加と

ともに一定の速さ $\|\mathbf{x}'\| = \alpha$ で点が進むが，後者では，時計回りに一定でない速さで進み，$q = 0$ で速さ $\|\mathbf{X}'\|$ は最大になる．

区間 $[q_0, q_0 + \Delta q]$ の写像 $\mathbf{x}$ による像の検討に戻ろう．新たにおいた条件から $\mathbf{x}'(q_0) \neq \mathbf{0}$ なので，式

$$\mathbf{x}(q_0 + \Delta q) \approx \mathbf{x}(q_0) + \mathbf{x}'(q_0)\Delta q$$

から，点 $\mathbf{x}(q_0)$ と点 $\mathbf{x}(q_0+\Delta q)$ の間の**直線距離** $\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}(q_0+\Delta q)-\mathbf{x}(q_0)\|$ は，Δq が十分小さいとき，ベクトル $\mathbf{x}'(q_0)\Delta q$ の長さ $\|\mathbf{x}'(q_0)\|\Delta q$ でよく近似されることがわかる．この長さは，点 $\mathbf{x}(q_0)$ と点 $\mathbf{x}(q_0 + \Delta q)$ の間の曲線に沿った長さのよい近似になっている．

$\|\mathbf{x}'\|$ は局所的な拡大率

q 軸上の定義域に含まれる線分 $[q_0, q_0 + \Delta q]$ の長さは Δq であり，その像の曲線に沿った長さは近似的に $\|\mathbf{x}'(q_0)\|\Delta q$ なので，線分は，近似的に倍率 $\|\mathbf{x}'(q_0)\|$ で**拡大**されて曲線上に写されたということができる．（固有値のときと同様，$\|\mathbf{x}'(q_0)\| < 1$ のときには“拡大”という言葉で縮小を意味する．）別の点 q_1 の近くの短い線分は倍率 $\|\mathbf{x}'(q_1)\|$ で拡大されるので，“拡大率”は点により変化する．そこで，$\|\mathbf{x}'(q)\|$ は，写像 $\mathbf{x}$ の，点 q での**局所的拡大率**であるという．

曲線全体の弧長

曲線 C 全体の長さを測るために，区間 $[a, b]$ を

$$a = q_1 < q_2 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$$

のように分割して，各部分 $\Delta q_j = q_{j+1} - q_j$ が十分に小さくて

$$\|\mathbf{x}(q_{j+1}) - \mathbf{x}(q_j)\| \approx \|\mathbf{x}'(q_j)\|\Delta q_j$$

がよい近似であるようにしよう．このとき，曲線全体の長さは近似的に

$$\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x}'(q_j)\|\Delta q_j$$

である．これはリーマン和にほかならない．したがって，極限 $n \to \infty$ で分割 $a = q_1 < \cdots < q_{n+1} = b$ が細かくなるにつれ，和は積分

$$\int_a^b \|\mathbf{x}'(q)\|\, dq$$

に収束する．このことは，次の定義にまとめられる．

定義 3.1 写像 $\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ を曲線 C の助変数表示とする．このとき，C の**弧長**(arc length)を

$$L_{\mathbf{x}} = \int_a^b \|\mathbf{x}'(q)\|\, dq$$

と定義する．

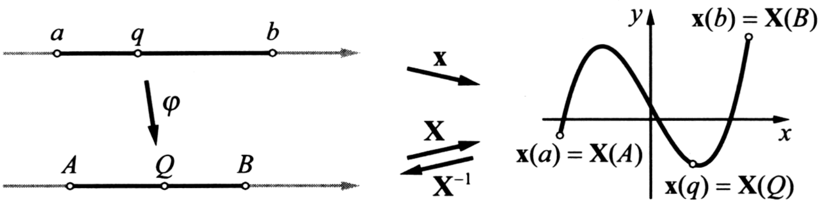
弧長の定義は助変数表示に依存しているので，1 つの曲線の 2 つの異なる助変数表示によって計算された弧長が一致するかどうかは明らかではない．実際，ここに落とし穴がある．曲線として単位円を考えることにして，$[0, 2\pi]$ を定義域とする 2 つの助変数表示

$$\mathbf{x}(q) = (\cos(q), \sin(q)), \qquad \mathbf{X}(Q) = (\cos(2Q), \sin(2Q))$$

を見てみよう．このとき，$L_{\mathbf{x}} = 2\pi$ であるが，一方 $L_{\mathbf{X}} = 4\pi$ となる．この 2 つの写像はともに**局所的に** 1 対 1 であるが，写像 $\mathbf{X}$ は**大域的に** 2 対 1 である．そのため，$\mathbf{X}$ は円周を 2 周だけ回り $L_{\mathbf{X}}$ は円周の長さの 2 倍になってしまう．この落とし穴を避けさえすれば，次の定理のように弧長は助変数表示に**依存しなくなる**．

定理 3.1 2 つの写像 $\mathbf{x}(q)$, $a \le q \le b$ と $\mathbf{X}(Q)$, $A \le Q \le B$ を，1 つの曲線 C の 1 対 1 の助変数表示とする．このとき，2 つの助変数表示は C に対して同じ弧長 $L_{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{X}}$ を与える．

証明：議論を $\mathbf{x}(a) = \mathbf{X}(A)$ の場合に限ろう．（これが成立しないのは，助変数の増加する向きが逆で，$\mathbf{x}(a) = \mathbf{X}(B)$ の場合である．この場合にあわせて証明を修正することは易しい.）



証明で最も本質的なのは，上の図式が可換になる，すなわち $\mathbf{x}(q) = \mathbf{X}(\varphi(q))$ となるような微分可能な関数 $Q = \varphi(q)$ を構成することである．実際，写像 $\mathbf{X}$ は 1 対 1 なので，曲線を定義域とする逆写像 $\mathbf{X}^{-1}$ がある．したがって，$\varphi(q) = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x}(q))$ とすればよい．そうすれば $\mathbf{x}(q) = \mathbf{X}(\varphi(q))$ は自動的に成立する．仮に φ が微分可能なら，合成関数の微分法により，$\mathbf{x}'(q) = \mathbf{X}'(\varphi(q))\varphi'(q)$ となり，

$$\|\mathbf{x}'(q)\|\,dq = \|\mathbf{X}'(\varphi(q))\|\,|\varphi'(q)|\,dq = \|\mathbf{X}'(\varphi(q))\|\,\varphi'(q)\,dq = \|\mathbf{X}'(Q)\|\,dQ$$

が導ける．この式の 2 番目の等号は，φ が q の増加関数で $\varphi'(q) \ge 0$ であり $|\varphi'(q)| = \varphi'(q)$ となることによる．そして最後に，置換積分の公式を使うと，$\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$ なので，

$$L_{\mathbf{x}} = \int_a^b \|\mathbf{x}'(q)\|\,dq = \int_A^B \|\mathbf{X}'(Q)\|\,dQ = L_{\mathbf{X}}$$

となって，2 つの助変数表示は曲線に対して同じ弧長を与える．

この証明を完成するには，逆写像 $\mathbf{X}^{-1}$ が C 上で微分可能であることを示さなくてはならない．それが示せれば，合成関数の微分法により，$\varphi(q) = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x}(q))$ も微分可能となるからである．この議論は技術的で，後の内容とも直接は関係しないので，飛ばしてしまっても以後の内容を理解するのに困ることはない．

しばらくの間，仮に逆写像 $\mathbf{X}^{-1}$ が微分可能であることがすでにわかっているとして，その微分の形を決定したいという状況を考えよう．助変数表示を $\mathbf{X}(Q) = (X(Q), Y(Q))$ とすると，$\mathbf{X}^{-1}$ が $\mathbf{X}$ の逆写像であることから，

$$Q = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q)) = \mathbf{X}^{-1}(X(Q), Y(Q))$$

となる．写像 $\mathbf{X}^{-1}$ の定義域を，曲線 C を含む $\mathbf{R}^2$ の領域に適当に拡張する．このとき微分は勾配ベクトル

$$\nabla\mathbf{X}^{-1}(X,Y) = \left(\frac{\partial\mathbf{X}^{-1}}{\partial X}, \frac{\partial\mathbf{X}^{-1}}{\partial Y}\right)$$

となる．曲線 C 上の点 $X(Q)$ における勾配ベクトル $\nabla\mathbf{X}^{-1}$ を，曲線の接ベクトル $\mathbf{X}'$ に平行な成分 $m(Q)\mathbf{X}'(Q)$ と，それに直交する成分 $\mathbf{N}(Q)$ に分解して，

$$\nabla\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q)) = m(Q)\mathbf{X}'(Q) + \mathbf{N}(Q)$$

とする．ここで $m(Q)$ はスカラー関数である．ここで，等式 $Q = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q))$ の両辺を Q で微分すると，合成関数の微分法を用いて，

$$1 = \frac{dQ}{dQ} = \frac{\partial\mathbf{X}^{-1}}{\partial X}\frac{dX}{dQ} + \frac{\partial\mathbf{X}^{-1}}{\partial Y}\frac{dY}{dQ} = \nabla\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q))\cdot\mathbf{X}'(Q)$$

となる．ところが，$\nabla\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q)) = m(Q)\mathbf{X}'(Q) + \mathbf{N}(Q)$ と，$\mathbf{X}'(Q)\cdot\mathbf{N}(Q) = 0$ を用いると，

$$1 = m(Q)\,\mathbf{X}'(Q)\cdot\mathbf{X}'(Q) = m(Q)\|\mathbf{X}'(Q)\|^2$$

を得る．ここで，任意の Q に対して $\|\mathbf{X}'(Q)\| > 0$ なので，$m(Q)$ について解くことができて，$m(Q) = 1/\|\mathbf{X}'(Q)\|^2$ である．したがって，**もしも** $\mathbf{X}^{-1}$ が微分可能であるならば微分は

$$\nabla\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q)) = \frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\mathbf{X}'(Q) + \mathbf{N}(Q)$$

でなければならない．

逆写像 $\mathbf{X}^{-1}$ が実際に微分可能であることを示すのに，

$$r(\Delta P) = \mathbf{X}^{-1}(P+\Delta P) - \mathbf{X}^{-1}(P) - \frac{1}{\|\mathbf{X}'(\mathbf{X}^{-1}(P))\|^2}\mathbf{X}'(\mathbf{X}^{-1}(P))\cdot\Delta P$$

を導入する．微分可能性の定義から，

$$\frac{r(\Delta P)}{\|\Delta P\|} \to 0 \quad (\Delta P \to \mathbf{0})$$

が成立するならば，$\mathbf{X}^{-1}$ は点 P において接線方向に微分可能であり，その微分は $\nabla\mathbf{X}^{-1}(P) = (1/\|\mathbf{X}'(\mathbf{X}^{-1}(P))\|^2)\mathbf{X}'(\mathbf{X}^{-1}(P)) + \mathbf{N}(\mathbf{X}^{-1}(P))$ である．それでは，量 $r(\Delta P)$ を計算しよう．まず，$\mathbf{X}$ が曲線への 1 対 1 写像であることから，

$$P = \mathbf{X}(Q), \qquad P + \Delta P = \mathbf{X}(Q + \Delta Q),$$

を満たすような値 Q と $Q + \Delta Q$ が一意的に存在し，$\Delta P \to \mathbf{0}$ のとき，そしてそのときに限って $\Delta Q \to 0$ となる．この Q と ΔQ に対して，

$$r(\Delta P) = Q + \Delta Q - Q - \frac{1}{\|\mathbf{X}'(\mathbf{X}^{-1}(P))\|^2}\mathbf{X}'(\mathbf{X}^{-1}(P))\cdot\Delta P = \Delta Q - \frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\mathbf{X}'(Q)\cdot\Delta P$$

が成り立つ．写像 $\mathbf{X}$ は Q において微分可能なので，テイラーの定理から

$$\Delta P = \mathbf{X}(Q + \Delta Q) - \mathbf{X}(Q) = \mathbf{X}'(Q)\Delta Q + R(\Delta Q)$$

となる．ここで，

$$\frac{R(\Delta Q)}{|\Delta Q|} \to \mathbf{0} \quad (\Delta Q \to 0)$$

である．したがって，$\Delta P = \mathbf{X}'(Q)\Delta Q + R(\Delta Q)$ とすると，$r(\Delta P)$ は

$$\begin{aligned} r(\Delta P) &= \Delta Q - \frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\mathbf{X}'(Q)\cdot(\mathbf{X}'(Q)\Delta Q + R(\Delta Q)) \\ &= \Delta Q - \frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}(\mathbf{X}'(Q)\cdot\mathbf{X}'(Q)\Delta Q + \mathbf{X}'(Q)\cdot R(\Delta Q)) \\ &= -\frac{\mathbf{X}'(Q)\cdot R(\Delta Q)}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2} \end{aligned}$$

となる．この量を $\|\Delta P\|$ で割ったときにどうなるかを考えるために，まず，

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta P\|}{|\Delta Q|} &= \frac{\|\mathbf{X}'(Q)\Delta Q + R(\Delta Q)\|}{|\Delta Q|} = \left\|\mathbf{X}'(Q)\frac{\Delta Q}{|\Delta Q|} + \frac{R(\Delta Q)}{|\Delta Q|}\right\| \\ &= \left\|\pm\mathbf{X}'(Q) + \frac{R(\Delta Q)}{|\Delta Q|}\right\| \to \|\mathbf{X}'(Q)\| \quad (\Delta Q \to 0) \end{aligned}$$

に着目しよう．よって，

$$\frac{r(\Delta P)}{\|\Delta P\|} = \frac{r(\Delta P)}{|\Delta Q|}\frac{|\Delta Q|}{\|\Delta P\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\left[\mathbf{X}'(Q)\cdot\frac{R(\Delta Q)}{|\Delta Q|}\right]\frac{|\Delta Q|}{\|\Delta P\|}$$

である．ここで，$\Delta P \to \mathbf{0}$ のとき，そしてそのときに限って，$\Delta Q \to 0$ となるので，

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta P \to \mathbf{0}} \frac{r(\Delta P)}{\|\Delta P\|} &= -\frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\left[\mathbf{X}'(Q)\cdot\left(\lim_{\Delta Q \to 0}\frac{R(\Delta Q)}{|\Delta Q|}\right)\right]\lim_{\Delta Q \to 0}\frac{|\Delta Q|}{\|\Delta P\|} \\ &= -\frac{\mathbf{X}'(Q)\cdot\mathbf{0}}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|} = 0 \end{aligned}$$

である．これで，$\mathbf{X}^{-1}$ が微分可能であることの証明が完成する．また，微分が

$$\nabla\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}(Q)) = \frac{1}{\|\mathbf{X}'(Q)\|^2}\mathbf{X}'(Q) + \mathbf{N}(Q)$$

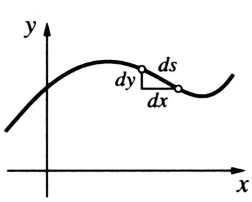
であることも，証明の前半部の発見的な議論には依存しないで証明されたことになる．　**証明終**

定義 3.2 写像 $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ により助変数表示された曲線 C の**弧長関数** (arc-length function) とは，

$$s(q) = \int_a^q \|\mathbf{x}'(q)\| dq$$

のことをいう．

弧長関数について，$s(a) = 0$ および $s(b) = L$ が成立する．ただし，L は曲線 C の弧長である．また，$\mathbf{x}(q) = (x(q), y(q))$ としたとき，弧長関数は，



$$s(q) = \int_a^q ds = \int_a^q \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

というピタゴラスの定理との関係が明らかな形にも表せる．これを定義から導くために，まず導関数 $s'(q)$ を求める．微積分学の基本定理により，これは s を定義する積分の被積分関数そのものなので，

$$s'(q) = \frac{ds}{dq} = \|\mathbf{x}'(q)\| = \left(\left(\frac{dx}{dq} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dq} \right)^2 \right)^{1/2}$$

である．したがって，微分 ds は，

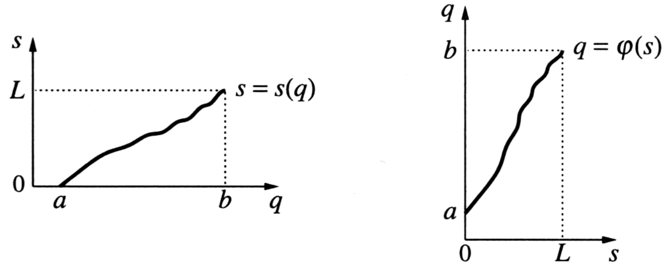
$$ds = \left(\left(\frac{dx}{dq} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dq} \right)^2 \right)^{1/2} dq = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

となり，上の形の積分が導かれる．

弧長による助変数表示

曲線には無限個の助変数表示があるが，その中でも特別によい性質を持つ特別な助変数表示が，任意の曲線 C について，1 つずつある．それは，弧長 s そのものを助変数とする助変数表示 $\mathbf{y}(s)$ である．この $\mathbf{y}$ の持つ特別な性質は，早さが $\|\mathbf{y}'(s)\| \equiv 1$, すなわち**単位速さ**の助変数表示だということである．したがって，点 $\mathbf{y}(s)$ は始点から曲線に沿ってちょうど長さ s だけ進んだ点になる．

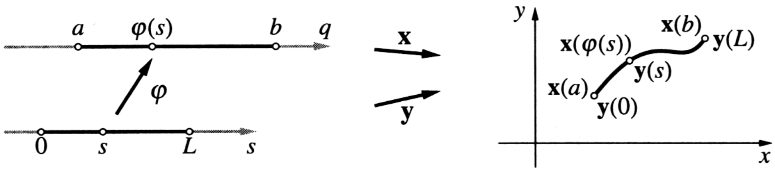
曲線 C の任意の助変数表示 $\mathbf{x}$ から，弧長による助変数表示 $\mathbf{y}$ を構成することを考えよう．アイデアは，$\mathbf{x}$ の助変数の“速さ”を調整するということである．弧長関数の微分は $s'(q) = \|\mathbf{x}'(q)\|$ であり，$\|\mathbf{x}'(q)\| > 0$ なので，$s'(q) > 0$ を満たす．したがって，$s : [a, b] \to [0, L]$ は滑らかな狭義単調増加関数で，滑らかな逆関数を持つ．



関数 $q = \varphi(s)$ を $s = s(q)$ の逆関数とすると，

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{ds/dq} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(q)\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(\varphi(s))\|} > 0$$

である．



速さを調整した助変数は，関数 $q=\varphi(s)$ により与えられる．これを用いて，上の図式のように，写像 $\mathbf{y}(s)$ を $\mathbf{y}(s)=\mathbf{x}(\varphi(s))$ により定義すると，これが構成しようとしていた助変数表示になっている．まず，$\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ と同じ像を持つ．さらに，合成関数の微分法から，

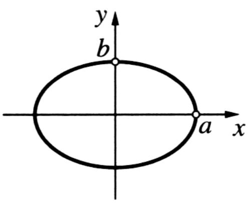
$$\mathbf{y}'(s)=\frac{d\mathbf{y}}{ds}=\frac{d\mathbf{x}}{dq}\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\mathbf{x}'(q)}{\|\mathbf{x}'(q)\|}$$

となり，確かに $[0,L]$ の任意の s に対して $\|\mathbf{y}'(s)\|=1$ が成立している．

例: 楕円の弧長

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad 0<b<a$$



の弧長による助変数表示を構成してみよう．助変数表示 $\mathbf{x}(q)=(a\sin q, b\cos q)$ から出発する．助変数 q は，正の y 軸上の始点 $q=0$ から，楕円を時計回りに増加する．弧長関数は

$$\begin{aligned} s(q) &= \int_0^q \|\mathbf{x}'(q)\|\,dq = \int_0^q \sqrt{a^2\cos^2 q + b^2\sin^2 q}\,dq \\ &= \int_0^q \sqrt{a^2(1-\sin^2 q)+b^2\sin^2 q}\,dq = a\int_0^q \sqrt{1-k^2\sin^2 q}\,dq \end{aligned}$$

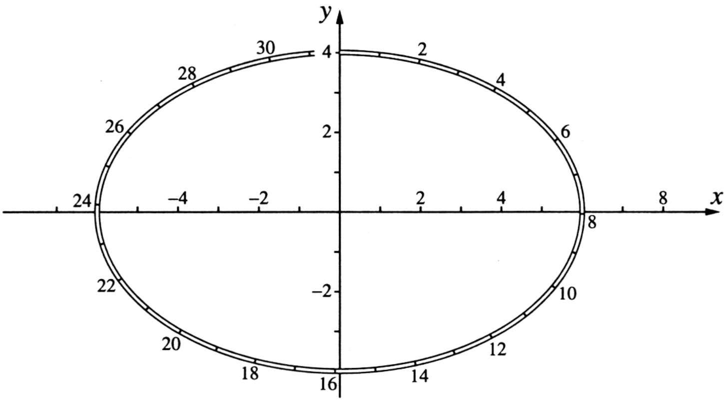
となる．ただし，$k=\sqrt{a^2-b^2}/a$ であり k は $0<k<1$ を満たす．(楕円は長半径と短半径を持つ．変数 k は**母数**(modulus)と呼ばれ，楕円の形を表す指標である．母数 $k=0$ のときには，$a=b$ で，楕円は真円になる．母数 k が増加するにつれ，楕円はだんだん真円の形からずれてつぶれていく．このため，k は楕円の**離心率**(eccentricity)とも呼ばれる.)

楕円積分

積分 $s(q)$ は初等関数では書き表せない．しかし，この種の積分は振り子の運動をはじめ，非常に多くの重要な問題に現れる．このグループの積分は，いま扱っている問題から名前をとって，**楕円積分**(elliptic integral)と呼ばれる．楕円積分とその逆関数(**楕円関数**(elliptic function)という名前がついている)は 18 世紀以来詳しく研究されてきた．その値は，数表を引いたり，現在であれば，計算機による数式処理システムを利用したりして知ることができる．

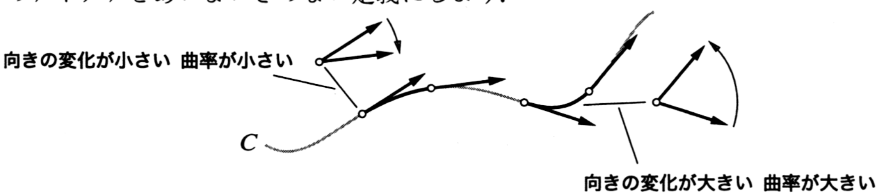
逆関数 $q=\varphi(s)$ から弧長による助変数表示 $\mathbf{y}(s)=\mathbf{x}(\varphi(s))$ が得られる．下に描いたのが，$a=6, b=4$ の場合である．全体の 1/4 周分の長さは 8 弱

であることが見てとれる．より正確には，1 周の長さは約 31.73 である．



曲線の曲率

曲率(curvature) は，直観的には，曲線が向きを変える割合，つまり，曲線上を一定の速さで進んでいったときに接ベクトルが変化する割合である．このアイデアをあいまいさのない定義にしよう． **曲率は変化率**



定義 3.3 曲線 C の弧長による助変数表示を $\mathbf{y}(s)$ とする．次のように定義する．

$$\textbf{C の単位接ベクトル：}\quad \mathbf{u}(s) = \frac{d\mathbf{y}}{ds},$$

$$\textbf{C の曲率ベクトル：}\quad \mathbf{k}(s) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{y}}{ds^2},$$

$$\textbf{点 s における曲率：}\quad \kappa(s) = \|\mathbf{k}(s)\|.$$

定理 3.2 曲線 C 上の各点 s で $\mathbf{k}(s) \perp \mathbf{u}(s)$ である．

証明： ベクトル $\mathbf{u}(s)$ は単位ベクトルなので，$[0, L]$ の任意の s について，$1 = \mathbf{u}(s) \cdot \mathbf{u}(s)$ であり，

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{u}(s) \cdot \mathbf{u}(s)) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \quad (s \text{ は任意})$$

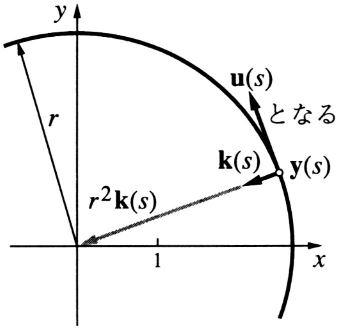
なので，$\mathbf{k}(s) \perp \mathbf{u}(s)$ である． **証明終**

ベクトル $\mathbf{k}$ から曲線のどのような性質がわかるのかを知るために，性質の **例**

よくわかっている曲線である半径 r の円

$$\mathbf{x}(q) = r(\cos(q), \sin(q)), \qquad \mathbf{x}'(q) = r(-\sin(q), \cos(q))$$

を例にとって考えてみよう．円全体を考えるために，$0 \le q \le 2\pi$ とする．接速度ベクトルの長さは $\|\mathbf{x}'(q)\| = r$ であり，弧長関数は



$$s = \int_0^q r\,dq = rq$$

となる．したがって，速さの調整は $q = \varphi(s) = s/r$ で行われ，

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s/r) = r(\cos(s/r), \sin(s/r)), \quad 0 \le s \le 2\pi r,$$
$$\mathbf{u}(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)),$$
$$\mathbf{k}(s) = -\frac{1}{r}(\cos(s/r), \sin(s/r)) = -\frac{1}{r^2}\mathbf{y}(s),$$
$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

となる．曲率ベクトル $\mathbf{k}$ は円の中心を向いており，中心の位置は，$\mathbf{y}(s)+r^2\mathbf{k}(s)$ で与えられることがわかる．この例では，曲率 κ は半径の逆数になるので，このことから，任意の滑らかな曲線 C について次の定義をする．

定義 3.4 曲線 C の，s における**曲率半径**(radius of curvature)を $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ と定義する．曲線 C の，s における**曲率中心**(center of curvature)を点 $\mathbf{c}(s) = \mathbf{y}(s) + \rho^2(s)\mathbf{k}(s)$ と定義する．

曲線 C の s における曲率中心 $\mathbf{c}(s)$ は，また助変数表示された曲線と見なすことができる．これを曲線 C の**縮閉線**(evolute)と呼ぶ．曲線 C の弧長変数 s は，縮閉線 $\mathbf{c}(s)$ の弧長変数ではない．

円は，点 s によらず一定の曲率を持つ．逆に，曲率が一定であるような曲線は円(を一部分に制限したもの)に限られる．これが次の定理の主張である．

定理 3.3 曲率が一定の値 κ をとる曲線は，$\rho = 1/\kappa$ とおいたとき，弧長助変数 s で，$\mathbf{y}(s) = (\rho\cos(\kappa s + \omega) + a, \rho\sin(\kappa s + \omega) + b)$ と助変数表示される．

証明： 曲率が一定の値をとる曲線の，弧長による助変数表示を $\mathbf{y}(s) = (x(s), y(s))$ とする．このとき，

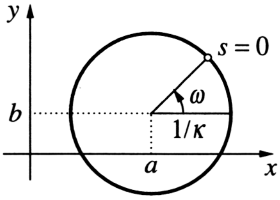
$$\|\mathbf{u}(s)\| = 1, \qquad (x')^2 + (y')^2 = 1,$$
$$\|\mathbf{k}(s)\| = \kappa, \qquad (x'')^2 + (y'')^2 = \kappa^2$$

である．この 1 番目の条件から，任意の s に対して $\mathbf{u}(s) = (x'(s), y'(s))$ が半径 1 の円周上にあることが導かれる．したがって，

$$x'(s) = \cos\varphi(s), \qquad y'(s) = \sin\varphi(s)$$

となるような関数 $\varphi(s)$ がある．これらを s で微分すると，$x''(s) = -\varphi'\sin\varphi$，および $y''(s) = \varphi'\cos\varphi$ である．これに，2 番目の $\mathbf{k}$ に対する条件を用いると，

$$(\varphi')^2 = (x'')^2 + (y'')^2 = \kappa^2$$



となる．したがって，$\varphi'(s) = \kappa$ であり，積分すると，ω_0 を積分定数として，$\varphi(s) = \kappa s + \omega_0$ となる．（なお，$\phi'(s) = -\kappa$ も許されるが，この場合にも半径 ρ の円になる．）ゆえに，a, b を積分定数として，

$$x' = \cos(\kappa s + \omega_0), \qquad y' = \sin(\kappa s + \omega_0),$$
$$x = \frac{1}{\kappa}\sin(\kappa s + \omega_0) + a, \qquad y = -\frac{1}{\kappa}\cos(\kappa s + \omega_0) + b$$

である．位相を $\omega = \omega_0 - \pi/2$ と変更すると，

$$x = \frac{1}{\kappa}\cos(\kappa s + \omega) + a, \qquad y = \frac{1}{\kappa}\sin(\kappa s + \omega) + b$$

を得る．これは半径 $\rho = 1/\kappa$ の円である．ここでは決まらなかった積分定数 a, b は，円の中心の位置を，ω は始点 $s = 0$ での位相を表す． **証明終**

高次元

ここまでに展開した議論は，すべて高次元の場合にそのまま適用できる．空間 $\mathbf{R}^n$ の**助変数表示された曲線**とは，滑らかな写像

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : [a,b] &\to \mathbf{R}^n \\ q &\mapsto \mathbf{x}(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q)) \end{aligned}$$

のことである．点 $\mathbf{x}(q)$ での曲線の接ベクトルは $\mathbf{x}'(q)$ である．曲線 C の助変数表示 $\mathbf{x}$ は無限個存在する．曲線 C の弧長は

$$s(q) = \int_a^q \|\mathbf{x}'(q)\|\, dq = \int_a^q \sqrt{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}, \qquad L = s(b)$$

で与えられる．区間 $[a, b]$ のすべての q に対して $\|\mathbf{x}'(q)\| > 0$ であるとき，$s(q)$ は逆関数を持つ．これを $q = \varphi(s)$ とするとき，$0 \leq s \leq L$ に対して次のように定義する．

曲線 C の弧長による助変数表示：	$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(\varphi(s))$,
曲線 C の単位接ベクトル：	$\mathbf{u}(s) = \mathbf{y}'(s)$,
曲線 C の曲率ベクトル：	$\mathbf{k}(s) = \mathbf{u}'(s) = \mathbf{y}''(s)$,
s における曲率：	$\kappa(s) = \|\mathbf{k}(s)\|$,
s における曲率半径：	$\rho(s) = 1/\kappa(s)$,
s における曲率中心：	$\mathbf{c}(s) = \mathbf{y}(s) + \rho^2(s)\mathbf{k}(s)$.

この場合にも $\mathbf{k}(s) \perp \mathbf{u}(s)$ は成立するが，$n > 2$ の場合にはこの 2 つのベクトルが $\mathbf{R}^n$ の基底をなすわけではない．

もう 1 つの曲率公式

曲線の曲率については，5.4 節でさらに深く調べる．そこでは，任意の助変数表示から，いったん弧長による助変数表示に移ることなく曲率を直接に求める式

$$\kappa = \sqrt{\frac{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'') - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')^2}{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')^3}}$$

を証明する．

練習問題

1. 次の曲線 $C : \mathbf{x}(q),\ a \leq q \leq b$ それぞれについて，次を行え．
   - 弧長 s を q で $s = s(q)$ のように表せ．
   - 弧長による助変数表示を求めよ．
   - 各点での曲率ベクトルと曲率半径を求めよ．
   - 曲線を描け．

   (a) $\mathbf{x}(q) = (3q - 2, 4q + 3), \quad 0 \leq q \leq 5.$
   (b) $\mathbf{x}(q) = (3\cos 2q, 3\sin 2q), \quad 0 \leq q \leq \pi.$
   (c) $\mathbf{x}(q) = (3 + \cos q, 2 + \sin q), \quad 0 \leq q \leq 2\pi.$
   (d) $\mathbf{x}(q) = (\cos^3 q, \sin^3 q), \quad 0 \leq q \leq \pi/2.$
   (e) $\mathbf{x}(q) = (\frac{1}{3}q^3, \frac{1}{2}q^2), \quad 0 \leq q \leq 2.$
   (f) $\mathbf{x}(q) = (e^q \cos q, e^q \sin q), \quad 0 \leq q \leq \pi/2.$

2. (a) 曲線
$$\mathbf{X}(q) = \left(\frac{2q}{1+q^2}, \frac{1-q^2}{1+q^2}\right), \quad -\infty < q < \infty,$$
   の，点 $q = -2, -1, 0, 1, 2$ における接ベクトル $\mathbf{X}'(q)$ と加速度ベクトル $\mathbf{X}''(q)$ を描け．（曲線 $\mathbf{X}$ は原点を中心とする半径 1 の円であることに注意せよ．）各点における加速度 $\mathbf{X}''$ と接ベクトルの大きさの関係を正しく再現せよ．助変数 q が q 軸上で加速しているときと減速しているときについて，加速度 $\mathbf{X}''$ が接ベクトル $\mathbf{X}'(q)$ の関係を述べよ．

   (b) 任意の助変数表示に適用できる曲率の公式を用いて，$\mathbf{X}$ の曲率がいたるところ 1 であることを示せ．
   (c) 公式から直接 $\mathbf{X}$ の弧長関数 $s(q)$ を決定せよ．
   (d) 曲線 $\mathbf{X}$ は半径 1 の円なので，弧長は 2π である．このことを関数 $s(q)$ の形から直接導け．
   (e) 弧長関数の逆関数 $q(s)$ を用いて，弧長による助変数表示 $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{X}(q(s))$ を作れ．領域 $a < s < b$ を示せ．
   (f) 曲率ベクトル $\mathbf{K}(s) = \mathbf{Y}''(s)$ を計算し，もともとの加速度ベクトル $\mathbf{X}''$ と比較せよ．

3. 定理 3.1 の証明は，$\mathbf{x}(a) = \mathbf{X}(B)$ であるとき（したがって $\varphi(q)$ が減少関数であるとき）にはどのように修正すればよいかを述べよ．

4. 次の 2 つの楕円の周の長さをそれぞれ求めよ．
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

5. (a) 空間曲線 $\mathbf{x}_a(q) = (\cos q, \sin q, aq)$ を描け．その形を言葉で説明し，変数 $a \geq 0$ を変化させると形がどう変わるか述べよ．特に，$a \to 0$ および $a \to \infty$ のときに形がどうなるか述べよ．

   (b) 曲線 $\mathbf{x}$ について，弧長関数 $s_a(q)$ とその逆関数 $q_a(s)$ を求めよ．これを用いて弧長による助変数表示 $\mathbf{y}_a(s) = \mathbf{x}_a(q(s))$ と曲率ベクトル $\mathbf{k}_a(s)$ を求めよ．

(c) 曲率 κ_a を次の 2 つの方法で計算せよ．すなわち，1 つは上で求めた $\mathbf{k}_a$ の長さとして計算する方法，もう 1 つは，$\mathbf{x}_a$ とその導関数から曲率の公式を用いて直接に計算する方法である．

(d) 上の計算により，1 つの曲線上では(つまり，a を固定すると) κ_a が位置によらず一定であることが明らかになったはずである．曲率 κ_a を，a の関数として $a \geq 0$ の範囲で描き，$a \to \infty$ のときの，κ_a の極限を求めよ．$\mathbf{x}_a$ の形と κ_a の値との間の関係を説明せよ．

6. (a) 曲線 $\mathbf{x}_a(q) = (e^{aq}\cos q, e^{aq}\sin q)$ は，**対数らせんまたは等角らせん** (equiangular spiral) と呼ばれる．この名前は，接ベクトル $\mathbf{x}'_a(q)$ と動径ベクトル $\mathbf{x}_a(q)$ との間の角が一定であるからことによる．このことを示し，その角の大きさを変数 a の関数として求めよ．

(b) 無限区間 $-\infty < q \leq 0$ に対して，$a > 0$ のときに，$\mathbf{x}_a(q)$ の弧長を求めよ．

7. (a) 曲線 $\mathbf{x}(q) = (\cos^2 q, \cos q \sin q, \sin q)$ が，単位球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

上にあることを示せ．

(b) 区間 $-\pi/2 \leq q \leq \pi/2$ について $\mathbf{x}(q)$ を描け．始点，終点はそれぞれどこか．赤道(球面上で $z = 0$ を満たす点)と交わるか．交わるならその点での q の値を求めよ．

(c) 始点と終点では，曲線の接線ベクトルはそれぞれどの方向を向いているか．これらのベクトルを描け．

(d) 曲線の長さを求めよ．(注: 数値積分を行うか，または楕円積分の知識を使え．)

3.3 加速度運動

世界線と固有時間

運動のグラフとしての世界線

ここまでの準備で，慣性座標系 R から見た，加速度運動する観測者 G を考えることができる．観測者 G の世界線は，一般には直線ではない．時刻 t における G の空間的位置が，滑らかな 3 次元ベクトル関数 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で与えられるとすると，R の時空での G の世界線は $\mathbf{x}$ のグラフになる．ここで，グラフとは，助変数表示された曲線で，

$$\mathbb{X}(t) = (t, x(t), y(t), z(t))$$

のように第 1 成分が助変数そのもの，に一致し，それ以降の成分が $\mathbf{x}$ であるという特別な曲線である．観測者 G の 4 元速度ベクトルは

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{X}'(t) = (1, x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, \mathbf{v}(t))$$

という決まった形になる．実は，次の議論からわかる通り，これは**未来ベクトル**である．まず，速度の上限から，すべての t について $v^2(t) = \|\mathbf{v}(t)\|^2 < 1$ であるので，$Q(\mathbb{V}(t)) = 1 - v^2(t) > 0$ がわかり，$\mathbb{V}(t)$ は時間的である．さ

らに，第1成分が正なので未来ベクトルである．

助変数表示された曲線としての世界線

しかし，たとえ話を $(1+1)$ 次元時空に限ったとしても，G の世界線は，上で定義した意味でのグラフとして指定されるとは限らない．例えば，別の慣性座標系 $C:(T,Z)$ が，双曲回転 $H_u: R \to C$ で R と結びつけられているとする．G の R での世界線がグラフ $\mathbb{X}(t)=(t,z(t))$ だとすると，C での世界線は

$$\widehat{\mathbb{X}}(t)=H_u(\mathbb{X}(t)), \qquad \widehat{\mathbb{X}}(t):\begin{cases} T(t)=t\cosh u+z(t)\sinh u, \\ Z(t)=t\sinh u+z(t)\cosh u \end{cases}$$

となる．これは $Z=Z(T)$, という単純な形ではないので，$\widehat{\mathbb{X}}$ は上で定義した意味のグラフとして与えられていない．しかし，これは t で助変数表示された曲線ではある．さらに，C から見ても G は常に未来に向けて運動している．すなわち，$\widehat{\mathbb{X}}'(t)$ は未来ベクトルである．なぜなら，$\mathbb{X}'(t)$ は未来ベクトルで H_u は未来ベクトルを未来ベクトルに写すので，$\widehat{\mathbb{X}}'(t)=H_u(\mathbb{X}'(t))$ も未来ベクトルであることがわかる．これらのことから，次の定義に導かれる．

定義 3.5 世界線 G とは，ある慣性座標系 R において，助変数表示された滑らかな曲線

$$\begin{aligned} \mathbb{X}:[a,b]&\to R \\ q\ &\mapsto \mathbb{X}(q)=(t(q),x(q),y(q),z(q)) \end{aligned}$$

として指定される事象の集合である．ただし，$[a,b]$ に属する任意の q について $\mathbb{X}'(q)$ は未来ベクトルでなければならない．

$\mathbb{X}'(q)$ は未来ベクトルであるから，助変数表示 $\mathbb{X}$ は非特異である．つまり，局所的な1対1対応を保証するための技術的な条件 $\|\mathbb{X}'\|>0$ を満足する．実際，次の命題は世界線が大域的に1対1写像であることを主張する．

命題 3.3 $\mathbb{X}(q)=(t(q),x(q),y(q),z(q))$ が世界線 G の助変数表示であるなら，$t(q)$ は狭義単調増加関数である．したがって，$\mathbb{X}(q)$ は大域的に1対1写像である．

証明： $\mathbb{X}'(q)=(t'(q),x'(q),y'(q),z'(q))$ は時間的未来ベクトルであるから，

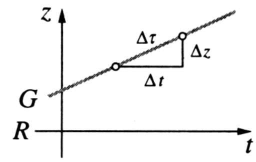
$$t'(q)>\sqrt{(x'(q))^2+(y'(q))^2+(z'(q))^2}\geq 0$$

したがって，グラフ $t(q)$ の傾きはいたるところ正であり，$t(q)$ は狭義単調増加関数である．すなわち，$q_1<q_2$ ならば $t(q_1)<t(q_2)$ であり，特に，$\mathbb{X}(q_1)\neq\mathbb{X}(q_2)$ である．よって，異なる助変数 q が $\mathbb{X}$ によって，同じ点に写されることはない． **証明終**

固有時間

特殊相対論の重要な帰結の1つは，互いに相対運動している2人の観測者の時間の進み方が異なる，ということである．観測者 G が R の座標系から見て等速度で運動しているとき，G の固有時間がどれだけ経過したかは，ミ

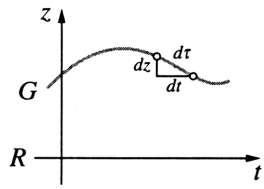
ンコフスキ–ピタゴラスの定理(定理 2.9)を，G の世界線(今の場合は直線である)に適用して



$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$$

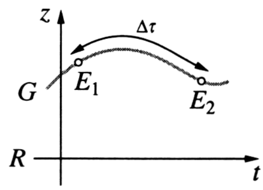
と求められる．それでは，G が R の座標系から見て**非**等速度で運動している場合には，R から見た G の世界線に沿って経過した固有時間はどうなるだろうか．

相対論における固有時間は，ユークリッド幾何における弧長に対応している．曲線の弧長は，微分 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ の積分なので，差分 $\Delta\tau$ に対応する微分



$$d\tau = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

を考えよう．座標系 R で G の世界線が $\mathbb{X}(q)$ と助変数表示されるとする．その上にある 2 つの事象 E_1, E_2 が $\mathbb{X}(q_i) = E_i$, $i = 1, 2$ と表されるとすると，E_1 と E_2 の間の固有時間の差は



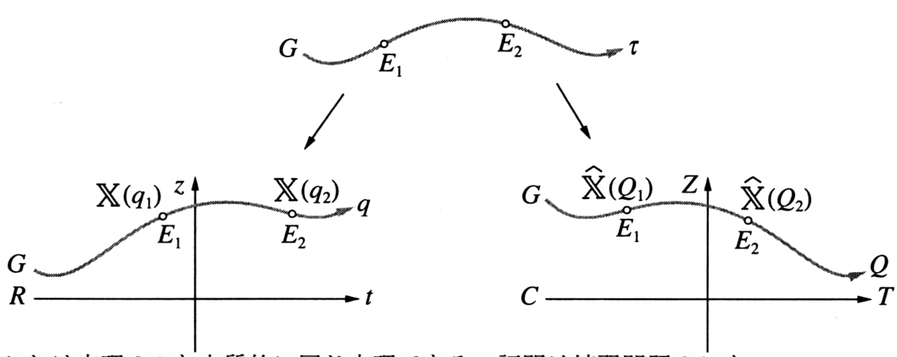
$$\Delta\tau = \int_{E_1}^{E_2} d\tau = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

$$= \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\left(\frac{dt}{dq}\right)^2 - \left(\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2\right)}\, dq = \int_{q_1}^{q_2} \|\mathbb{X}'(q)\|\, dq$$

である．次の定理が示すように，上の式で計算される，2 つの事象の間に経過した固有時間は物理的に意味がある．すべての慣性座標系で同じ値になるのだ．

定理 3.4 慣性座標系 R,C を考える．観測者 G の世界線が，R では $\mathbb{X}(q)$, C では $\widehat{\mathbb{X}}(Q)$ と助変数表示されるとする．その上にある 2 つの事象 $E_i = \mathbb{X}(q_i) = \widehat{\mathbb{X}}(Q_i)$, $i = 1, 2$ を考える．このとき，

$$\int_{q_1}^{q_2} \|\mathbb{X}'(q)\|\, dq = \Delta\tau = \int_{Q_1}^{Q_2} \|\widehat{\mathbb{X}}'(Q)\|\, dQ.$$



証明： これは定理 3.1 と本質的に同じ定理である．証明は練習問題 3 になっている．

定義 3.6 世界線 G が座標系 R で $\mathbb{X}(q)=(t(q),x(q),y(q),z(q))$, $a\le q\le b$ であるとき，G 上の**固有時間助変数**(proper-time parameter)とは，関数

$$\tau(q)=\int_a^q\|\mathbb{X}'(q)\|\,dq=\int_a^q\sqrt{t'(q)^2-(x'(q)^2+y'(q)^2+z'(q)^2)}\,dq$$

のことをいう．

この関数を用いると，G の世界線上の 2 つの事象 $\mathbb{X}(q_1)$, $\mathbb{X}(q_2)$ の間の固有時間の経過は単に $\Delta\tau=\tau(q_2)-\tau(q_1)$ となる．

定理 3.5 慣性座標系 R において，任意の世界線 G は固有時間 τ による助変数表示を持つ．固有時間による助変数表示 $\mathbb{G}(\tau)$ では，4 元速度は**単位** 4 元ベクトルである．すなわち，$\|\mathbb{G}'(\tau)\|\equiv 1$.

証明：この定理は，ユークリッド幾何における曲線の弧長による助変数表示に関する定理と完全に並行している．助変数表示 $\mathbb{X}(q)$ から G の固有時間を

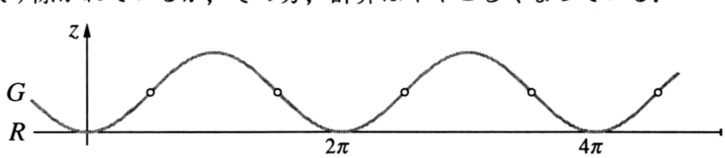
$$\tau(q)=\int_a^q\|\mathbb{X}'(q)\|\,dq$$

によって求めたとしよう．$d\tau/dq=\|\mathbb{X}'(q)\|>0$ から，関数 $\tau=\tau(q)$ は逆関数 $q=\varphi(\tau)$ を持つことがわかるので，これを使って $\mathbb{G}(\tau)=\mathbb{X}(\varphi(\tau))$ と定義する．これが固有時間による助変数表示になっており，次の計算から $\|\mathbb{G}'(\tau)\|\equiv 1$ が示される．

$$\frac{d\mathbb{G}}{d\tau}=\frac{d\mathbb{X}}{dq}\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{d\mathbb{X}}{dq}\frac{1}{d\tau/dq}=\frac{\mathbb{X}'}{\|\mathbb{X}'\|},\qquad \left\|\frac{d\mathbb{G}}{d\tau}\right\|=\frac{\|\mathbb{X}'\|}{\|\mathbb{X}'\|}\equiv 1.$$

証明終

例: 往復運動の場合の固有時間　G が z 軸上を単振動する場合に，固有時間による助変数表示を求めよう．最初の例は，計算は簡単だが，扱っている世界線では，往復のたびに一瞬だけ G が光速に達してしまうという非物理的なものである．2 番目の例では，この欠陥は取り除かれているが，その分，計算はややこしくなっている．



例 1　G の世界線を $z=1-\cos t$ のグラフ，すなわち，$\mathbb{X}(t)=(t,1-\cos t)$ とする．このとき，$\mathbb{X}'(t)=(1,\sin t)$, よって，$\|\mathbb{X}'(t)\|=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|$ であり，時刻 $t=(2n+1)\pi/2$（n は整数，図ではこの事象に印がつけてある.）を除いては G の速さは光速 1 より小さい．世界線の 1 周期分は，互いに合同な 4 つの部分からなる．そのうちの 1 つの部分 $0\le t\le\pi/2$ だけを考えよう．すると，$\|\mathbb{X}'(t)\|=\cos t$ なので固有時間関数は

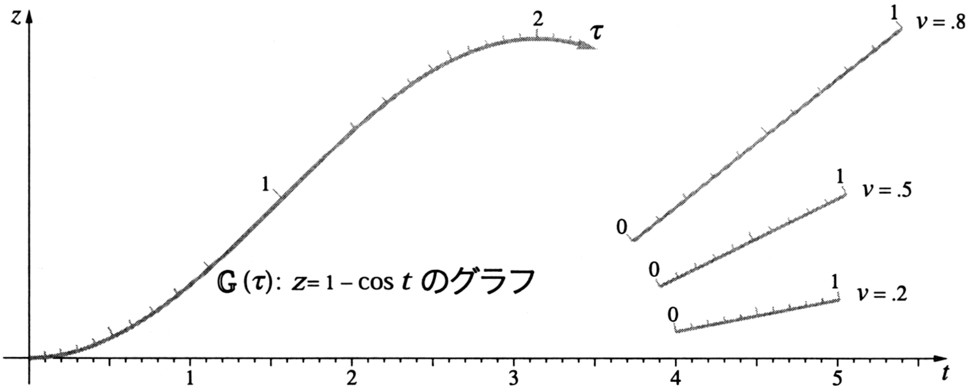
$$\tau(t)=\int_0^t\|\mathbb{X}'(t)\|\,dt=\int_0^t\cos t\,dt=\sin t,\qquad 0\le t\le\pi/2$$

となる．逆関数は $t=\varphi(\tau)=\arcsin\tau$, $0\le\tau\le 1$ であり，固有時間による

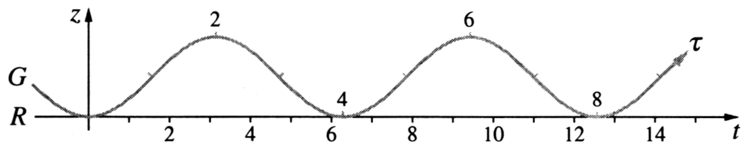
助変数表示は

$$\mathbb{G}(\tau) = \mathbb{X}(\arcsin\tau) = (\arcsin\tau, 1-\cos(\arcsin\tau)) = (\arcsin\tau, 1-\sqrt{1-\tau^2})$$

となる．下の図では，$\mathbb{G}(\tau)$ に沿って固有時間がどのように変化するかを示した．G の世界線と t 軸(R の世界線)には，0.1 秒ごとに目盛がつけてある．また，比較のため，等速直線運動の場合に世界線と固有時間の目盛がどうなるかを，3 つの異なる速度について描いてみた．図ではさらに，$\mathbb{G}$ の $0 \leq \tau \leq 1$ の部分を描いたものを $\tau = 1$ に関して折り返して，図を $1 \leq \tau \leq 2$ にも拡張して描いてある．観測者 G の速度が小さいときは 2 人の観測者の固有時間の目盛の幅はあまり変わらないが，G の速度が大きいと差が目立つことに注目しよう．



広い範囲を描いた下の図を見ると，1 往復にかかる時間は，G にとっては 4 秒だが，R にとっては $2\pi \approx 25/4$ 秒であることがわかる．したがって，平均すると，G の時計は R の時計の約 2/3 倍しか進まない．



観測者 G の最高速度が光速に達しないように，往復運動全体の規模を縮小して $k < 1$ 倍にしてみよう．つまり，G の世界線を $z = k(1-\cos t)$ にする．すると，G は光速の k 倍まで加速されたところで減速に移ることになる．与えられた助変数表示は $\mathbb{X}(t) = (t, k(1-\cos t))$ で，$\|\mathbb{X}'(t)\| = \sqrt{1-k^2\sin^2 t}$ である．それでは，新しく導入した因子 k のおかげで計算がどのようにややこしくなるかを見てみよう．固有時間関数 **例 2**

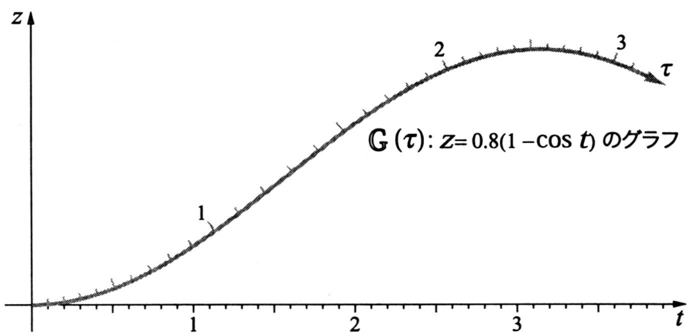
$$\tau(t) = \int_0^t \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt$$

は，ユークリッド幾何での楕円の弧長を計算したときに出てきたのと同じ楕円積分になってしまった．逆関数を $t = \varphi(\tau)$ とすると，固有時間による助変数表示は

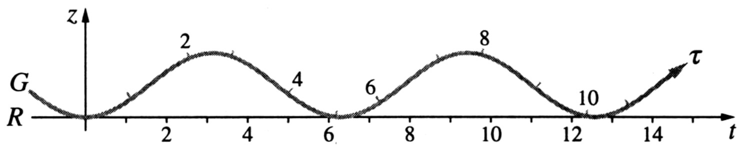
$$\mathbb{G}(\tau) = (\varphi(\tau), k(1-\cos\varphi(\tau)))$$

となる．

下の図では，$k = 0.8$ として $\mathbb{G}(\tau)$ を描いた．世界線の傾きが $v \approx 0.8$ と最も急になるあたりで，かなり大きな時間の伸びが起きているが，それでも最初の例ほどではないことが見てとれる．



観測者 G 自身から見ると，1 往復には 5 秒かかる．R, から見ると前と同じで 2π 秒である．平均すると，G の時計は R の時計の約 5/6 倍しか進まない．



双子のたくさん運動してるほうは老けない

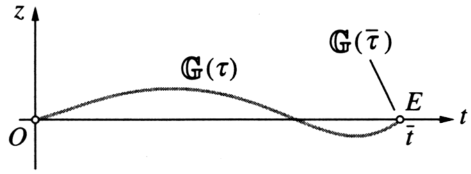
2 番目の例の G と R が双子で，時間の単位が秒でなく年だと想像してみよう．そして，G が光速の 80% まで加速する宇宙船にのって R のいる地球を出発し，やがて減速して目的地に到達し，同じようにして戻ってくるとしよう．この往復旅行の間に，R は $\Delta t \approx 25/6$ 年だけ歳をとる．しかし，G は $\Delta\tau \approx 5$ 年しか歳をとらない．地球で再会したときには，この双子は同い年でなくなっている！ これは，本当に物理的に意味のある違いである．G の体内の原子が一定の周期で振動しているとしたら，その合計回数は R の体内の原子より少ないはずである．

パラドックス

双子のうち G は運動しているので，R ほど歳をとらない．しかし一方で，運動は相対的であることがわかっている．なぜ G と R の立場を入れ替えられないのだろうか．つまり，もし G の座標系から見れば，運動している R の方が歳をとらないはずだ．これはパラドックスである．同じ正しい仮定から出発して矛盾する結論に到達してしまったように思える．この，一見パラドックスと思われる状況は，G と R の間の対称性がまやかしであることに気づけば解消する．目的地までの往復の間に G は加速運動しているが，地球にとどまった R はしていない．したがって，R の座標系は慣性座標系だが G の座標系はそうでない．特殊相対論では，慣性座標系しか考えないことにしているので，G と R の立場を入れ替えることはできず，対称性はないのだ．

次の定理は，双子のパラドックスがここで考えた例に限られたものではないことを述べている．2 つの事象を両端に持つ世界線を考えたとき，**任意の**世界線に沿って経過した固有時間は，直線の世界線に沿って経過した固有時間より小さい．ということは，双子のパラドックスは，逆向きの三角不等式の連続版にすぎない．

定理 3.6 (“双子のパラドックス”) 2 つの事象 O と E の間の間隔が時間的だとする．事象 O と E を結ぶ世界線のうち，**直線**である世界線が，最も経過する固有時間が大きい．



証明：事象 O と E の間隔は時間的なので，適当な慣性座標系 $R:(t,x,y,z)$ をとって，これらの事象が t 軸上の点 $O:(0,0,0,0)$, $E:(\bar{t},0,0,0)$ となるようにできる．このとき，t 軸が直線の世界線で t が固有時間助変数である．事象 O と E の間に経過する固有時間は $\bar{t}$ そのものである

G が事象 O と E を両端に持つもう 1 つの世界線で，O と E の間の G に沿って経過する固有時間 $\Delta\tau$ が $\overline{\tau}$ だとしよう．R の座標系における，G の世界線の G の固有時間 τ による助変数表示を $\mathbb{G}(\tau)=(t(\tau),x(\tau),y(\tau),z(\tau))$ とすると，

$$1=\|\mathbb{G}'(\tau)\|^2=\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\leq\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

となる．等号が成立するのは，G の速度が 0 である点に限られる．したがって，

$$\overline{\tau}=\int_0^{\overline{\tau}}d\tau<\int_0^{\overline{\tau}}\frac{dt}{d\tau}\,d\tau=\int_0^{\bar{t}}dt=\bar{t}$$

である．最も大事な変形は，積分の変数変換 $\tau\mapsto t$ と，それに伴う積分範囲の変化 $0\mapsto 0,\ \overline{\tau}\mapsto\bar{t}$ である． **証明終**

ニュートンの第 2 法則

観測者 G の固有質量を μ, 固有時間を τ とする．任意の慣性座標系 R : (t,x,y,z) で見たとき，G に関して次のような量が考えられる．

G の世界線の 4 元座標: $\mathbb{G}(\tau)$,

G の固有 4 元速度: $\mathbb{U}(\tau)=\mathbb{G}'(\tau)$,

G の 4 元運動量: $\mathbb{P}(\tau)=\mu\mathbb{U}(\tau)$,

G の 4 元加速度: $\mathbb{A}(\tau)=\mathbb{U}'(\tau)=\mathbb{G}''(\tau)$.

時空の中の世界線と，ユークリッド空間の中の普通の曲線との間の類似性に注目しよう．固有 4 元速度 $\mathbb{U}=\mathbb{G}'$ が単位接ベクトル $\mathbf{u}=\mathbf{y}'$ に対応し，4 元加速度 $\mathbb{A}=\mathbb{G}''$ が曲率ベクトル $\mathbf{k}=\mathbf{y}''$ に対応する．さらに，加速度の大きさ $\alpha(\tau)=\|\mathbb{A}(\tau)\|$ を導入すると，これが曲率 $\kappa(s)$ に対応する．

世界線の 4 元座標を $\mathbb{G}(\tau)=(t(\tau),\mathbf{x}(\tau))$ としたとき，

$$\mathbb{U}(\tau) = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right) = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}(1, \mathbf{v}),$$

$$1 \equiv \|\mathbb{U}(\tau)\|^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 (1 - \|\mathbf{v}\|^2) = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 (1 - v^2)$$

となるので

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \mathbb{U}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, \mathbf{v})$$

局所的な時間の伸び

が結論される．微分 $dt/d\tau$ は，局所時間 t の固有時間 τ に対する変化率であり，時間の伸びの因子 $\Delta t/\Delta\tau$ の無限小版である．この因子は，G の世界線上の各点で値が変わりうるので，このことを強調して**局所的な時間の伸びの因子**(local time dilation factor)と呼ばれる．

4元運動量

4元運動量ベクトル $\mathbb{P}(\tau) = \mu\mathbb{U}(\tau)$ のノルムは一定で，G の静止質量に等しい．すなわち，$\|\mathbb{P}(\tau)\| \equiv \mu$ である．これは，質量と3次元の運動量を，共変的になるように

$$\mathbb{P}(\tau) = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}(1, \mathbf{v}) = \left(\frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mu\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = (m, m\mathbf{v}) = (m, \mathbf{p})$$

という形に組み合せたものである．

ここで定義した種々の4元ベクトルは，3.1節の最後にまとめられている等速直線運動の場合の量と，本質的には同じものである．しかし，次の計算では等速直線運動にはなかった新しい情報が得られる．運動量 $\mathbb{P}(\tau)$ を τ で微分すると，

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{dm}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{dm}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)$$

となる．ニュートンの運動の第2法則では，G にはたらく力は，非相対論的な3次元ベクトル $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ である．そこで，

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{dm}{dt}, \mathbf{f}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dm}{dt}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \mathbb{F}(\tau)$$

$\mathbb{F} = \mu\mathbb{A}$

によって，4元ベクトル $\mathbb{F}$ を定義しよう．このベクトル $\mathbb{F}$ は共変で，後ろ3成分 $\mathbf{f}/\sqrt{1-v^2}$ には，G にはたらく力を表す3次元ベクトル $\mathbf{f}$ が出てくる．したがって，ベクトル $\mathbb{F}$ を G にはたらく**4元力**(4-force)と定義するのがよいと思われる．すると(定義から！)

$$\mathbb{F} = \frac{d\mathbb{P}}{d\tau} = \mu\mathbb{A}$$

という，**ニュートンの第2法則**の4元ベクトル版が得られる．これで，力は質量かける加速度に等しい，という非相対論的な場合の文が再び正当化された．

定理 3.7 観測者 G の世界線 $\mathbb{G}(\tau)$ 上のすべての点で，$\mathbb{A}(\tau) \perp \mathbb{U}(\tau)$ かつ $\mathbb{F}(\tau) \perp \mathbb{U}(\tau)$ が成り立つ．

証明：$\mathbb{A}$ と $\mathbb{U}$ は時空のベクトルで，上の主張はミンコフスキ幾何での意味で

の直交性である．式 $1 \equiv \mathbb{U}(\tau) \cdot \mathbb{U}(\tau)$ の両辺を，積の微分法を使って微分すると

$$0 \equiv 2\frac{d\mathbb{U}}{d\tau} \cdot \mathbb{U} = 2\mathbb{A} \cdot \mathbb{U}$$

を得る．したがって，$\mathbb{A} \perp \mathbb{U}$ である．さらに，$\mathbb{F} = \mu\mathbb{A}$ であるので，$\mathbb{F} \perp \mathbb{U}$ も成立する． **証明終**

上の定理は，ユークリッド空間の曲線に対する $\mathbf{k}(s) \perp \mathbf{u}(s)$ という結果に対応する．ユークリッド幾何における曲率 $\kappa(s)$ は，ここでの加速度の大きさ $\alpha(\tau)$ に対応するので，α の大きさが G の世界線の曲率に関係しているのではないかと期待できる．

例: 往復運動

この関係を具体的に調べるために，観測者 G が往復運動 $z = k(1 - \cos t)$ をする場合について，4 元加速度を時空に描いてみよう．観測者 G の世界線の固有時間による助変数表示は，

$$\mathbb{G}(\tau) = (\varphi(\tau), k(1 - \cos\varphi(\tau)))$$

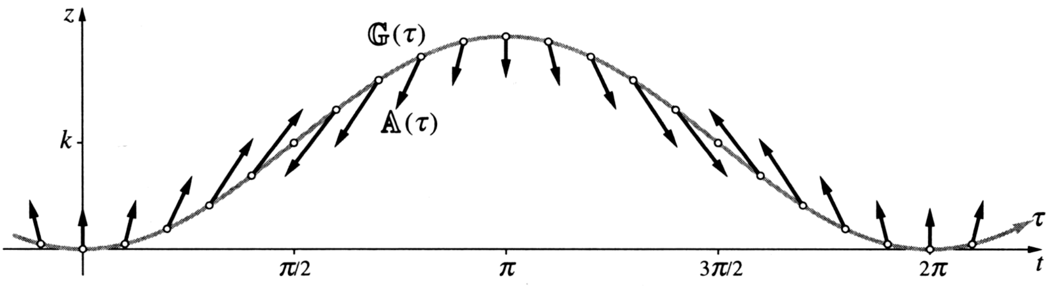
である．ここで，$t = \varphi(\tau)$ は楕円積分

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\; dt$$

の逆関数である．これを 2 階微分を求めると $\mathbb{A}(\tau) = \big(\varphi'', k(\varphi'' \sin\varphi + (\varphi')^2 \cos\varphi)\big)$ となり，さらに計算を進めると，練習問題 4 の通り，

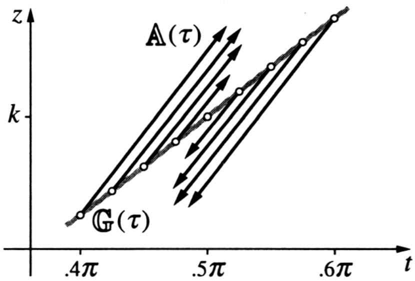
$$\mathbb{A}(\tau) = \frac{k\cos\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^2}\,\big(k\sin\varphi, 1\big) = \frac{k\cos t}{(1 - k^2\sin^2 t)^2}\,\big(k\sin t, 1\big)$$

を得る．この 2 つの表示は，$t = \varphi(\tau)$ を通して等価である．ここでは，第 2 の表示を利用して，曲線 $z = k(1 - \cos t)$ 上に重ねてベクトルを描くことにする．得られた下の図を見ると，確かに，ベクトルと曲線はいたるところミンコフスキ内積の意味で直交している．このことを，2.3 節のミンコフスキ的に直交しているベクトルの図を見て確かめてみよ．



ちょっと見たところでは，4 元加速度 $\mathbb{A}$ が時刻 $t = \pi/2$ で不連続であるように見えるかもしれない．しかし，下のように拡大してみると，そうではない

ことがわかる.



さらに，ミンコフスキノルム $\|\mathbb{A}\| = k|\cos t|/(1-k^2\sin^2 t)^{3/2}$ はいたるところ連続で，$t=\pi/2$ では 0 になる．このノルムの形を導くのには $\mathbb{A}$ が空間的ベクトルであることを用いた.

例: 加速度の大きさ一定の運動　上で扱った例では，加速度の大きさは $\alpha(\tau) = \|\mathbb{A}(\tau)\|$ は時間とともに周期的に変化した．今度は，G が，R の座標系から見て加速度の大きさが**一定**である場合を考えよう．観測者 G の運動はどのようなものだろうか.

ミンコフスキ幾何での加速度の大きさは，ユークリッド幾何での曲率に対応することを思い出そう．ユークリッド平面での曲率一定の曲線は円周(の一部)だけしか存在しない．したがって，加速度の大きさ一定の世界線は，ミンコフスキ的 “円”, すなわち双曲線になるだろう．次の定理は，このことが実際に成立することを主張したもので，その証明は，ユークリッド版の定理の証明の焼き直しである.

定理 3.8　$(1+1)$ 次元時空における世界線の，加速度の大きさ α が(0 でない値で)一定のとき，世界線の固有時間による助変数表示は

$$\mathbb{G}(\tau) = \left(\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha\tau+\tau_0)+t_0, \pm\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha\tau+\tau_0)+z_0\right)$$

である.

証明：$\mathbb{G}(\tau) = (t(\tau), z(\tau))$ を G の世界線の固有時間による助変数表示とする．このとき，

$$\|\mathbb{U}(\tau)\| = 1, \qquad (t')^2-(z')^2 = 1,$$
$$\|\mathbb{A}(\tau)\| = \alpha, \qquad (z'')^2-(t'')^2 = \alpha^2$$

である．最初の式は，任意の τ に対して，点 $\mathbb{U}(\tau)$ が未来集合 $\mathcal{F}$ に含まれる単位双曲線上にあることを示す．したがって，ある関数 $f(\tau)$ が存在して，

$$t'(\tau) = \cosh f(\tau), \qquad z'(\tau) = \sinh f(\tau)$$

となる．これを τ で微分すると，$t''(\tau) = f'\sinh f$, $z'' = f'\cosh f$ となる．ここで，$\mathbb{A}$ についての条件から導かれる 2 番目の式を使うと，

$$(f')^2 = (z'')^2-(t'')^2 = \alpha^2,$$

すなわち $f' = \pm\alpha$ なので，積分定数 τ_1 を用いて $f(\tau) = \pm\alpha(\tau+\tau_1)$ と表せ

る．したがって，

$$t' = \cosh(\alpha(\tau + \tau_1)), \qquad z' = \pm\sinh(\alpha(\tau + \tau_1)),$$

$$t = \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha(\tau + \tau_1)) + t_0 \qquad z = \pm\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha(\tau + \tau_1)) + z_0$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha\tau + \tau_0) + t_0, \qquad = \pm\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha\tau + \tau_0) + z_0$$

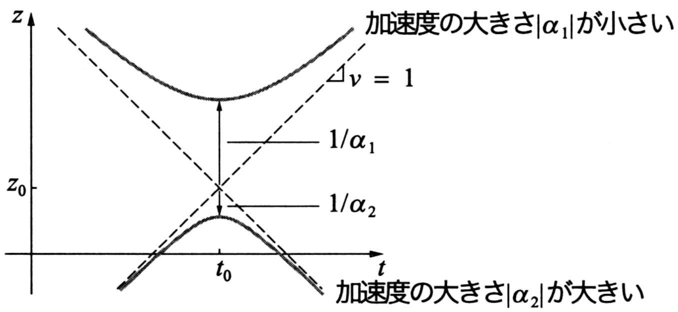
となる．ただし，$\tau_0 = \alpha\tau_1$, t_0, z_0 は積分定数である．上の計算では，双曲線関数の性質 $\sinh(\pm u) = \pm\sinh(u)$, $\cosh(\pm u) = \cosh(u)$ を用いた． **証明終**

加速度は曲率と関係づけられる

観測者 R の $(1+1)$ 次元座標系において加速度が一定の世界線は，任意の点 $(t, z) = (t_0, z_0)$ を中心とする双曲線の上下いずれかの分枝である．この曲線は，グラフとして

$$z = z_0 \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + \alpha^2(t - t_0)^2}$$

と表せる．極限 $t \to \infty$ で，速度は $z' \to \pm 1$ となる．下の図に描いたのは，加速度の大きさが $|\alpha_1| < |\alpha_2|$ と異なる 2 つの物体の世界線である．世界線は，加速度が大きいほど，鋭く曲がった双曲線になることがわかる．



双曲線の極限としての放物線

ニュートンの非相対論的力学では，(非相対論的)加速度ベクトルが一定の物体の世界線は，双曲線でなく放物線になる．しかし，放物線だと傾きがいくらでも大きくなるので，特殊相対論での速度の上限が守られない．それに対し，双曲線の傾きは，漸近線の傾きを越えないので，その心配はない．実は，この 2 つの曲線の間には関係がある．テイラーの定理を $t - t_0$ が小さいところで使うと，双曲線の方程式は，この付近で放物線の方程式と近似的に等価になることが以下のようにしてわかる．

$$z = z_0 \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + \alpha^2(t - t_0)^2}$$

$$\approx z_0 \pm \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}(t - t_0)^2\right) = z_0 \pm \frac{1}{\alpha} \pm \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2.$$

最後の表式は，ニュートン力学のもとで加速度一定の物体の運動，例えば地球表面近くでの重力を受ける物体の運動，を表す見慣れた式そのものである．

質量とエネルギー

前に導いた式 $\mathbb{F}\cdot\mathbb{U}=0$ を，$\mathbb{F}$, $\mathbb{U}$ の成分で書き表してみよう．ここでは，次元同次座標 (ct,x,y,z) を使うほうがわかりやすい．

$$\mathbb{F}\cdot\mathbb{U}=\begin{pmatrix}\dfrac{c\,dm/dt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\\ \dfrac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\\ \dfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\end{pmatrix}=\frac{c^2\dfrac{dm}{dt}-\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{1-(v/c)^2}.$$

ここで，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ は 3 次元ユークリッド空間の通常の内積である．したがって，等式 $\mathbb{F}\cdot\mathbb{U}=0$ はスカラーの式

$$c^2\frac{dm}{dt}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$$

になる．左辺を見ると明らかなように，両辺はエネルギーの時間変化率の次元を持つ．次の命題は，内積 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ の物理的解釈を明らかにする．

命題 3.4　観測者 R の座標系における，G の非相対論的運動エネルギーが $\widetilde{K}(t)=(\mu/2)v^2(t)$ で与えられ，G にはたらく非相対論的な力が $\tilde{\mathbf{f}}=\mu\mathbf{a}$ であるとき，

$$\frac{d\widetilde{K}}{dt}=\tilde{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{v}$$

が成り立つ．

証明：定義から $v^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ なので，$\widetilde{K}(t)=\dfrac{\mu}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ と書ける．したがって，

$$\frac{d\widetilde{K}}{dt}=\frac{\mu}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})'=\frac{\mu}{2}(2\,\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v})=\mu\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}=\mu\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=\tilde{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{v}.$$ **証明終**

$\dfrac{dK}{dt}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$

この相対論的な 4 元力の空間成分を含む $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ を，R の座標系で見た G の**相対論的運動エネルギー** K の時間変化率と解釈しよう．すると，$\mathbb{F}\cdot\mathbb{U}=0$ から，未知の量 K に対して，

$$c^2\frac{dm}{dt}=\frac{dK}{dt},\quad よって\quad c^2m=K+定数$$

という式が得られる．さらに，$v=0$ のとき $K=0$, という非相対論的な場合と同様の条件をおくと，上で現れた(積分)定数を定めることができる．$v=0$ のときには，$m=\mu$, $K=0$ なので，定数は G の静止エネルギー μc^2 に等しくなる．以上の議論は，次の定義と系にまとめられる．

定義 3.7　観測者 R の座標系での，G の**全エネルギー**(total energy) E を，運動エネルギーと静止エネルギーの和 $E=K+\mu c^2$ と定義する．

$E=mc^2$

系 3.1　$E=mc^2$ が成り立つ．ただし，m は R の座標系における G の相対論的質量である．

相対論的運動エネルギー K に対しても，3.1 節で等速直線運動の場合に得たのと同じ式

$$\begin{aligned} K = mc^2 - \mu c^2 &= \mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right) \\ &= \mu c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \frac{5v^6}{16c^6} + \cdots - 1 \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\mu v^2}_{\text{非相対論的}} + \mu \frac{3v^4}{8c^2} + \mu \frac{5v^6}{16c^4} + \cdots \end{aligned}$$

が得られる．速度 v が $v \ll c$ を満たすときには，K に最も大きく寄与するのは第 1 項の非相対論的運動エネルギーである．

エネルギー–運動量ベクトル

等速直線運動を扱った 3.1 節と同様に，関係式 $E = mc^2$ を使って，$\mathbb{P} = (mc, \mathbf{p})$ を同値な形 $\mathbb{P} = (E/c, \mathbf{p})$ に書き直すことができる．この形から，$\mathbb{P}$ を**エネルギー–運動量ベクトル** (energy–momentum vector) と呼ぶ．次の定理では，エネルギーと運動量の間のこの関係を利用する．

定理 3.9 $p = \|\mathbf{p}\|$ をユークリッド的長さとするとき，$E = c\sqrt{p^2 + \mu^2 c^2}$.

証明：次元同次座標 (ct, x, y, z) を用いて $\|\mathbb{P}\|^2$ を計算すると

$$\mu^2 c^2 = \|\mathbb{P}\|^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2.$$

これを E について解けばよい． **証明終**

練習問題 7 で見るように，光速で運動する物体の静止質量は 0 でなければならない．しかし，そのような物体も 0 でないエネルギーを持っているので，そのような物体にも適用できるように，$\mathbb{P}$ の第 1 成分は，質量よりむしろエネルギーで表したほうがよい．

光のエネルギー

光の持つエネルギーは，光電効果 (photoelectric effect) を通じて明らかになった．(これを説明したのはアインシュタインで，特殊相対論を提出したのと同じ年，1905 年のことだった.) 光を金属の表面にあてると，ある速度，したがってあるエネルギーを持った電子がたたき出される．このエネルギーは，金属をたたいた光の粒子，つまり光子 (photon) から来たとしか考えられない．

$E = h\nu$

実験から，たたき出された電子 1 個あたりのエネルギーは，入射した光の振動数 (つまり色) だけで決まり，光の強さには依存しないことがわかった．つまり，明るい光をあてると，たたき出される電子の個数は増えるが，電子 1 個あたりのエネルギーは暗い光をあてたときより大きくはならない (同じ色である限りは)．実験結果を，電子が金属から“自由になる”際に光子からわけてもらったエネルギーの一部を消費することまで考慮して解析すると，電子の受け取ったエネルギー，したがって光子のエネルギーは，光の振動数の定数倍という簡単な形になることがわかった．つまり，光の振動数を ν 毎秒とすると，光子のエネルギーは $E = h\nu$ となる．ここで，比例定数 $h = 6.625 \times 10^{-34} \mathrm{kg\, m^2/s}$ は**プランク定数** (Planck's constant) と呼ばれている．

光の運動量

光子は運動量も持つ．定理 3.9 と $\mu = 0$ とから，$p = E/c = h\nu/c$ が導

かれる．この式は，しばしば光子の**波長**(wavelength) λ を用いて述べられる．波動においては，波長 λ (メートル) と振動数 ν (毎秒) の積が速度 (メートル毎秒) になる．光波に対しては $\lambda\nu = c$ なので $\nu/c = 1/\lambda$ となる．したがって，光子の運動量を波長を用いて表すと，$p = h/\lambda$ となる．

練習問題

1. (a) 世界線 $\mathbb{X}(t) = (t, r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ はどのような形か説明せよ．変数 r と ω を変化させると形はどのように変わるか．
   (b) 世界線 $\mathbb{X}$ について，固有時間関数 $\tau(t)$ を計算せよ．固有時間 τ と，座標時間 t を比較せよ．
2. 任意の助変数表示された世界線 $\mathbb{X}(q) = (t(q), x(q), y(q), z(q))$ は，適当な助変数 t を導入すると，グラフ $\widehat{\mathbb{X}}(t) = (t, \widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{z}(t))$ になることを示せ．
3. 定理 3.1 を仮定して，定理 3.4 を証明せよ．すなわち，1 つの世界線の異なる助変数表示をとっても，固有時間は同一になることを示せ．
4. 関数 $t = \varphi(\tau)$ を楕円積分

$$\tau(t) = \int_0^t \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\; dt$$

の逆関数とする．

$$\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \qquad \text{および} \qquad \varphi'' = \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(1 - k^2\sin^2\varphi\right)^2}$$

を示せ．さらに $\mathbb{A}(\tau) = \big(\varphi'', k(\varphi''\sin\varphi + (\varphi')^2\cos\varphi)\big)$ から

$$\mathbb{A}(\tau) = \frac{k\cos\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^2}\,\big(k\sin\varphi, 1\big)$$

が導かれることを示せ．

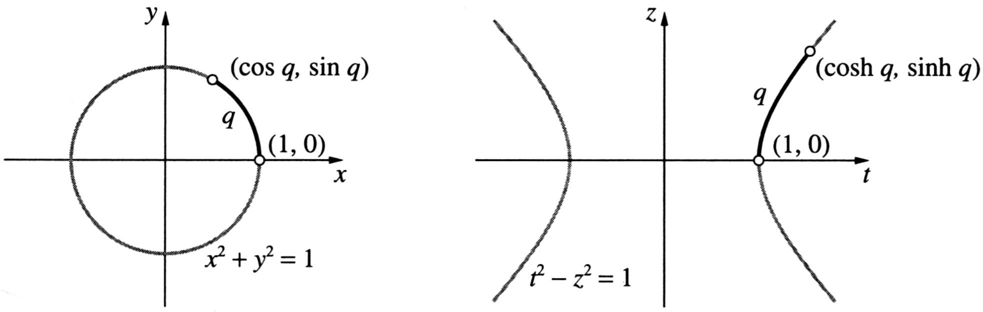
5. 曲線 $\mathbb{X}(q) = (t(q), z(q))$, $a \le q \le b$ が空間的 (spacelike) であるとは，すべての $q \in [a, b]$ に対して，$\mathbb{X}'(q)$ が空間的ベクトルであることをいう．曲線 $\mathbb{X}$ の**ミンコフスキ的長さ**(Minkowski length) を

$$l = \int_a^b \|\mathbb{X}'(q)\| dq = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dz}{dq}\right)^2 - \left(\frac{dt}{dq}\right)^2}\; dq$$

と定義する．

   (a) 双曲線 $t^2 - z^2 = 1$ の半平面 $t > 0$ 側の分枝を，適当な助変数で書き表し，この双曲線が空間的曲線であることを示せ．
   (b) 双曲線の $(1, 0)$ から $(\cosh q, \sinh q)$ に至る弧のミンコフスキ的長

さがちょうど q であることを示せ.



ミンコフスキ的長さを利用すると，双曲線関数の，3 角関数と完全に並行する幾何的定義を与えることができる．上の図のように，単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(1,0)$ から，円周に沿って長さ q だけ離れた点の座標が，3 角関数の値 $(\cos q, \sin q)$ であると定義できる．一方，問(b)の結果によると，単位双曲線上の点 $(1,0)$ から，曲線に沿って**ミンコフスキ的**長さ q だけ離れた点の座標が，双曲線関数の値 $(\cosh q, \sinh q)$ と定義できる．

6. 関係 $pc = Ev/c$ を示せ．ここで $p = \|\mathbf{p}\|$, $v = \|\mathbf{v}\|$ である．
7. 光子は光速 $v = c$ で運動し，有限のエネルギーと運動量を持つ．そのような物体の静止質量 μ はゼロでなければならないことを示せ．(ヒント: $\|\mathbb{P}\|^2$ を考えよ.)

第 3 章の内容をより深く知るには

ニュートン力学は物理学の重要な基礎であり，多くの教科書で扱われている．**ファインマン物理学** [13][注4]と**時空の物理学** [28] では，特殊相対論の立場から扱われている．相対論的質量の概念は，アインシュタインの簡潔で読みやすい論文 [9] の中で導入されている．

[注4] 訳注：和訳第 1 巻 ‘力学’.

第4章 一般の座標系

本来主観的でしかありえない個々の観測が，どのように，客観的に正しい結論，つまり物理法則に結実するのだろうか．これに対する私達の答は，すべての物理法則はすべての観測者にとって同じ形に書かれなければならない，という相対性原理である．しかし，ここまでの議論では，“すべての観測者” といっても，ガリレイ的観測者，つまり座標系が慣性座標系であるような観測者に制限されていた．アインシュタインは，なぜそのような制限があるのかと自問した．特に彼は，この制限が物理的な理由で客観的に正当化されるかどうかを問題にした．1905 年に続く 10 年ほどの間に，彼は，特殊相対論の慣性座標系だけを使っていては，重力を記述できないということを発見した．そして彼は” 考えられるすべての座標系のすべてが，同じ資格で自然を記述することができることを原理とすべきである” ことを確信した．[10, p. 117][注1]これが**一般**相対性原理(principle of general relativity)である．この原理を出発点とすることによって，アインシュタインは重力の革命的な理論をゼロから構築することができた．

加速度運動する観測者も許容する

この章では，最初に，2 つの典型的な非慣性座標系の性質を調べる．次に，ニュートンの重力理論を簡潔に説明し，なぜそれが特殊相対論と相容れないかを述べる．これに基づいて，以後の章では，アインシュタインがどのように重力の新しい理論を打ち立てたかを見ていくことになる．

4.1 一様回転

回転座標系は非慣性座標系

いつもと同じように，2 人の観測者 R, G を考え，それぞれの座標系が相対運動しているものとする．しかし，これまでとは違い，直線運動ではなく回転運動を考えよう．観測者 R, G は常に同じ地点にとどまり，x 軸と ξ 軸は常に一致しているとしよう．さらに，R の座標系は慣性座標系だが，G の座標での (η, ζ) 平面は，一定の角速度で ξ 軸のまわりに回転しているとしよう．この状況で，平面 $x = \xi = 0$ 内を自由運動している(力を受けずに，ガ

[注1] 訳注：和訳については訳者のノート参照.

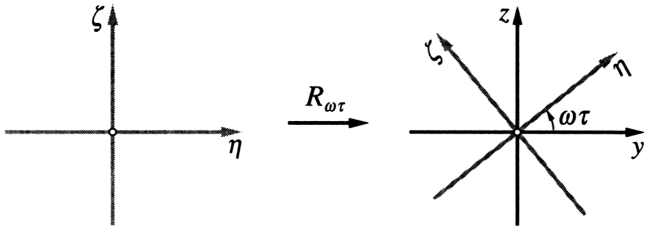
リレイの慣性の法則に従って運動している)物体を考える．この $(1+2)$ 次元時空を記述する R の座標系 (t, y, z) は慣性座標系なので，物体の世界線は直線になる．一方，G の座標系 (τ, η, ζ) では，世界線は直線でなくらせんになる．したがって，G の座標系は非慣性座標系であることがわかる．

時空の間の非線型な写像

この2つの座標系を比較するには，事象 E のギリシャ文字の座標 (τ, η, ζ) に同じ事象 E のラテン文字の座標 (t, y, z) を対応させる写像 $M : G \to R$ を求めなければならない．観測者 G の位置は R に対して静止しているので，時間の伸びは起きず，$t = \tau$ としてよい．空間座標 y, z を η, ζ で具体的に書き表すために，(η, ζ) 平面は角速度 ω ラジアン毎秒で回転していて，$\tau = t = 0$ には η 軸と y 軸とが一致していたとと仮定する．このとき，(η, ζ) 平面上の位置 (η, ζ) の，τ 秒後の (y, z) 平面上での位置は，回転行列 $R_{\omega\tau}$ を

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = R_{\omega\tau} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

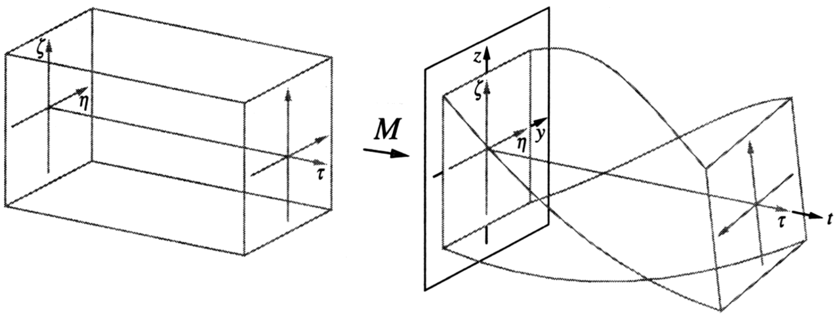
のように作用させたものになる．



したがって，$M : G \to R$ は，非線型な写像

$$M : \begin{cases} t = \tau, \\ y = \eta\cos\omega\tau - \zeta\sin\omega\tau, \\ z = \eta\sin\omega\tau + \zeta\cos\omega\tau \end{cases}$$

である．



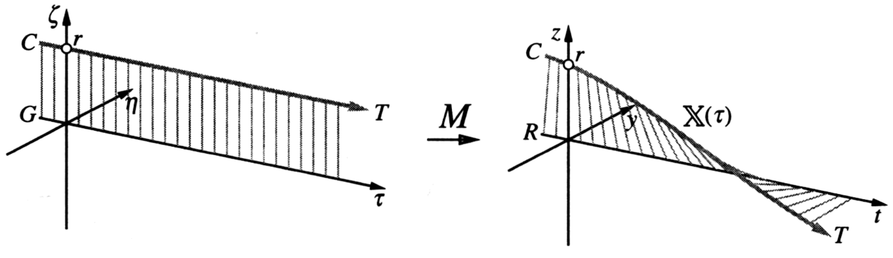
写像 M は，非線型なのでローレンツ写像ではありえない．しかし，M の幾何学的意味は，座標系 G を "ワイヤフレーム" で描くとよくわかる．写像 M は，(τ, η, ζ) 空間を τ 軸の周りに回転させて，R の (t, y, z) 空間に写す写像である．

速さは半径に依存

ここで，第 3 の観測者 C が G から $r = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ の距離に位置に，G の座標系から見て静止しているとしよう．観測者 G の座標系では，C の世界線は τ 軸に平行な直線である．しかし，R の座標系では，C は 0 でない速度を持ち，その世界線はらせんである．具体的に，C を点 $(\eta, \zeta) = (0, r)$ に置くことにすると，C の世界線は，R の座標系では

$$\mathbb{X}(\tau) = (t, y, z) = (\tau, -r \sin \omega\tau, r \cos \omega\tau)$$

と助変数表示される．



観測者 R の座標系での C の速度は，

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (-r\omega \cos \omega t, -r\omega \sin \omega t)$$

なので（$\tau = t$ である），速さは半径に比例して $v = \|\mathbf{v}\| = r\omega$ となる．

非慣性座標系には適用限界がある

特殊相対論における速度の上限から，$r\omega < 1$ が要求され，これを変形すると $r < 1/\omega$ となる．**つまり，G の非慣性座標系には空間的な適用限界がある．**つまり，この座標系が記述できる事象 $E = (\tau, \eta, \zeta)$ は，G の世界線を回転軸とする円柱 $r = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = 1/\omega$ の**内部**のものに限られる．一方，慣性座標系には境界はない．それはすべての方向に無限遠まで拡張できる．これは，慣性座標系と非慣性座標系の重要な相違点の1つである．

次の相違点は，C の固有時間 T を計算したときに現れる．いつもと同様に，固有時間の計算は慣性座標系で行わなければならない．今回の場合には R が慣性座標系なので，

$$\mathbb{X}'(\tau) = (1, -r\omega\cos\omega\tau, -r\omega\sin\omega\tau) = (1, \mathbf{v})$$

を用いて，固有時間関数は

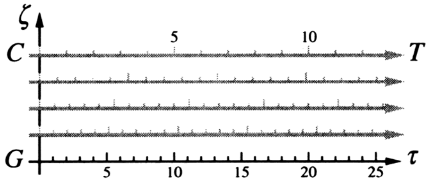
$$T(\tau) = \int_0^\tau \|\mathbb{X}'(\tau)\|\, d\tau = \int_0^\tau \sqrt{1 - r^2\omega^2}\; d\tau = \sqrt{1 - r^2\omega^2}\; \tau$$

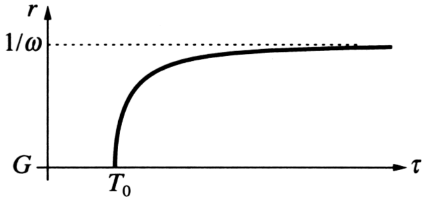
固有時間は半径に依存

となる．したがって，τ は，C の固有時間ではない. それでも，τ は C の本当の固有時間 T に比例する量ではある．比例定数 $\sqrt{1 - r^2\omega^2}$ は常に1より小さく，C の時計は G よりゆっくり進む．動いている時計がゆっくり進むことはすでに知っていたわけだが，回転運動する時計も例外ではないということがこれでわかった．さらに，C の速さは r とともに大きくなるので，時間の伸びも大きくなる．下の左の図には，G からの距離が様々な観測者の世界線と，固有時間に基づく目盛りが描かれている．また，G の座標系で G から r の距離に静止した観測者を考え，世界線上で，$\tau = 0$ から経過した固有時間が決まった値 T_0 となる事象の τ は，関数

$$\tau = \frac{T_0}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}},$$

で与えられる．この関数は，下図の右のような振る舞いを示す．円柱の表面に近づく極限 $r \to 1/\omega$ では $\tau \to \infty$ となることがわかる．





座標の意味

私たちはここで考えもしなかった状況に直面することになった．それは，観測者 G の座標系でそれぞれ異なる場所に静止している時計の刻む時間変数 T が，G の時間変数 τ と異なるばかりでなく，時計の位置によって T もそれぞれ異なるという状況である．この状況を分析する前に，**慣性座標系の**座標について私たちが暗黙のうちに何を仮定してきたかを明らかにしておく必要がある．簡単のため，ここでは $(1+1)$ 次元時空で考えることにしよう．

ラベルとしての座標

慣性座標系 (τ, ζ) を持つガリレイ的観測者を G とする．この座標は，常に，2 つの機能を持つ．まず，1 つは，時空の個々の事象を区別するための**ラベル**，言い換えれば名前である．例えば，ローレンツ変換 $H_u : G \to R$ が名前を別の言語での対応する名前に翻訳する**辞書**であるというときには，座標を名前と考えている．実際，このローレンツ変換を用いて

$$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix}$$

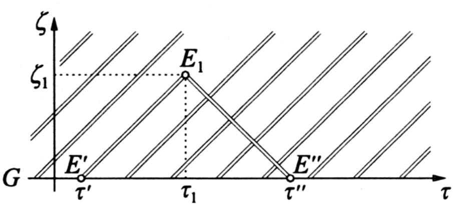
とおいた座標 (t, z) は，観測者 R だけでなく G も，事象を区別するのに利用できる．

測定としての座標

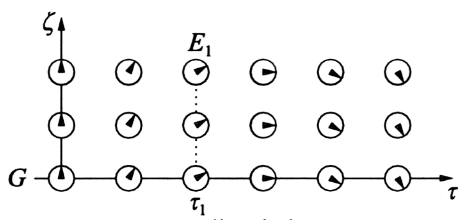
しかし，座標の機能は名前をつけることだけではない．もう 1 つの機能は，時空の各点で行われる一群の**測定**としてのものである．つまり，E_1 が座標 (τ_1, ζ_1) を持つとき，G から見ると E_1 は実際に事象 $O = (0, 0)$ の τ_1 秒後に起きる．同様に，ζ_1 は G から E_1 までの距離である．ここでは，τ_1, ζ_1 はラベル以上の役割を果たしていることがわかる．つまり，これらの座標の値は，G の行う測定の結果を表している．この意味で，座標 (τ, ζ) は**自然**なものである．観測者 G は通常，G にとってはラベルにすぎない (t, z) のような座標系より，測定結果としての意味を持つ座標系 (τ, ζ) を使いたいと考えるだろう．（もちろん R にとっては (t, z) のほうが時間と距離を測る自然な座標系である.）

レーダーによる時刻測定

観測者 G が事象 E_1 の時刻を決定するには，少なくとも 2 つの方法がある．1 番目は，以下のようにレーダーを使う方法である．観測者 G は連続して光の信号を発射し，E_1 に反射されて戻ってくるのを待つ．事象 $E' = (\tau', 0)$ に発射された信号が，事象 E_1 において反射されて事象 $E'' = (\tau'', 0)$ に戻ってきたとしよう．ここで，値 τ', τ'' は G の持っている時計で測ったものである．すると，$\tau_1 = (\tau' + \tau'')/2$ と計算される．ここで重要なことは，**すべての事象の時刻が，**G の世界線上の事象の時刻と関係づけられていることである．



レーダー



一群の時計

並んだ時計による時刻測定

2 番目の方法では，ζ 軸に沿って一群の時計を並べておく．これらの時計

は，G の持つ時計と同一のもので，1 個 1 個が ζ 軸の決まった位置に固定され，あらかじめ調整して時間が合せてある．これらの時計は G に対して静止しているので，問題なく時間をあわせることができる．事象 E_1 が起きたときには，E_1 の空間的位置 $\zeta = \zeta_1$ に置かれている時計が指している時刻が，時間座標 τ_1 である．これがうまく行くためには，すべての時計が G の時計にずっと合ったままでいなくてはならない．つまり，縦方向の直線 $\tau =$ 定数上では時計は同じ時刻を指さなければならない．しかし，慣性座標系ではこうなっていることがわかっている．

距離測定

同様に，G が距離を測るのにも 2 つの方法がある．まず，1 つの方法はレーダーを使うことである．事象 $E' = (\tau', 0)$ で発射された信号が $E_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ で反射され $E'' = (\tau'', 0)$ に戻ってきたなら，$\zeta_1 = (\tau'' - \tau')/2$ と計算できる．（これは $\zeta_1 > 0$ の場合．逆方向 $\zeta_1 < 0$ なら $\zeta_1 = -(\tau'' - \tau')/2.$）もう 1 つの方法は，$\zeta$ 軸に沿って定規を置いておくことである．定規は G に対して静止しているので，長さは収縮せず，時間的にも変化しない．距離 ζ_1 を決めるには，単に E_1 の位置での定規の目盛を読めばよい．

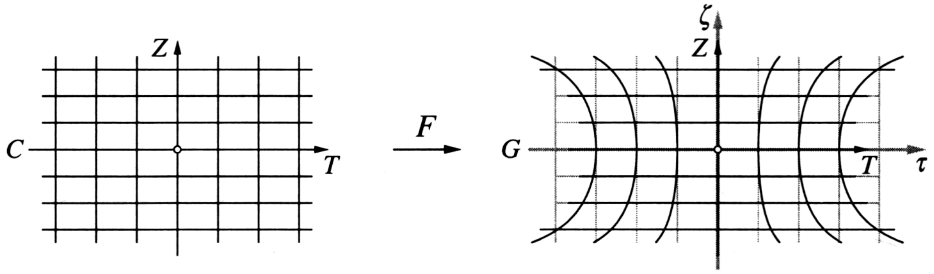
非慣性座標系ではレーダーと時計は合意しない

回転している非慣性座標系 G で何が起きていたかはもう明らかだ．2 つの測定方法で結果が一致しなくなっていたのである!一群の時計は，ζ 軸上の様々な位置にいる観測者 C の固有時間 T を表すのに対し，レーダーは，時空のどの事象の時刻も τ 軸に関係づけて結果を出すので，その結果は変数 τ である．

観測者 G に対して静止する様々な観測者 C は，それぞれ，座標 (T, Z) を持つ．この座標は，写像 $F : C \to G : (T, Z) \to (\tau, \zeta)$, ただし，

$$F : \begin{cases} \tau = \dfrac{T}{\sqrt{1 - Z^2\omega^2}}, \\ \zeta = Z \end{cases}$$

でもとの G の座標系と関係づけられる．



これは非線型な写像だが，T 軸上に制限すると恒等写像である．この軸の上では 2 つの時間 T と τ とは一致する．T 軸から離れた場所では，$|Z|$ の増加につれて，時間方向の目盛の間隔は開いていき，時間 T は時間 τ と比べてますますゆっくり進むようになる．

どちらの時間も有効

観測者 C と G のどちらが正しいのだろう？ どちらの時間も，慣性座標系での時間，距離の正しい測り方の正当な拡張であり，どちらかのほうがよいという原理はない．実際，どちらか 1 つだけを選ぶ必要はない．下で見るように，私たちの，普通の世界地図を使うときの経験が，2 つの測り方を和解

させる方法を教えてくれる．地図上で東西方向の位置を指定する方法として，経度を使うものと，緯線に沿った道のりを使うものとがあるが，この2つの方法は，上で見た，時間を測る2つの方法にちょうどよく対応している．

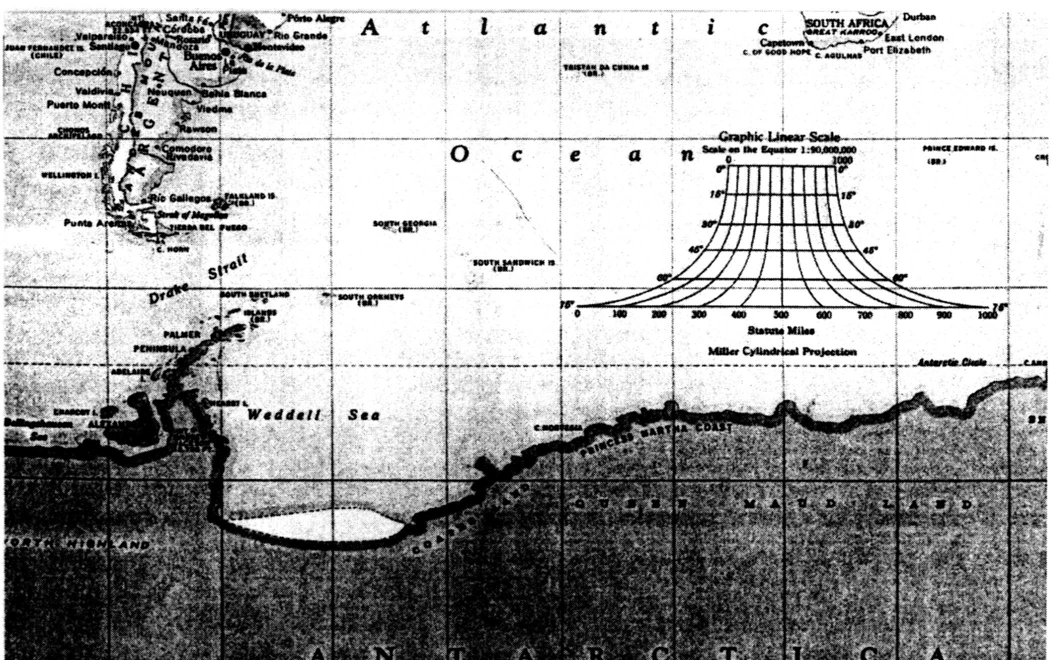
緯度と経度

地図と縮尺

どの地図にも，地図上の長さを実際の距離に換算するための**縮尺**が描かれている．しかし，ほとんど世界全体を覆ういちばんよく見かけるタイプの地図は，極地に近づくほど大きく歪んでいる．実際，グリーンランドと南極大陸は実際よりずっと大きく見える．縮尺はどうなっているんだろう？

縮尺の網目

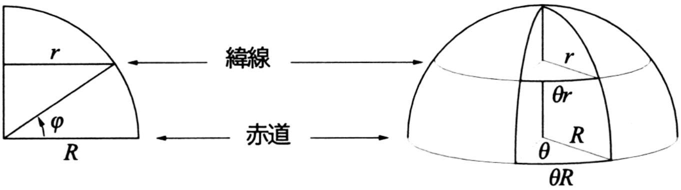
この歪みは経線を平行線として描くような投影法を使っているのが原因である．この投影法では，1度あたりの距離はどこでも一定になる．しかし，地球上ではこれは正しくない．北緯60°では，経度1度に相当する東西の距離は35マイルであるのに対し，赤道ではその2倍になる．したがって，このような投影法では，縮尺は1個では不十分で，緯線ごとにそれぞれ異なる縮尺を表示しなければならない．実際，たくさんの縮尺を並べて曲線の格子のようにして，不毛な地域にそっと置いてあるのを見かけることがある．下の地図（ミラー円柱図法による）では，大きくなってしまった南極大陸近くの南大西洋に，この格子が描かれている．この6個の縮尺は，東西に1000マイルの距離を表している．この縮尺の全長は，高緯度地方に向かうにつれ，伸びていく．なぜなら，1000マイルに相当する経度は増えていくからだ．



格子を作る

この格子をよく理解するため，自分で作ってみることにしよう．緯度 φ の緯線上では，東西に d マイルの距離は，経度にして θ であるとする．この θ

を，d と φ の関数として求めたい．計算を簡単にするため，θ と φ はラジアンで測り，地球は半径 R マイルの球であるとしよう．すると，赤道($\varphi=0$)は半径 R の円であり，赤道上の経度 θ の弧は距離にして $d=\theta R$ マイルになる(ラジアンの定義から！)．したがって，$\varphi=0$ のときは $\theta=d/R$ である．



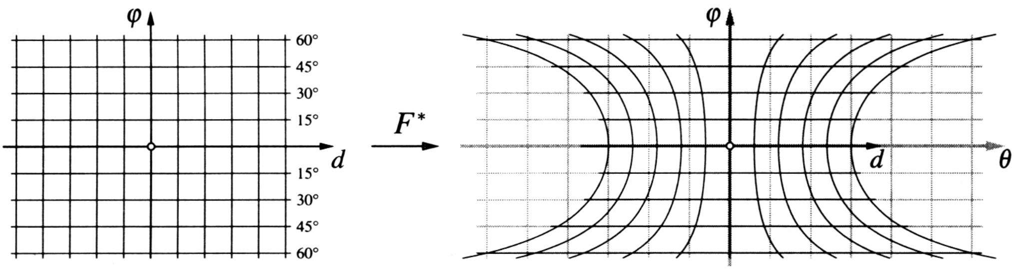
今度は，緯度 $\varphi\neq 0$ で赤道に平行な円を考えてみると，その半径は $r=R\cos\varphi$ であることがわかる．この円周上の経度 θ の弧は距離にして $d=\theta r=\theta R\cos\varphi$ マイルになる．したがって，

$$\theta=\theta(d,\varphi)=\frac{d}{R\cos\varphi}=\frac{d}{R}\sec\varphi$$

と求まる．角 θ は，$|\varphi|<\pi/2$ に対してのみ定義され，極限 $\varphi\to\pm\pi/2$ で $\theta\to\infty$ となる．描きたい格子は，写像 $F^*:(d,\varphi)\to(\theta,\varphi)$，ただし

$$F^*:\begin{cases}\theta=\dfrac{d}{R}\sec\varphi,\\ \varphi=\varphi\end{cases}$$

による，(d,φ) 空間の通常の格子の像である．



時空は曲がっているか？

2つの格子を定める写像 F^* と F は同じものではないが，格子の形はよく似ている．何らかの共通の原因で，似た形になったのだろうか？ この形になる理由は，F^* の格子の場合は，直観的に明らかである．曲がっている地球の表面を，平らな地図にするには，歪み，つまり，異なる場所には異なる縮尺を使うことが不可欠だからである．曲った F^* の格子は，突き詰めると，地球の表面が曲っている(is curved)ことの結果である．それでは，F の格子は時空が曲っているということを言っているのだろうか？ そもそも，時空が曲っているとは，いったいどういうことだろうか？ もっと証拠を集めることにしよう．

円の周長

円周と直径の比

観測者 R の (t,y,z) 慣性座標系に対して回転している，G の (τ,η,ζ) 座標

系を再び考えよう．距離を測るために，(η,ζ) 平面に格子状に定規を並べることにする．動径方向(放射状の直線上)と円周方向(同心円上)に並べると，極座標のようになる．ここで，1 つの円周上に置かれた定規の長さは半径より十分小さく，円周上の距離を，円周から離れずに十分正確に測れるものと仮定する．この格子で，円の直径と円周を測り，その比を計算しよう．

定規は円周方向に収縮する

この状況を慣性座標系 R から見てみよう．すべての定規は運動しているので，**運動の方向**に収縮する．したがって，動径方向に置かれた定規には何の効果もないが，円周方向に置かれたの定規は，運動の方向に平行に置かれているので短くなる．具体的には，半径 r の同心円上では，定規は速さ $v = r\omega$ で運動しているので，その長さは $\sqrt{1-v^2} = \sqrt{1-r^2\omega^2} < 1$ 倍に収縮する．

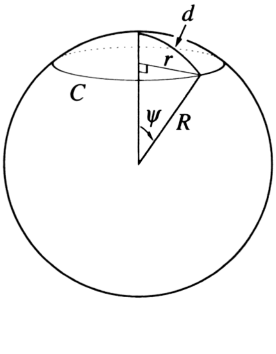
(η,ζ) 平面は非ユークリッド的

ここで，原点を中心とする半径 $r > 0$ の円を考えよう．観測者 R,G は動径方向の長さについては合意しているので，この指定には何のあいまいさもない．観測者 R の(回転しない)定規を使うと円周の長さは $2\pi r$ である．しかし，R から見ると，G の座標系に固定された円周方向の定規は $\sqrt{1-r^2\omega^2}$ 倍に収縮している．したがって，**これらの**定規で測ったときの円の半径と円周の長さとの比は

$$p = \frac{円周}{直径} = \frac{2\pi r/\sqrt{1-r^2\omega^2}}{2r} = \frac{\pi}{\sqrt{1-r^2\omega^2}} > \pi$$

となる．言い換えると，円周に沿って定規の目盛を数えると，直径に沿って数えた場合に比べて $p > \pi$ 倍の個数の目盛がある．これは，R が数えた場合を考えて求めたものだが，G にとっても同じ結果になる．観測者 G が距離の測定をする際には，G の座標系から見て静止しているこれらの定規を使う．したがって，G が (η,ζ) 平面で行う距離の測定の結果には，ユークリッド幾何の法則に従わないものがあることがわかった．

極地の地図も非ユークリッド的



ここでも，地球の地図の場合を考えてみると，G に何が起きているかがよくわかる．北極付近の地図を考えよう．北極から地表に沿って d マイルの距離にある緯線の長さ C はどれだけだろうか．平らな地図では，距離は $2\pi d$ マイルになるだろうが，地球上での実際の距離はこれより短い．長さ C を求めるのに，この緯線のなす円は一平面上にあり，その円の中心は，平面と地軸が交わる点である．この円の半径を r マイルとしよう．北極から地表面に沿って円に至る円弧が長さ d マイル，地球の中心とその円弧の両端とを結んだときの角の大きさが ψ ラジアン，地球の半径が R マイルであるとすると，これらの間には $d = R\psi$, $r = R\sin\psi$ という関係があり，

$$C = 2\pi r = 2\pi R\sin\psi.$$

となるので，求める比は

$$\frac{C}{2d} = \frac{2\pi R\sin\psi}{2R\psi} = \frac{\sin\psi}{\psi}\pi$$

である．角の大きさが $\psi > 0$ のときには $\sin\psi/\psi < 1$ となるので，この比はつねに π より**小さい**．したがって，この極地の地図での距離の測定結果はユークリッド幾何の法則に従わない．

この例では，その理由は明らかである．ユークリッド幾何は平らな平面に

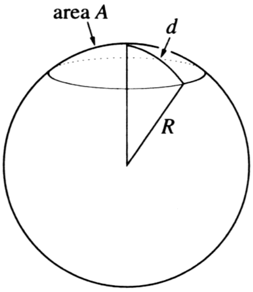
適用されるのに対し，地球は曲がっているのが原因である．このことは，回転する (η, ζ) 平面もまた曲がっているのではないかということを示唆する．ただ，(η, ζ) 平面の曲がり方は球面と同じとは限らない．実際，円周の直径に対する比は，球面上では π より小さいが，回転する平面では π より大きい．

練習問題

1. (a) 慣性座標系に対して角速度 ω で回転している座標系で，中心から距離 r だけ離れた点の観測者の固有時間は，関数 $\tau = T_0/\sqrt{1 - r^2\omega^2}$ で表される．逆に，距離 r を τ で表す逆関数 $r = r(\tau)$ を求めよ．
   (b) 関数 $r(\tau)$ が $\tau \geq T_0$ に対してのみ定義されており，極限 $\tau \to \infty$ で $r \to 1/\omega$ となることを示せ．
   (c) 導関数 $r'(\tau)$ を求めて，極限 $\tau \to T_0$ で $r' \to \infty$, 極限 $\tau \to \infty$ で $r' \to 0$ となることを示せ．関数 $r = r(\tau)$ のグラフを描き，本文のグラフが正しいことを確認せよ．
2. (a) 関数
$$F : \begin{cases} \tau = \dfrac{T}{\sqrt{1 - Z^2\omega^2}}, \\ \zeta = Z \end{cases}$$
   が (T, Z) 平面の長方形の格子を，本文で述べられているように写すことを確かめよ．
   (b) 上の問と同様の分析をして，異なる緯度での，経度あたりの長さを換算する写像
$$F : \begin{cases} \theta = \dfrac{d}{R} \sec\varphi, \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$
   による格子の像が，本文で与えられているような形を持つことを確かめよ．
3. 小さい r に対しては
$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}} = \pi + \frac{\pi\omega^2}{2} r^2 + O(r^4)$$
   となることを示せ．これは，回転座標系での，円周の直径に対する比である．この比が π より大きいのでこの回転座標系を支配する非ユークリッド幾何は**双曲的**(hyperbolic)であると言われる．これに対し，球面上に現れる非ユークリッド幾何は，その比が π より小さいので，**楕円的**(elliptic)であると言われる．

双曲幾何と楕円幾何

4. 球面上の面積を調べると，球面上の幾何が楕円的であることを示すさらなる事実が得られる．半径 R の球の北極から距離 d の点からなる円周を考え，その内側の円の面積を考えよう．（その面積は 5.2 節の練習問題 2 参照.）
$$A = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\frac{d}{R}\right)$$



に等しいことが示せる．テイラーの定理を用いて

$$\frac{A}{\pi d^2} = 1 - \frac{d^2}{12R^2} + O((d/R)^2)$$

を導き，d が小さいときには円の面積がユークリッド幾何の場合よりも小さいことを示せ．

5. 球面と回転座標系の幾何はともに非ユークリッド的だが，しかしまた，これらは以下の意味でともに“局所ユークリッド的”(infinitesimally Euclidean)である．

(a) **球面上で測って**半径 r の円を考えたとき，比

$$\frac{\text{円周}}{2\pi r}, \qquad \frac{\text{面積}}{\pi r^2}$$

の両方が，$r \to 0$ の極限で 1 に近づくことを示せ．したがって，球面の十分に小さい一部分は，平らなユークリッド平面と区別がつかない．

(b) 回転する平面の十分に小さい一部分は，同様に，平らなユークリッド平面と区別がつかないことを示せ．

4.2 等加速度直線運動

この節では，慣性座標系に対して等加速度直線運動する座標系の性質を調べる．

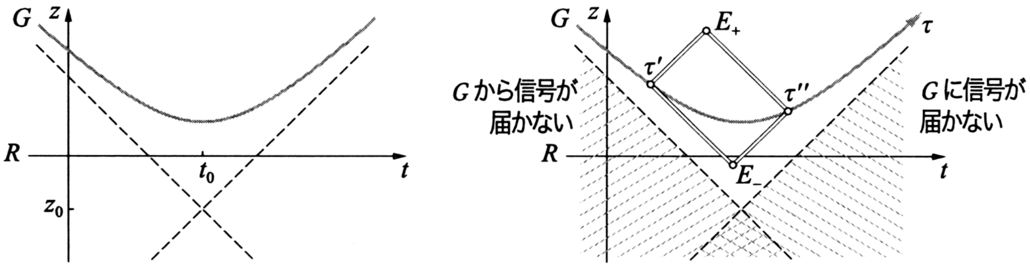
等加速度直線運動の方程式

座標系 $R:(t,z)$ をガリレイ的観測者の慣性座標系とする．もう一人の観測者 G が，R に対して一定の加速度 α で z 軸の正の向きに進んでいるとしよう．観測者 G の世界線が関数

$$z = z_0 + \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + \alpha^2 (t - t_0)^2}$$

のグラフであることを3.3節で見た．これは，直線 $z - z_0 = \pm(t - t_0)$ を漸近線とする双曲線であり，観測者 G の R に対する速度は，事象 $(t,z) = (t_0, z_0 + 1/\alpha)$ においては 0 である．

レーダー式座標系



レーダーを用いて定義される座標

観測者 G の非慣性座標系はどんなもので，R の座標系との関係はどうなっているのだろう？ ここでは，レーダーを使って，与えられた事象の，観測者

G の座標系での (τ, ζ) 座標を決定することにする．観測者 G が固有時間 τ' に発信した光の信号が，事象 E で反射されて，固有時間 τ'' に再び G によって受信されたとする．前節 4.1 の議論から，G の座標系での E の座標は

$$E_{\pm} = \left(\frac{\tau' + \tau''}{2}, \pm\frac{\tau'' - \tau'}{2}\right)$$

である．反射された信号がどちらの方向から返ってくるかを区別しない限り，上のように，2 つの可能性がでてくる．事象 E_+ は ζ 軸の正の側にあり，E_- は負の側にある．これらの事象の ζ 座標の値 $\pm(\tau'' - \tau')/2$ は，実際，ちょうど逆符号になっている．もし，反射された信号がどちらの方向から返ってくるかを区別すれば，E は 1 つに定まる．

G の座標系の適用限界

事象のなかには，G がレーダーで決して観測できないものもある．観測者 G の発するどのような信号も，左上から右下に走る漸近線の下の領域には届かない．たとえ G の世界線をどんなに過去に延長して信号の発信を早めたとしてもである．さらに，右上から左下に走る漸近線の下の領域で反射されたどのような信号も，G は受け取ることはできない．たとえ G の世界線をどんなに未来に延長して受信を待ったとしてもである．したがって，G がレーダーで座標の値を決定できる事象は，図の影のついていない領域に限られる．つまり，加速度運動する観測者 G の座標系は，時空の一部しか覆うことができないのである．詳細においては異なる点もあるが，本質的に同じことが，前節 4.1 で調べた非慣性座標系，回転座標系についても起こった．やがて，非慣性座標系の適用範囲は必ず空間的時間的に限定されることを見ることになる．

G の格子を R に写した像

座標系 G がどのように事象を記述するかを知るために，これまでと同様に，適当な写像 $M : G \to R$ で G の座標系を R の座標系に関係づけよう．解析を簡単にするために，点 (t_0, z_0) が原点に移るような平行移動を行うことにする．すると，座標系 R における G の世界線の固有時間による助変数表示

$$\mathbb{G}(\tau) = \left(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha\tau, \frac{1}{\alpha}\cosh\alpha\tau\right)$$

を持つ．

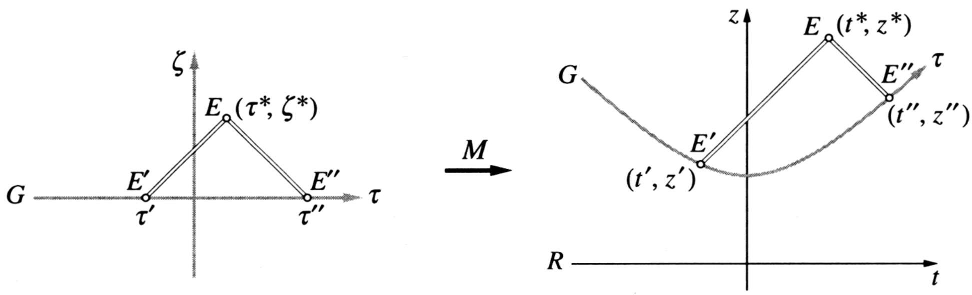
定理 4.1 写像 $M : G \to R$ は式

$$M : \begin{cases} t = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\sinh\alpha\tau, \\ z = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\cosh\alpha\tau \end{cases}$$

で与えられる．

証明： 事象 E の，G での座標が (τ^*, ζ^*)，R での座標が (t^*, z^*) であるとする．知りたいのは，t^*, z^* がどのように τ^*, ζ^* に依存するかである．それには 2 ステップを踏む．まず，レーダーを用いたときに，事象 E で反射されるような信号が，G の世界線上で発信される事象 E', 受信される事象 E'' を E の座標で表す．次に，助変数表示 $\mathbb{G}$ を用いて，G の世界線上での，ギリシャ

文字の座標とラテン文字の座標との関係をつける．



ステップ 1: E を E' と E'' で表す

まず，座標系 G において，反射の事象 E の座標を発信および受信時刻 τ', τ'' で

$$\tau^* = \frac{\tau' + \tau''}{2}, \qquad \zeta^* = \frac{\tau'' - \tau'}{2}$$

と表す．ここで，簡単のために事象 E が図で G の世界線の上側にあるとした．つまり $\zeta^* > 0$ である．ここで，ステップ 2 で必要になる時刻 τ',τ'' を，上の式を逆に解いて，τ^*, ζ^* で表しておくと

$$\tau' = \tau^* - \zeta^*, \qquad \tau'' = \tau^* + \zeta^*$$

となる．

座標系 R のほうでも，反射 E と発信，受信の事象との間に，ちょうど対応する関係がある．事象 E' と E は傾き 1 の一直線上に，事象 E と E'' は傾き -1 の一直線上に，それぞれのっているので，

$$\frac{z^* - z'}{t^* - t'} = 1, \qquad \frac{z^* - z''}{t^* - t''} = -1$$

となる．これらを t^* と z^* について解くと，

$$t^* = \frac{t'' + t' + z'' - z'}{2}, \qquad z^* = \frac{t'' - t' + z'' + z'}{2}$$

が得られる．

ステップ 2: G の世界線上の，ギリシャ文字の座標とラテン文字の座標の関係をつける

観測者 G の世界線上では，事象 E', E'' のギリシャ文字の座標とラテン文字の座標との間には

$$t' = \frac{1}{\alpha}\sinh\alpha\tau', \qquad t'' = \frac{1}{\alpha}\sinh\alpha\tau'',$$

$$z' = \frac{1}{\alpha}\cosh\alpha\tau', \qquad z'' = \frac{1}{\alpha}\cosh\alpha\tau''$$

という関係があることがわかっているので，

$$t^* = \frac{t'' + t' + z'' - z'}{2} = \frac{\sinh\alpha\tau'' + \sinh\alpha\tau' + \cosh\alpha\tau'' - \cosh\alpha\tau'}{2\alpha}$$

$$= \frac{e^{\alpha\tau''} - e^{-\alpha\tau'}}{2\alpha} = \frac{e^{\alpha(\tau^* + \zeta^*)} - e^{-\alpha(\tau^* - \zeta^*)}}{2\alpha} = \frac{e^{\alpha\tau^*}e^{\alpha\zeta^*} - e^{-\alpha\tau^*}e^{\alpha\zeta^*}}{2\alpha}$$

$$= \frac{e^{\alpha\zeta^*}}{\alpha}\sinh\alpha\tau^*$$

と求まる．第 1 行から第 2 行に移る際には，

$$\sinh A + \cosh A = e^{A} \qquad \text{および} \qquad \sinh A - \cosh A = -e^{-A}$$

を用いた．まったく同様にして

$$z^* = \frac{e^{\alpha\zeta^*}}{\alpha}\cosh\alpha\tau^*$$

も示せる．以上で，主張の写像 $M : G \to R$ の式が示された．　**証明終**

写像 M の像

写像 M は非線型だが，その像の様子を描くことは簡単である．格子の縦線 $\tau = k$ は原点を発する半直線

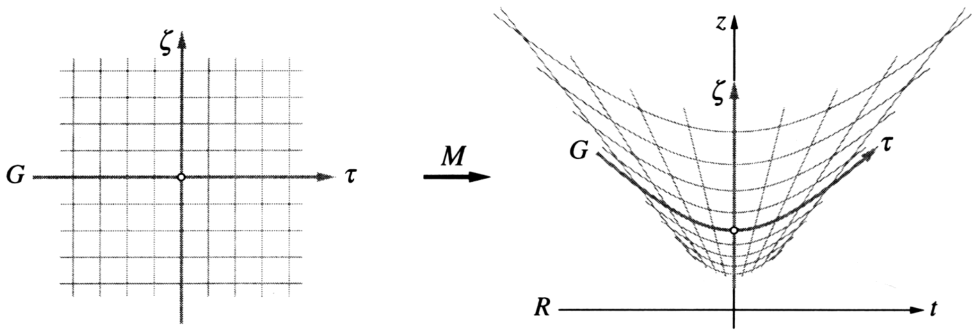
$$t = K_1 e^{\alpha\zeta}, \qquad z = K_2 e^{\alpha\zeta}$$

に写る．ただし，$K_1 = \sinh\alpha k/\alpha$, $K_2 = \cosh\alpha k/\alpha$ である．ここで $K_2 > 0$ なので，$z > 0$ であり，すべての半直線は上半平面に含まれることがわかる．さらに精密には，$z = (K_2/K_1)t$ であり，また $|K_2/K_1| = |\coth\alpha k| \geq 1$ なので，すべての半直線は，直線 $z = \pm t$ を境界とする上側の領域の内部にあることがわかる．

一方，格子の横線は $\zeta = k$ は双曲線

$$t = K\sinh\alpha\tau, \qquad z = K\cosh\alpha\tau$$

に写される．ただし，$K = e^{\alpha k}/\alpha$ である．関係 $z^2 - t^2 = K^2$ が成り立つことから，これらは共通の漸近線 $z = \pm t$ を持つ．したがって共通の中心を持つ双曲線の族である．運動学的にいうと，これらは，R から見ると，さらに任意の慣性座標系の観測者から見ても，一定の共通の加速度 $1/K = \alpha e^{-\alpha k}$ で運動する観測者の族の世界線である．



しかし，加速度の大きさは k に依存する．大きな k の値を持つ観測者ほど，加速度の大きさは小さい．したがって，このことから，R の立場からは，観測者の ζ が同じ値をとるからといって，観測者と G との間の距離が同じだということにはならない. なぜなら，フィッツジェラルド収縮があるからである．すべての観測者は，R の座標系では加速していくので，収縮の程度は，時間とともに増大していく．

G から距離一定の世界線

それでは，観測者 G に対する速度が 0 であるような世界線はどこにあるのだろう？ それは，座標系 R では，G の世界線である双曲線を平行移動した

双曲線の族である．式では，z_0 を族の助変数として

$$\alpha^2(z-z_0)^2 - \alpha^2 t^2 = 1$$

で表される．この式を G の座標で表すには，写像 M で与えられる t と z の式を代入すればよい．したがって，

$$\alpha^2\left(\frac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\cosh\alpha\tau - z_0\right)^2 - \alpha^2\left(\frac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\sinh\alpha\tau\right)^2 = 1$$

となる．これを整理すると

$$e^{2\alpha\zeta}\left(\cosh^2\alpha\tau - \sinh^2\alpha\tau\right) - 2\alpha z_0 e^{\alpha\zeta}\cosh\alpha\tau + \alpha^2 z_0^2 - 1 = 0$$

となる．ここで，$u = e^{\alpha\zeta}$ とおいて，$\cosh^2\alpha\tau - \sinh^2\alpha\tau = 1$ を使うと，2 次方程式

$$u^2 - 2(\alpha z_0\cosh\alpha\tau)u + \alpha^2 z_0^2 - 1 = 0$$

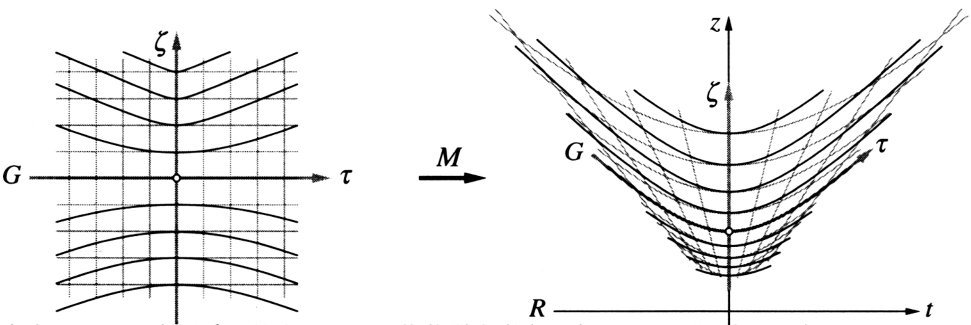
が得られる．これらの世界線は，R の座標系での双曲線の**上側**の半分なので，平方根の前の符号として**正**のものを選ぶ．

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\alpha z_0\cosh\alpha\tau + \sqrt{4\alpha^2 z_0^2\cosh^2\alpha\tau - 4\alpha^2 z_0^2 + 4}}{2} \\ &= \alpha z_0\cosh\alpha\tau + \sqrt{\alpha^2 z_0^2(\cosh^2\alpha\tau - 1) + 1} \\ &= \alpha z_0\cosh\alpha\tau + \sqrt{\alpha^2 z_0^2\sinh^2\alpha\tau + 1}. \end{aligned}$$

これで，G の座標系での世界線の式

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\alpha z_0\cosh\alpha\tau + \sqrt{\alpha^2 z_0^2\sinh^2\alpha\tau + 1}\right)$$

が求まった．これらは，下の図に黒い線で描かれている．



R で静止している物体は G では下向きに加速

今度は，R の座標系で静止している物体群を考えよう．その世界線は，水平な直線群 $z = b$ になる．観測者 G は，物体に対して加速しているので，G の座標系では，物体はみな下向き（ζ の負の向き）に加速しているように見える．このことを示すために，G の座標系における物体の世界線を求めよう．世界線は

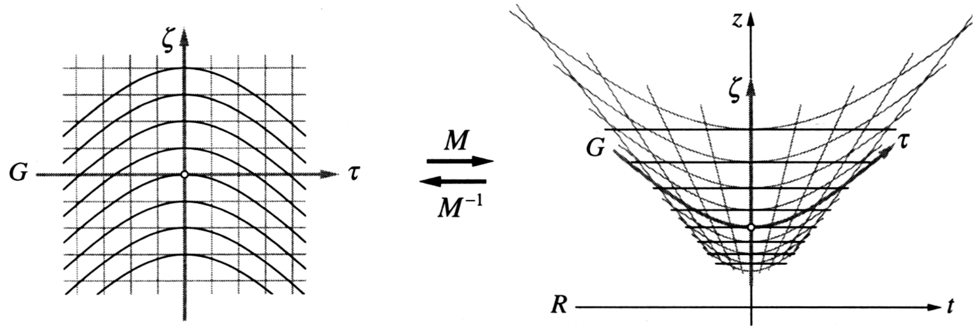
$$\frac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\cosh\alpha\tau = b$$

で定義され，したがって $e^{\alpha\zeta} = \alpha b\,\mathrm{sech}\,\alpha\tau$ となり，

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha b \operatorname{sech}\alpha\tau) = \frac{1}{\alpha}\ln(\operatorname{sech}\alpha\tau) + \frac{\ln(\alpha b)}{\alpha}$$

が得られる．第 2 項 $\ln(\alpha b)/\alpha$ は定数であり，これらの曲線はすべて，1 つの曲線 $\zeta = \ln(\operatorname{sech}\alpha\tau)/\alpha$ を ζ 軸の方向に平行移動して得られる．また，

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\tanh\alpha\tau \to \mp 1 \quad (\tau \to \pm\infty)$$



であるので，曲線の傾きは，$\tau \to +\infty$ の極限で -1 に，$\tau \to -\infty$ の極限で $+1$ に近づく．時間 τ が小さいときには，テイラーの定理から，

$$\zeta \approx -\frac{\alpha}{2}\tau^2 + \frac{\ln(\alpha b)}{\alpha}$$

となり，G の座標系では，これらの物体は同じ加速度 $-\alpha$ で ζ 軸の負の向きに落下運動しているように見える．座標系 R では，時刻 $\tau = 0$ に一瞬，G は静止しているように見えるが，この時刻には，すべての物体が R の座標系で静止しているように見える．

逆写像 M^{-1}

観測者 G の座標系におけるこれらの曲線は，結局は，$z > |t|$ で定まる領域 V で定義された逆写像 M^{-1} から決まる．練習問題 2 で，$M^{-1} : V \to G$ が式

$$M^{-1} : \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\dfrac{t}{z}\right), \\[2ex] \zeta = \dfrac{1}{2\alpha}\ln\left(\alpha^2(z^2 - t^2)\right) \end{cases}$$

で与えられることを確かめる．

写像 M と M^{-1} のもとでの光円錐の像

写像 M と M^{-1} は非線型だが，光円錐の形を保つ．特に，傾き ± 1 の直線は M によって傾き ± 1 の直線に写される．実際，直線 $\zeta = \pm\tau + k$ を考えると，

$$t = \frac{e^{\pm\alpha\tau}e^{\alpha k}}{\alpha}\sinh\alpha\tau,$$
$$z = \frac{e^{\pm\alpha\tau}e^{\alpha k}}{\alpha}\cosh\alpha\tau$$

であり，

$$z \mp t = \frac{e^{\pm\alpha\tau}e^{\alpha k}}{\alpha}(\cosh\alpha\tau \mp \sinh\alpha\tau) = \frac{e^{\pm\alpha\tau}e^{\alpha k}e^{\mp\alpha\tau}}{\alpha} = \frac{e^{\alpha k}}{\alpha}$$

となる．つまり，$z = \pm t + \dfrac{e^{\alpha k}}{\alpha}$ であり，これは，(t, z) 平面の傾き ± 1 の直

線である．

定規時計式座標系

定規時計式座標系

等加速度直線運動する G の座標系を定めるのに，レーダーのかわりに，一群の並んだ定規と時計を使うことを考えよう．回転座標系の場合には，このやりかたで測った“時計”時間は，$\zeta = 0$ の点を除いては，“レーダー”時間（τ 軸上の G 自身の時間を参照して測る時間）と一致しなくなってしまうことを見た．まったく同じことが，等加速度直線運動の場合にも起きる．アインシュタインは，ドップラー効果を利用してこのことを実証して見せた．

証明を行うために，多数の時計を ζ 軸上に ζ 座標の一定の値ごとに置こう．そして，位置 $\zeta = h$ には観測者 C を置く．観測者 C の固有時間はこの点に置かれた時計で測られる．簡単な計算で（定理 3.8 参照）G と C の世界線が，それぞれグラフ

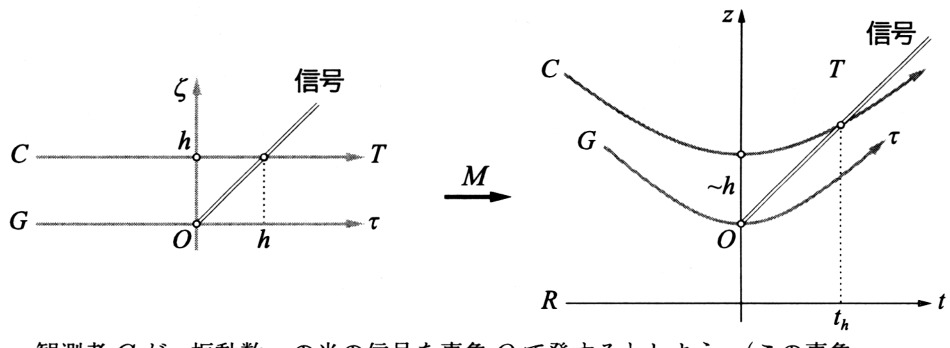
$$z_G = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 t^2 + 1}, \quad z_C = \frac{e^{\alpha h}}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2}{e^{2\alpha h}} t^2 + 1}$$

であることが示せる．これらの双曲線は，**平行**ではなく**同心**（中心と漸近線を共有）である．この形から，G と C の加速度はそれぞれ α と $\alpha/e^{\alpha h}$ であることがわかる．時刻 $t = 0$ では，z 座標の差は

世界線は中心を共有する双曲線

$$z_C - z_G = \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha} = h + O(h^2)$$

である．つまり，z 座標の差と，ζ 座標の差は，h の 1 次まで一致する．



観測者 G が，振動数 ν の光の信号を事象 O で発するとしよう．（この事象は G の座標系の原点だが，R の座標系の原点ではない．）信号が発信されるときには，慣性座標系 R から見た G の速度は 0 であり，赤方偏移は起こらない．しかし，信号が C で受信されるときには，C は R の座標系で正の速度 v_h を持っており，ドップラー効果によって振動数は赤方偏移を受ける．観測者 C の立場では，振動数は

ドップラー効果

$$N = \nu\sqrt{\frac{1 - v_h}{1 + v_h}}$$

となる（2.4 節参照）．速度 v_h を決定するために，G の座標系では信号の世界線が $\zeta = \tau$ であること，したがって，到着時刻は $\tau = h$ であることに着目し

よう．座標系 R における到着時刻を $t = t_h$ とすると，

$$t_h = \frac{e^{\alpha h}}{\alpha}\sinh\alpha h, \qquad v_h = \tanh\alpha h, \qquad N = \frac{1}{e^{\alpha h}}\nu$$

が成立することを練習問題3の中で示す．

C と G の固有時間の比較

実際，振動のピークの間の時間の差(**周期**(period))が，2つの時計の進みぐあい，つまり C と G の固有時間を比べる1つの基準になる．発信時に G の時計で測ると周期は

$$\Delta\tau = \frac{1}{\nu}\ 秒$$

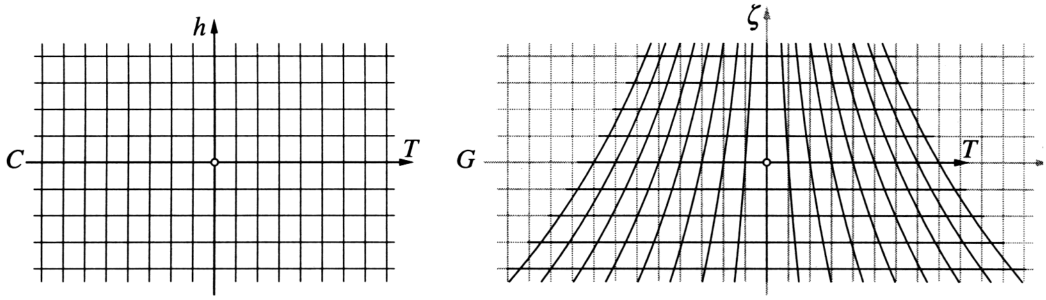
であり，受信時に C の時計で測ると

$$\Delta T = \frac{1}{N} = e^{\alpha h}\Delta\tau\ 秒$$

である．回転座標系との比較のために，ここでも同じように G の時間を C の時間で表そう．結果は

$$\Delta\tau = F(h)\Delta T, \qquad F(h) = e^{-\alpha h}$$

となる．因子 $F(h)$ が，C の世界線 $\zeta = h$ 上での2つの時間スケールの比である．観測者 G の時計が C の時計よりも遅く進むのは，$F(h) < 1$ のとき，すなわち $h > 0$ のときである．ここでの，この因子 F は，回転座標系の場合の写像 F とちょうど対応している．写像 F は，定規時計式に測られた時間 T とレーダー式に G に測られた時間 τ とを関係づけるものだった．



時間の伸びと縮み

上の図の見方は回転座標系の場合と同じである．右の図の縦方向の灰色の直線 $\tau =$ 定数 は，G のレーダー式座標であり，黒の曲線 $T =$ 定数 は，C が ζ 軸上のいろいろな場所に同じ時計を置いて測った定規時計式座標である．期待されるように，この2つの座標は τ 軸上で一致するが，それ以外では一致しない．回転座標系の場合との相違点は，今回の場合には黒の曲線は τ 軸に関して線対称でないという点である．つまり，観測者 C の時計は，G に比べて，$h > 0$ では速く，$h < 0$ では遅く進む．光の周波数について言うと，G の上側 $(h > 0)$ にいる観測者 C にとってはドップラー効果によって赤方偏移が起こるのに対し，下側 $(h < 0)$ にいる観測者 C にとっては**紫方偏移**(violet shift)が起きる．

時空の曲がりのさらなる証拠

ここでも再び，加速度運動する観測者 G の非慣性座標系では，どのような座標をとっても，その値は1個の定規と時計の測定結果とは見なせない，と

いう例に出会ったことになる．同様の欠陥は地球の地図にもある．地図上で測ったどの距離もすべて，地表面上で測った距離に比例しているようにはできない．地球(のある程度広い地域)の地図は，縮尺1個では正確に作れない．地球の地図の場合には，この欠陥の原因は曲率，正確にはつまり地球は曲がっているのに地図は曲がっていないためであると考えられる．この例からの類推で，時空の場合にも同じ状況になっていると考えることにする．つまり，上で考察したような，加速度運動している座標系での間隔の測定結果が時空の間隔と比例しないということは，時空が曲がっているからかもしれない．この推測は，次のようにまとめられる[注2]．

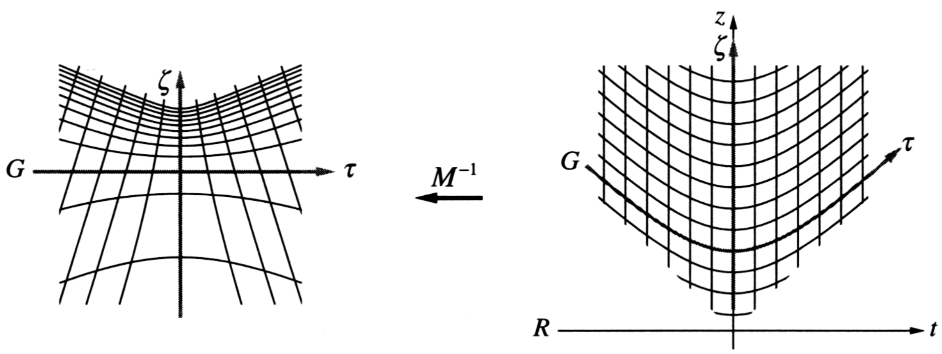
加速度運動 $\Longrightarrow$ 非慣性座標系 $\Longrightarrow$ 曲った時空

練習問題

1. 本文で用いた関係 $\zeta = \dfrac{1}{\alpha}\ln(\operatorname{sech}\alpha\tau) = -\dfrac{\alpha}{2}\tau^2 + O(\tau^4)$ を確かめよ．
2. (a) 次の2つの写像が互いに逆写像の関係にあることを示せ．ただし $\alpha > 0$ とする．

$$M : \begin{cases} t = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\sinh\alpha\tau, \\ z = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\cosh\alpha\tau, \end{cases} \qquad M^{-1} : \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\dfrac{t}{z}\right), \\ \zeta = \dfrac{1}{2\alpha}\ln\left(\alpha^2(z^2-t^2)\right). \end{cases}$$

   (b) 写像 M で (τ,ζ) 平面全体を (t,z) 平面に写したときの像を描け．
   (c) 写像 M^{-1} による直線 $z = vt + z_0$ の像を描け．変数 v, z_0 の値が像にどのように影響するか述べよ．
   (d) 右側の図の R の座標系を考える．描かれた格子は，縦方向の直線 $t = t_0$ と，τ 軸の像に平行な双曲線 $\alpha^2(z-z_0)^2 - \alpha^2 t^2 = 1$ とからなっている．写像 M^{-1} による，これらの曲線の像の方程式を求めよ．方程式から曲線の像を正確に描き，下の左の図に描かれたような形であることを確かめよ．



[注2] 訳注：ここで，曲った時空とは曲率がゼロでないことを直ちには意味しない．

3. (a) 本文中のドップラー効果の議論で，観測者 C が信号を受信する事象を R の座標系で表すと

$$t_h = \frac{e^{\alpha h}}{\alpha}\sinh\alpha h, \qquad z_h = \frac{e^{\alpha h}}{\alpha}\cosh\alpha h$$

となることを示せ．

(b) この事象における C の速度が $v_h = \tanh\alpha h$ であることを示し，そのことから

$$F(h) = \sqrt{\frac{1-v_h}{1+v_h}} = e^{-\alpha h}$$

を導け．

(c) 式

$$\tau = F(h)T,$$
$$\zeta = h$$

で与えられる写像 $(T,h) \to (\tau,\zeta)$ を考える．(T,h) 平面の格子の像が，本文で与えられた形であることを確かめよ．

4.3　ニュートンの重力理論

等価原理

慣性質量

ニュートン力学では，**質量**が，2つの異なる，そして概念的に区別すべき場面で現れる．場面の1つめは慣性である．ニュートンの運動の第2法則により，力は加速度に比例するが，その比例定数が物体の**慣性質量**である．このことをよく理解するために，まず電気力の場合を見てみよう．

電気力と重力

電荷を帯びた2つの物体は，電気力を及ぼしあう．その大きさ F は，2つの物体の電荷の q_1, q_2 の両方に比例し，物体の間の距離 r の2乗に反比例する．すなわち，

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$$

である．ただし，電荷を帯びていない物体もあり，その物体に対する力は0になる．さらに，電気力は，2つの電荷の符号に応じて，引力にも斥力にもなりうる．これに対して，重力はすべての物体にはたらき，常に引力である．

ニュートンの万有引力の法則

ニュートンの万有引力の法則(law of universal gravitation)の式は，電気力の式と完全に対応して

$$F = G\frac{m_{\mathrm{g}}M}{r^2}, \qquad G = 6.67\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

である．

重力質量

この式では，電荷に相当する“重”荷の役目を果たしているのは**重力質量**(gravitational mass)である．一見したところでは，重力質量が慣性質量と同じである必然性はない．2種類の質量を比較するために，地球の表面にある物体にはたらく重力を考えよう．このときには，地球の中心から物体まで

の距離 r と，地球の重力質量 M は定数である．したがって，物体にはたらく重力は，物体の重力質量 $m_{\rm g}$ に比例して，

$$F = Km_{\rm g}, \qquad K = \frac{GM}{r^2} = 定数$$

重力加速度は一定か

という形になる．ここで，ニュートンの運動の第 2 法則を使うと，$m_{\rm i}$ を物体の慣性質量，g を重力による加速度としたとき，この力 F は $m_{\rm i}g$ に等しいことになる．

$$Km_{\rm g} = F = m_{\rm i}g, \qquad したがって \qquad g = K\frac{m_{\rm g}}{m_{\rm i}}.$$

2 つの物体があって，物体によって比 $m_{\rm g}/m_{\rm i}$ が異なるならば，g もまた物体によって異なり，したがって，物体が落下するときの加速度が物体によって異なることになる．だが，そのような現象は観測されていない．**地球の表面では，すべての物体は，重力によって同じ加速度で運動する**．そこで，$m_{\rm g} = m_{\rm i} = m$ と考えることにしよう．

人工重力

すると，**自由落下**(freely falling) している物体，つまり，重力以外の力がはたらいていない物体は，みな同じ割合で落下する．ところで，これとまったく同じことが起きる場合がある．例えば，まったく重力を受けていない宇宙船が，ロケットエンジンを噴射して，決まった方向に一定の加速度で加速する場合である．宇宙船内部の，力を受けていない物体は，宇宙船に固定された座標系からは，宇宙船の加速度と大きさは同じ，向きは反対の加速度で運動するように見える．したがって，この座標系では，ロケットエンジンの噴射によって重力が作り出されたということができる．

重力場を打ち消す

同様に，人工的に重力場を打ち消すこともできる．実際，無重量状態の実験に使われる飛行機の中では，人工的に重力を打ち消している．この飛行機は，実験のために 20 秒から 30 秒続けて，弾道的な飛行する，つまり，弾丸の飛行を正確にまねて，しばらく上昇しその後しばらく落下する．このとき，飛行機の中では，重力以外の力を受けない物体は，飛行機と同じ加速度で落下する．したがって，飛行機に固定された座標系では，加速度が 0 となり，物体は空中を浮遊する．この場合，地球の重力場は “相殺” されたのだ．同じ理由から，地球のまわりの軌道を周回する宇宙船の中では，通常の地球の重力場は感じられない．宇宙船は地球の重力によって落下を続けているのだが，水平方向に十分大きな速度を持っているので，軌道を周回し続ける．

重力と加速は等価

結局，地球上に固定された座標系 K (**実験室**座標系) で観測される重力場と，一定の加速度で運動する座標系 K′ に作り出される重力場との間に区別をつけることはできないと結論できる．1911 年にアインシュタインは，この結論を物理法則として採用した．これを**等価原理**(equivalence principle) と呼ぶ [12, p. 100].[注3]

> しかし，この 2 つの系 K と K′ が物理的に厳密に等価であると仮定するならば，すなわち，系 K を，重力場のない空間で，一定の加速度で運動していると見なすことが許されると仮定するならば，私達はこの経験法則の非常に満

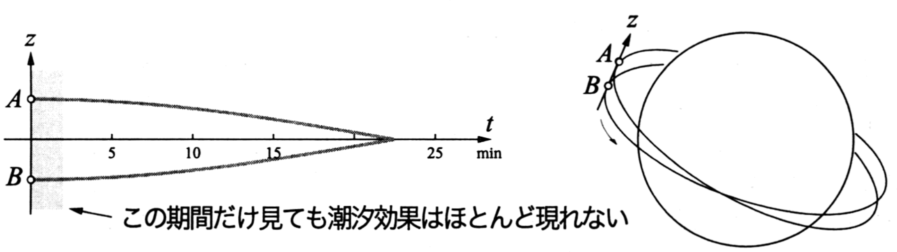
[注3] 訳注：和訳については訳者のノート参照.

足な解釈を得ることができる．この厳密な物理的等価性の仮定のもとでは，座標系の絶対加速度というようなものを考えることはできなくなる．これはちょうど，通常の相対論[注4]では絶対速度というようなものを考えるのが禁止されているのと同じである．そして，この仮定のもとでは，重力場中の物体がすべて同じ加速度で運動するということは当然の帰結となる．

局所座標系

等価原理は，重力による加速度が一定である場合についてのものである．しかし，それは現実的な仮定ではない．地球周辺では，高度が高いほど重力による加速度の大きさは小さくなるし，加速度の向きも場所によって異なる．この違いを隠すためには，実験室座標系 K の適用範囲に制限を加えて，その中では加速度がほぼ一定になるようにしなくてはならない．言い換えると，K と K′ は，空間の小さい領域だけを記述する**局所**座標系でなければならない．等価原理が本当に成立するのは，局所座標系についてのみである．

座標系の適用範囲は，時間方向にも制限を加えなければならない．その理由を考えるために，軌道周期は 90 分で地球の周りの低い軌道を周回している宇宙船を考えよう．上で見たように，重力場の大きさが内部でほぼ定数であるためには，宇宙船の大きさは十分に小さくなければならない．つまり，宇宙船に固定された座標系から見て重力場は 0 で一定でなければならない．しかし，その場合にも，次のようにすると重力の効果が観測にかかってしまう．2 つの物体 A, B を，軌道面と垂直な z 軸上に，互いに少し離して静止させ，手を離そう．



潮汐効果

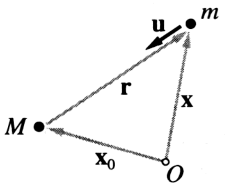
この 2 つの物体は，ずっと互いに静止したままではいない．少しずつ近づいていき，約 22 分後に衝突する．このことは，2 つの物体が宇宙船と無関係に，それぞれ，半径は同じだが異なる大円軌道を回っていると考えると簡単に理解できるだろう．2 つの物体は，軌道が交わるところで衝突する．これら 2 つの物体は，それぞれの軌道がいちばん離れたところから出発し，軌道を $90/4 = 22.5$ 分かけて 1/4 周して，最初の交点に達する．このゆっくりした位置のずれは**潮汐効果**(tidal effect)によるものである．つきつめると，潮汐効果は，A と B の軌道上で重力場の方向が微妙に異なることに原因がある．

潮汐効果によって，重力と一定の加速度とを区別することができる．ただし，この効果が見えるようになるまでにはある程度の時間がかかる．座標系の時間軸方向の大きさを，22 分でなく 2 分にすれば，この潮汐効果は検出できないかもしれない．等価原理は，このように十分小さな座標系をとったときにだけ成立する．

注 4　訳注：特殊相対論のこと．

重力ポテンシャル

質量 M が一点 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ に固定されているとしよう．このように，空間的な広がりがなく，質量と位置だけがあるような物体を質点(point mass)という．ニュートンの万有引力の法則によれば，この質点は，$\mathbf{R}^3$ の任意の点 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ におかれた質量 m の "テスト粒子" に力を及ぼす．M に対する m の相対座標ベクトルを $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ とすると，M が m に及ぼす重力は，



$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} = m\frac{GM}{r^2}\,\mathbf{u}$$

というベクトルで表せる．ここで $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$ は重力定数，$r = \|\mathbf{r}\|$ は距離，$\mathbf{u} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\| = -\mathbf{r}/r$ は，m から M に向かう向きの単位ベクトルである．

ベクトル $\mathbf{F}$ と $\mathbf{A}$ は $\mathbf{R}^3$ の各点で変化する．このような，位置に依存するベクトルを**ベクトル場**(vector field)と呼ぶ．ベクトル場 $\mathbf{F}$ はテスト粒子の質量 m に依存するが，$\mathbf{A}$ は依存せず，質量 M と位置 $\mathbf{x}$ だけで決まる．このベクトル場 $\mathbf{A}$ を，M による**重力場**(gravitational field)と呼ぼう．この量は加速度の次元を持っている．

重力場

多変数の微積分やベクトル解析に出てくる簡単なベクトル場として，関数の勾配(グラディエント(gradient)) ∇f がある．いま考えている $\mathbf{A}$ もその例であり，

重力ポテンシャル

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{GM}{r}$$

とおくと $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ となる．($\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ の負符号の意味は，後に重力場のする仕事について考えるときに明らかになる.) 関係 $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ を確かめるに，まず

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = GM\frac{x - x_0}{r^3}$$

を示し，y, z についても同様のことを示す．すると，

$$\begin{aligned}
-\nabla\Phi &= -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - y_0}{r}, \frac{z - z_0}{r}\right) = \frac{GM}{r^2}\,\mathbf{u} = \mathbf{A}
\end{aligned}$$

となり，確かに成立することがわかる．関数 $\Phi(x, y, z)$ を，この重力場の**重力ポテンシャル**(gravitational potential)と呼ぶ．次元は，速度の 2 乗である．

ニュートンの万有引力の法則の重要な性質は，**重ね合せの法則を満たすこと**である．つまり，複数の質点がある場合のポテンシャルは，個々の質点の作るポテンシャルの和で与えられる．場は本質的にポテンシャルの微分であり，微分に対しても重ね合せの法則(線型性)が成り立つので，場についても重ね合せの法則が成り立ち，質量に関して場は線型である．特に，何個かの質点 $M_1, \ldots, M_k$ がある場合を考えよう．質点 M_j がそれぞれ $\mathbf{x}_j$ にあるとすると，

重力には重ね合せの法則が成り立つ

$$\Phi_j = -\frac{GM_j}{r_j} \quad , \quad \mathbf{A}_j = \frac{GM_j}{r_j^2}\,\mathbf{u}_j$$

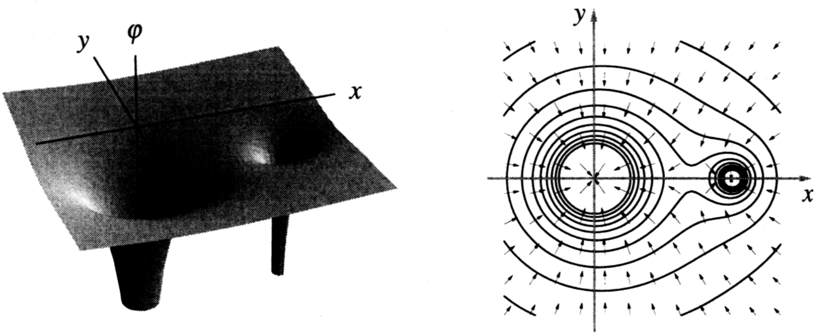
となる．ここで，$\mathbf{r}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x_j}$, $r_j = \|\mathbf{r}_j\|$,$\mathbf{u}_j = -\mathbf{r}_j/r_j$ である．Φ_{total} と $\mathbf{A}_{\mathrm{total}}$ をすべての質点が同時に存在する場合のポテンシャルと場とすると，

$$\Phi_{\mathrm{total}} = \Phi_1 + \cdots + \Phi_k, \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{total}} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k$$

となる．質点 M_j は，重力場の**重力源**(source)であるという．この場合は，重力源は離散的であり，点源，点重力源(point source)とも呼ばれる．もう少し後で，重力源が連続に分布した物質である場合にも重力ポテンシャルが定義できることを見る．

ポテンシャルと場の間の幾何的関係

本質的には，ポテンシャルは場の積分であり，そのために一意的でない．つまり，$\Phi(x,y,z)+C$ もまたポテンシャルと見なせるという，定数 C だけの不定性がある($\nabla C \equiv 0$ だから)．等高線(面)$\Phi(x,y,z) =$ 定数 がいたるところ勾配 $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ と垂直になっていることは，多変数の微積分またはベクトル解析の初歩的な結果である．さらに，$-\nabla\Phi$ は Φ が減少する方向を向いており，この方向にしたがって進んでいくと Φ の極小に到達するので，重力源の位置を知ることができる．



例 1: 2 つの点重力源

例として，質量比が 5 対 1 の 2 つの点重力源がある場合を考えよう．大きい方の質点が $(0,0,0)$ に，小さい方の質点が $(1,0,0)$ にあるとすると，ポテンシャルは

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}$$

となる．上の図は，(x,y) 平面すなわち $\mathbf{R}^3$ の中の 2 次元面 $z=0$ に制限した Φ の様子を描いている．左側の図は，$\varphi = \Phi(x,y,0)$ のグラフである．この時，2 つの点源は無限に深い井戸の底にあり，$\Phi(0,0,0) = \Phi(1,0,0) = -\infty$ である．右側の図に描かれた曲線は，ポテンシャルのいろいろな値に対応する等高線 $\Phi(x,y,0) =$ 定数 である．これらの曲線とともに，重力場 $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ の向きも描かれている(ベクトルの長さには意味がない)．空間 $\mathbf{R}^3$ の中での等高面 $\Phi(x,y,z) =$ 定数 は，これらの曲線 $\Phi(x,y,0) =$ 定数 を x 軸のまわりに回転させて得られる回転面になる．

重力のする仕事

写像 $\mathbf{x}(q)$ ただし $a \le q \le b$ を，$\mathbf{R}^3$ の，点源を通らない経路(道)(path) P の滑らかな助変数表示とする．質量 m のテスト粒子をこの道に沿って動かすときに，重力場のする仕事は，積分

$$W = m\int_P \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}$$

で与えられる．基本的な考え方は，求める仕事は力 $m\mathbf{A}$ と移動した道のり $d\mathbf{x}$ の内積だということである．力は $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ で与えられるので，多変数の微積分の計算方法を使って，

$$W = -m\int_P \nabla\Phi \cdot d\mathbf{x} = -m\Phi\Big|_{\mathbf{x}(a)}^{\mathbf{x}(b)} = -m(\Phi(\mathbf{x}(b)) - \Phi(\mathbf{x}(a))) = -m\Delta\Phi$$

となる．ここで，$\Delta\Phi$ は経路の両端での Φ の値の差を表す．したがって，重力場のした仕事は**経路によらず**端点だけで決まる．すなわち，この力は保存的(conservative)であり，閉曲線を 1 周するときにする仕事は 0 である．

ポテンシャルエネルギーと仕事

関数 $U(x,y,z) = m\Phi(x,y,z)$ を考えよう．Φ は速度の 2 乗の次元を持つので，U は**エネルギー**の次元を持つ．この U を，重力場の中にある粒子 m の**ポテンシャルエネルギー**(potential energy)という．この言葉を使うと，重力場によってなされた仕事は，ポテンシャルエネルギーの低下 $W = -\Delta U$ に等しい，といえる．ポテンシャルエネルギーは，等高線 $\Phi =$ 定数 上では一定で，点源から離れるほど増加する．したがって，点源に近づく経路(いま考えている 2 次元の例の図では "坂を下る" ことになる)ポテンシャルエネルギーは減少し，重力場は正の仕事をすることになる．逆に粒子が点源から遠ざかる場合には，重力場は**負の**仕事をする．これは，何か他のエネルギーが消費されることによって，重力に抗して粒子が重力の井戸から運び上げられたということを意味している．最初に決めた Φ の符号は，この仕事とエネルギーの関係を成立させるためだった．別の例として，地球上の小さい実験室の中での重力場を考えよう．このとき，重力場は一定である．正の z 軸が上向きであるような通常の (x,y,z) 座標系を使うと，

例 2: 一様な重力場

$$\mathbf{A}(x,y,z) = g(0,0,-1), \qquad \Phi(x,y,z) = gz,$$

となる．ここで，$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ は地球表面での重力による加速度である．2 つの量 $\mathbf{A}$, Φ の符号に注意しよう．この重力場での質量 m の粒子のポテンシャルエネルギーは，$U(x,y,z) = mgz$ である．最も，Φ, U には定数を加えるだけの不定性がある．

潮汐

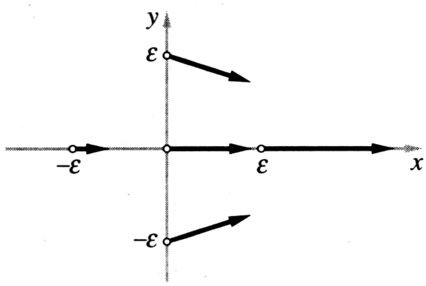
潮汐力

ここまでで，潮汐力を調べるための準備が整った．宇宙船の中で，潮汐効果を検出することができたのは，宇宙船が地球の重力場の中を "落下している" からである．そのとき，潮汐効果は，その落下している宇宙船に固定された座標系に対する**相対**運動として現れた．ここからわかるのは，潮汐効果を分析するには，1 つの点源が作る重力場を仮定して，適当な座標系に移って特定の点での加速度を打ち消し，そして，その点の近くの点での加速を調べればよいということである．

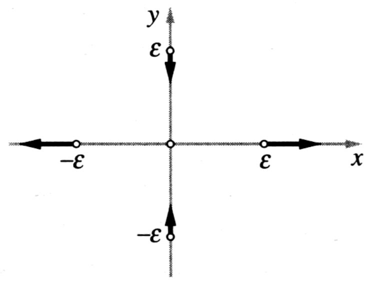
点重力源 M を x 軸上の点 $(k,0,0)$ に置く．単位は $GM = 1$ であるように選ばれているとしよう．質点 M の作る重力場は

$$\mathbf{A}(x,y,z) = -\frac{1}{r^3}(x-k,y,z), \qquad r = \sqrt{(x-k)^2 + y^2 + z^2}$$

である．



$\mathbf{A}(x, y, z)$



$\mathbf{T}(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) - \mathbf{A}(0, 0, 0)$

上の図には，$(0,0,0)$ の近くでの 2 次元面 $z = 0$ の図が描かれている．左側は，重力場 $\mathbf{A}$ そのままであり，右側は，座標系に加速度を与えることで原点での重力 $\mathbf{A}(0,0,0)$ を引き去って得られる潮汐力の場

$$\mathbf{T}(x,y,z) = \mathbf{A}(x,y,z) - \mathbf{A}(0,0,0)$$

である．潮汐力 $\mathbf{T}$ は，y 軸上では原点を力の中心とする引力であり，x 軸上では斥力であることがわかる．場 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{T}$ の x 軸の回りの回転対称性から，潮汐力は，(y,z) 平面のいたるところで，原点を力の中心とする引力である．

各座標軸上での T

テイラーの定理を用いて，原点から各座標軸上を ε だけ離れた点での $\mathbf{T}$ を評価してみよう．まず，y 軸上では，

$$\mathbf{T}(0,\varepsilon,0) = \mathbf{A}(0,\varepsilon,0) - \mathbf{A}(0,0,0) \approx \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}(0,0,0)\,\varepsilon$$

となり，積の微分法を使うと

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}(x,y,z) = \frac{3y}{r^5}(x-k,y,z) - \frac{1}{r^3}(0,1,0) \quad よって \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}(0,0,0) = -\frac{1}{k^3}(0,1,0)$$

を得る．したがって，潮汐力

$$\mathbf{T}(0,\varepsilon,0) \approx -\frac{\varepsilon}{k^3}(0,1,0)$$

は，原点に**向かう**加速を生じさせ，その大きさは，変位 ε に比例し原点と重力源の距離 k の 3 乗に反比例する．

次に z 軸上の結果は y 軸と同じである．しかし，x 軸上については別の計算が必要である．偏微分を計算すると，

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}(x,y,z) = \frac{3(x-k)}{r^5}(x-k,y,z) - \frac{1}{r^3}(1,0,0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}(0,0,0) = \frac{-3k}{k^5}(-k,0,0) - \frac{1}{k^3}(1,0,0) = \frac{2}{k^3}(1,0,0)$$

なので，潮汐力

$$\mathbf{T}(\varepsilon,0,0) \approx \frac{2\varepsilon}{k^3}(1,0,0)$$

は，原点から**離れる向き**に加速を生じさせ，その大きさは，他の軸と同様に，変位に比例し原点と重力源の距離の 3 乗に反比例する．しかし，x 軸上での潮汐による斥力の大きさは，(y,z) 平面内で原点から同じ距離だけ離れた点

での潮汐による引力の大きさの2倍である．

より一般に，任意の点での $\mathbf{T}$ を求めよう．(α,β,γ) を単位ベクトルとするとき，点 $(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta,\varepsilon\gamma)$ での潮汐力 $\mathbf{T}(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta,\varepsilon\gamma)$ は，$\mathbf{A}$ の方向 (α,β,γ) への方向微分を用いて，　**任意の点での T**

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta,\varepsilon\gamma) &= \mathbf{A}(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta,\varepsilon\gamma)-\mathbf{A}(0,0,0)\\ &\approx \varepsilon\nabla\mathbf{A}(0,0,0)\cdot(\alpha,\beta,\gamma)=\varepsilon\alpha\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\varepsilon\beta\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}+\varepsilon\gamma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\end{aligned}$$

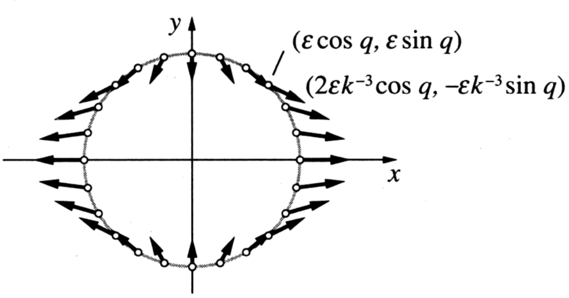
と求められる．特に，断面 $z=0$ で，半径 ε の円周

$$(x,y,0)=(\varepsilon\cos q,\varepsilon\sin q,0)$$

上の点での $\mathbf{T}$ を求めよう．結果は，

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\varepsilon\cos q,\varepsilon\sin q,0) &\approx \varepsilon\cos q\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}(0,0,0)+\varepsilon\sin q\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}(0,0,0)\\ &= \frac{2\varepsilon\cos q}{k^3}(1,0,0)-\frac{\varepsilon\sin q}{k^3}(0,1,0)\\ &= \frac{\varepsilon}{k^3}(2\cos q,-\sin q,0)\end{aligned}$$

であり，これは，断面 $z=0$ 内にあるベクトルである．次の $z=0$ を描いた図には，この円周上の潮汐加速度場の様子が示されている．座標 y, z の対称性から，この図を x 軸の周りに回転して，球面上の潮汐加速度の様子を想像することができる．



この図を見ると，読者は地球の海洋での潮の干満を思い出すに違いない．月は図の外の右側にあり，灰色の円が地球の海洋の理論上の平均水面であり，矢印は海水が実際の潮位まで移動する様子を表す．上で見たように，外向きのはりだしは，内向きのへこみの2倍である．（もちろん潮位は非常に誇張して描かれている．）太陽も潮汐を引き起こすが，その効果は月に比べれば小さい．月の影響が支配的なのは，重力そのものの大きさが重力源までの距離の**2乗**に反比例するのに対し，潮汐の大きさは**3乗**に反比例するからである．月と太陽の，質量と距離の比は次の通りである．　**地球上の潮汐**

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{sun}} &= 2.7\times10^7\ M_{\mathrm{moon}},\\ r_{\mathrm{sun}} &= 4\times10^2\ r_{\mathrm{moon}}.\end{aligned}$$

したがって，重力と潮汐力による加速度の大きさの比は，

$$\|\mathbf{A}_{\text{sun}}\| = G\,\frac{M_{\text{sun}}}{r_{\text{sun}}^2} = G\,\frac{2.7\times 10^7\ M_{\text{moon}}}{(4\times 10^2\ r_{\text{moon}})^2} = 170\ \|\mathbf{A}_{\text{moon}}\|,$$

$$\|\mathbf{T}_{\text{sun}}\| = \varepsilon G\,\frac{M_{\text{sun}}}{r_{\text{sun}}^3} = \varepsilon G\,\frac{2.7\times 10^7\ M_{\text{moon}}}{(4\times 10^2\ r_{\text{moon}})^3} = \frac{2}{5}\ \|\mathbf{T}_{\text{moon}}\|$$

となる．潮汐加速度は $\mathbf{T}$ は，もう 1 つの変数 ε にも依存している．これは今の場合，地球の半径に対応する．

逆 3 乗則は，潮汐加速度が近くの点の間の重力加速度の差であることから来ている．テイラーの定理により，差は重力加速度の微分で書け，重力加速度は逆 2 乗則に従う．よってその微分は逆 3 乗である．

潮汐は “釣り合っている”

この例から，潮汐加速度の特筆すべき性質が読み取れる．ある方向には引力で，別の方向には斥力である．実際，**正味の**加速度は，これから説明する意味で厳密に 0 である．上の例のように，1 個の点重力源が x 軸上に置かれていた場合には，ポテンシャルは

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{1}{r}, \qquad r = \sqrt{(x-k)^2+y^2+z^2}$$

であり，いつものように $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ から潮汐加速度を求めた．その結果，$(0,0,0)$ の点重力源のもたらす潮汐加速度は，y,z 軸上では引力だが，x 軸上では斥力だった．これらのことは，$\mathbf{A}$ の $(0,0,0)$ での偏導関数

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}(0,0,0) = \left(+\frac{2}{k^3}, 0, 0\right),$$
$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}(0,0,0) = \left(0, -\frac{1}{k^3}, 0\right),$$
$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}(0,0,0) = \left(0, 0, -\frac{1}{k^3}\right)$$

を使った計算で見いだされた．ここで，$\mathbf{A}$ の 1 階微分は，次の式のように，ポテンシャルの 2 階微分である．

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right).$$

したがって，Φ の原点での 2 階微分から作った 3×3 行列 $d^2\Phi$ は，

$$d^2\Phi(0,0,0) = -\begin{pmatrix} +\frac{2}{k^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k^3} \end{pmatrix}$$

ラプラシアン

である．ここで，潮汐加速度が釣り合っているということの意味をポテンシャル Φ を使って表現しよう．それは，行列 $d^2\Phi$ の対角和が 0 ということである．この行列の対角成分は，Φ の**ラプラシアン**(Laplacian)に現れる 2 階微分であり，対角和は

$$\nabla^2\Phi(0,0,0) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{2}{k^3} - \frac{1}{k^3} - \frac{1}{k^3} = 0$$

となる．

真空では $\nabla^2\Phi(x,y,z)=0$

ここまで，点 $(k,0,0)$ に置かれた 1 個の点重力源が作る重力場について，すべての解析は原点 $(0,0,0)$ 上で行ってきた．しかし，対称性から，この 2 階微分の行列の対角和は，重力源のある点 $(k,0,0)$ を除いた $\mathbf{R}^3$ のすべての点でも 0 になる，すなわち

$$\nabla^2\Phi(x,y,z)\equiv 0, \qquad (x,y,z)\neq(k,0,0)$$

となることを確かめることができる．これは，正味の潮汐加速度が，重力源の位置以外のすべての点で 0 であることを意味する．

複数の点重力源による潮汐

それでは，重力源が 1 個とは限らない一般の重力場中では潮汐加速度はどうなっているだろうか．合計 k 個の質点 M_j がそれぞれ (x_j,y_j,z_j) に置かれた場合，重力ポテンシャルは，

$$\Phi=-\sum_{j=1}^{k}\frac{GM_j}{r_j}, \qquad r_j=\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2}$$

で与えられる．ここで，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_j}\right)=-\frac{1}{r_j^3}+\frac{3(x-x_j)^2}{r_j^5}$$

であり，y,z についての 2 階微分も同様の形なので，$(x,y,z)\neq(x_j,y_j,z_j)$ なるすべての点 (x,y,z) において，

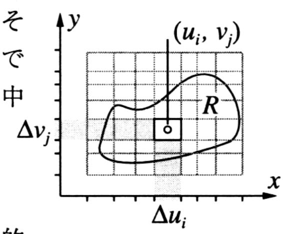
$$\nabla^2\left(\frac{1}{r_j}\right)=-\frac{3}{r_j^3}+\frac{3(x-x_j)^2+3(y-y_j)^2+3(z-z_j)^2}{r_j^5}=0$$

となる．さらに，すべての重力源を同時に考えたときにも，微分の線型性により，重力源の存在しないすべての点で $\nabla^2\Phi=0$ となる．式 $\nabla^2\Phi=0$ が重力源の存在しない領域，すなわち真空中の重力場を特徴づけるので，この方程式を**真空中の場の方程式**(vacuum field equation) と呼ぶ．

重力場の方程式

連続分布する質量の作るポテンシャル

上では質点群の作る重力場を考えたが，連続分布する質量の作る重力場も扱うことができる．連続分布は，点 (x,y,z) での質量密度を表す関数 $\rho(x,y,z)$ kg/m^3 で与えられる．いま，すべての質量が，空間の有界な領域 R に集中している，つまり R の外では $\rho\equiv 0$ であるとしよう．このとき，R を小さな箱(直方体) $P_{i,j,k}$，に分割する．各箱 $P_{i,j,k}$ は，中心が点 (u_i,v_j,w_k) で，辺の長さはそれぞれ Δu_i, Δv_j, Δw_k メートルであるとする．(見やすくするために，図では，3 次元でなく 2 次元，直方体でなく長方形を描いている．) 箱 $P_{i,j,k}$ の中の全質量は，近似的に



$$M_{i,j,k}\approx\rho(u_i,v_j,w_k)\,\Delta u_i\Delta v_j\Delta w_k$$

となる．したがって，R 全体の質量分布の作る重力ポテンシャルは，近似的に，各点 (u_i,v_j,w_k) の質点 $M_{i,j,k}$ の作るポテンシャルの和

$$\Phi(x,y,z)\approx-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{G\rho(u_i,v_j,w_k)}{\sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_j)^2+(z-w_k)^2}}\Delta u_i\Delta v_j\Delta w_k$$

になる．この近似は，箱を小さくするほどよくなる．箱を無限に小さくする極限 $N \to \infty$ では，厳密な値が積分

$$\Phi(x,y,z) = -\iiint_R \frac{G\rho(u,v,w)}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}}\,du\,dv\,dw$$

によって与えられる．

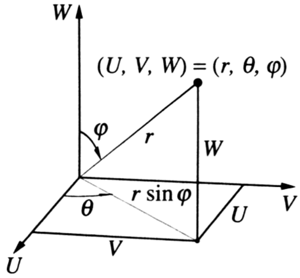
Φ はいたるところ有限

点 (x,y,z) が領域 R に含まれていない場合には，この式の分母は積分領域のどの点でも 0 にならないので，積分は計算でき，有限な値を持つ．点 (x,y,z) が R に含まれる場合には，被積分関数は，点 $(u,v,w)=(x,y,z)$ に特異点を持つように見える．しかし，以下で見るように，この特異点は，デカルト座標から球座標に移ることで取り除くことができ，積分は実は有限の値を持つことがわかる．まず，最初に並進

$$\begin{aligned} U &= u-x, & dU &= du;\\ V &= v-y, & dV &= dv;\\ W &= w-z, & dW &= dw \end{aligned}$$

により定義される並進 $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ で変数変換することにしよう．積分領域は $R^* = T(R)$ となって，

$$\Phi(x,y,z) = -\iiint_{R^*} \frac{G\rho(x+U,y+V,z+W)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,dU\,dV\,dW$$



と書き直され，見かけの特異点は $(U,V,W)=(0,0,0)$ に移る．次に，球座標 (r,φ,θ) を，式

$$\begin{aligned} U &= r\sin\varphi\cos\theta,\\ V &= r\sin\varphi\sin\theta,\\ W &= r\cos\varphi,\\ dU\,dV\,dW &= r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta \end{aligned}$$

で定義する．最後の式は，1 つの座標系での体積要素をもう 1 つの座標系でのものに変換する式で，練習問題 6 で導いている．球座標では，$\sqrt{U^2+V^2+W^2} = r$ であり，

$$\rho(x+U,y+V,z+W) = \rho(x+r\sin\varphi\cos\theta, y+r\sin\varphi\sin\theta, z+r\cos\varphi)$$

という煩雑な式を単に ρ と省略することにすると，重力ポテンシャルは

$$\Phi(x,y,z) = -\iiint_{R^{**}} \frac{G\rho}{r} r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta = -\iiint_{R^{**}} G\rho r\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

という形をとる．ここで R^{**} は，球座標で書かれた R^* である．被積分関数はもはや原点で特異的ではなく，Φ はいたるところ定義され有限の値を持つことがわかる．

R の外で $\nabla^2\Phi = 0$

それでは，Φ が質量の**連続**分布によって作られている場合には，$\nabla^2\Phi$ について何が言えるだろうか．積分

$$\Phi(x,y,z) = -\iiint_R \frac{G\rho(u,v,w)}{r}\,du\,dv\,dw$$

の中で x, y, z を含んでいるのは $r = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}$ の部分だけだから，ラプラス演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を作用させて，積分との順序を交換すると，

$$\nabla^2\Phi(x,y,z) = -\iiint_R G\rho(u,v,w)\ \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)du\,dv\,dw$$

を得る．すでに確かめたように，$r \neq 0$ である任意の点 (x,y,z) で $\nabla^2(1/r) = 0$ である．ここで，$r(x,y,z) = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}$ であり，また，積分変数 (u,v,w) は領域 R の中だけを動くので，点 (x,y,z) が領域 R の外にあるという今の仮定のもとでは，つねに $r \neq 0$ である．したがって，領域 R の任意の点で $\nabla^2(1/r) \equiv 0$ であり，$\nabla^2\Phi(x,y,z) = 0$ が成立する．よって，重力源の分布が連続的であれ離散的であれ，真空中では潮汐加速度の各方向の成分を平均したものは 0 になる．

R の内部での $\nabla^2\Phi$ を計算

しかし，$\Phi(x,y,z)$ は R の内部の点 (x,y,z) でも定義されているので，R の内部での $\nabla^2\Phi(x,y,z)$ も求めることができるはずである．その計算のためには，Φ に対応する重力場 $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ に戻って，$\mathbf{A}$ を用いて潮汐加速度を理解しておくことが手がかりとなる．まず，微分演算子 ∇^2 を，ベクトル微分演算子 ∇ と自分自身との内積として

$$\nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$$

と定義することから始めよう．すると，$\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi = -\nabla\cdot\mathbf{A}$ である．場の成分を $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ とすると，

$$-\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_x,A_y,A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

真空中で $\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$

である．以下で明らかになる理由から，$\mathbf{A}$ の成分の微分をこの形で加えあわせたものは，$\mathbf{A}$ の**発散**(divergence)と呼ばれ，$\operatorname{div}\mathbf{A}$ または $\nabla\cdot\mathbf{A}$ と書かれる．この記号を用いると，真空中のすべての点 (x,y,z) で潮汐加速度の平均が 0 であるという主張は

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(x,y,z) = \nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z) = 0$$

となる．

非圧縮性流体の流れの発散

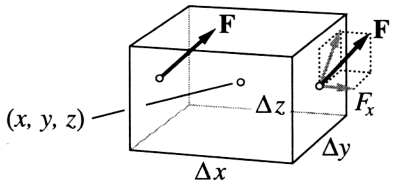
発散の直観的意味を理解するには，流体の流れを考えてみるとよい．簡単のために，非圧縮性の流体を考え，流れは空間の各点で異なるが，点を固定すると時間的には変化しないとしよう．すると，流体は時間的空間的に一定の密度 ρ kg/m^3, を持ち，考えている $\mathbf{R}^3$ の領域内の各点 (x,y,z) での流体の速度はベクトル場 $\mathbf{V}(x,y,z)$ m/s で与えられる．ベクトル場

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{V} \quad \frac{\text{kg/s}}{\text{m}^2}$$

が，いま考えたい流れに対応する．このベクトルが，流れがどちら向きで，単位面積を単位時間にどれだけの量の物質が通過するかを表している．

小さい箱を通過する流れ

流れ $\mathbf{F}$ が，点 (x, y, z) を中心とする，各辺の長さ Δx, Δy, Δz の小さな箱を通過する様子を考えよう．この箱からの，流体の正味の流出量は毎秒何キログラムだろうか．この流体は非圧縮性なので，流体が箱の中で生成したり消滅したりしていない限りは，つまり，箱が**わき出し**(source)または**吸い込み**(sink)を含んでいない限りは，箱からの正味の流出量は0である．しかし，いま必要としているのは，その値がどれだけであれ，正味の流出量を表す式だけである．



1つの面を通過する流れ

正味の流出量は，6つの面を外向きに通過する流れの和で表せる．ここで，箱は十分小さく，流れのベクトル $\mathbf{F}$ は各面上でそれぞれ空間的に一定であると仮定しよう．各面上では，図のように，$\mathbf{F}$ を面に平行な成分と垂直な成分とに分解でき，垂直な成分だけがいま考えようとしている和に効いてくる．右側の面上では，垂直成分は $F_x(x + \Delta x/2, y, z)$ であり，この面を左から右に横切る流れは，近似的に単位面積あたり F_x kg/s と表せ，面の面積 $\Delta y \Delta z$ との積を考えて，

$$\text{流れ} \approx F_x(x + \Delta x/2, y, z)\,\Delta y \Delta z \quad \text{kg/s}$$

となる．同じ議論から，**左側の**面を左から右に横切る流れは，近似的に

$$F_x(x - \Delta x/2, y, z)\,\Delta y \Delta z \quad \text{kg/s}$$

である．しかし，箱は面の右側にあるので，これは**流入量**であって流出量ではない．流出量はこの量の符号を逆にしたものになる．したがって，左右側の面の流出量の合計は，近似的に

$$[F_x(x + \Delta x/2, y, z) - F_x(x - \Delta x/2, y, z)]\,\Delta y \Delta z$$

となる．角括弧の中の量は，極限で微分

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z)\,\Delta x$$

となる量であり，流出量への寄与は

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z)\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

となる．同様に，前後の面，上下の面を通過しての流出量は，それぞれ

$$\frac{\partial F_y}{\partial y}(x, y, z)\,\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \text{および} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial z}(x, y, z)\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

総流出量は発散

で近似できる．したがって，総流出量は，近似的に

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(x, y, z)\right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{kg/s}$$

である．この，$\mathbf{F}$ の各成分の微分の和は，まさに，$\mathbf{F}$ の**発散**と呼んだものである．

上でとった近似は，箱を小さくすることでいくらでも正確になる．特に，箱の大きさが0となる極限では，**任意の** 3 次元の領域 R からの正味の流出量は，積分

$$\iiint_R \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\, dx\, dy\, dz = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

で正確に表せる．スカラー関数 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ が領域 R の内部でほぼ定数だとしてみよう．すると，平均値の定理の積分形から，

発散の意味

$$R\text{ からの流出量} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz \approx (\operatorname{div} \mathbf{F}) \operatorname{vol} R$$

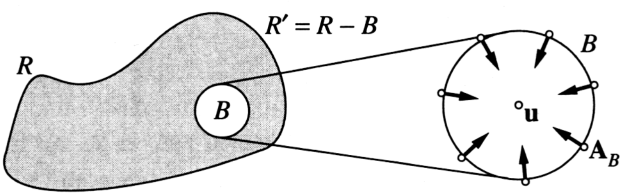
となる．ここで，領域 R を 1 点 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ にまで縮小してみると（これを $R \downarrow \mathbf{u}$ と表す），

$$\lim_{R\downarrow\mathbf{u}} \frac{R\text{ からの流出量}}{\operatorname{vol} R} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

この意味で，関数 $\nabla \cdot \mathbf{F}(u, v, w) = \operatorname{div} \mathbf{F}(u, v, w)$ は，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の点 (u, v, w) における**発散**と呼ばれている．

R 内部の $\nabla^2\Phi$

ここで，領域 R 内部の，質量密度 ρ が正であるような点 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ で $\nabla^2\Phi = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ を求めるという問題に戻ろう．つまり，求めたい量は点 $\mathbf{u}$ における $\mathbf{A}$ の発散 $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{u})$ である．



領域 R の中に，点 $\mathbf{u}$ を中心とする半径 b の球 B を考え，領域 R を領域 B と領域 $R' = R - B$ とに分割しよう．また，$\mathbf{A}_{R'}$ を R' 中の質量の作る重力場，$\mathbf{A}_B$ を B 中の質量の作る重力場とする．重力源は，R' と B の中の質量を合わせたものなので，

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{R'} + \mathbf{A}_B$$

である．点 $\mathbf{u}$ は領域 R' には含まれないので，すでに確かめたように $\operatorname{div} \mathbf{A}_{R'}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ となる．したがって，

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{A}_B(\mathbf{u})$$

であり，あとは $\mathbf{A}_B$ の寄与だけを考えればよい．

ここで，半径 b を十分に小さくとって，B の中での ρ の値が，$\mathbf{u}$ での値にほとんど等しいようにしよう．すると，B 内部の質量の合計は近似的に $M_B = \rho(\mathbf{u}) \operatorname{vol} B$ となる．球 B が小さいという仮定から，この重力源を，球

の中心 $\mathbf{u}$ に置かれた同じ質量の点重力源と置き換えて考えてもよい．この近似のもとで，重力場は，点重力源の場合の式を用いて，

$$\mathbf{A}_B(\mathbf{x}) = -\frac{GM_B}{r^2}\,\mathbf{n} = -\frac{G\rho(\mathbf{u})\,\mathrm{vol}\,B}{r^2}\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{u}}{r},\ r = \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|$$

と求められる．

B からの $\mathbf{A}_B$ の流出量

ベクトル場 $\mathbf{A}_B$ を密度 ρ の流体の流れと解釈すると，$\mathbf{A}_B$ の B からの流出量を 2 つの方法で表すことができる．まず，第 1 の方法をとる．球 B の表面上で $\mathbf{A}_B$ は

$$\mathbf{A}_B(\mathbf{x}) = -\frac{G\rho(\mathbf{u})\,\mathrm{vol}\,B}{b^2}\,\mathbf{n}$$

という形になる．このベクトルは，球面上で大きさは一定で，向きはつねに B の表面に垂直外向きである．したがって，流出量は，ベクトルの大きさと表面積との積になる．半径 b の球面の表面積は $4\pi b^2$ なので，

$$\text{流出量} = -\frac{G\rho(\mathbf{u})\,\mathrm{vol}\,B}{b^2}\cdot 4\pi b^2 = -4\pi G\rho(\mathbf{u})\,\mathrm{vol}\,B$$

が得られる．次に，第 2 の方法として，流出量は発散を用いて

$$\text{流出量} = \mathrm{div}\,\mathbf{A}_B(\mathbf{u})\,\mathrm{vol}\,B$$

と計算できる．この 2 つの表示を等しいとおいて，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathrm{div}\,\mathbf{A}_B(\mathbf{u}) = -4\pi G\rho(\mathbf{u})$$

が得られる．球 B の半径 b が正の定数である場合には，これは近似的な式な式にすぎない．しかし，極限 $b \to 0$ で，この式は厳密になる．

重力場の方程式

式 $\nabla^2\Phi = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ を思い出すと，最終的な結果は $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ となる．真空中での対応する式は $\nabla^2\Phi = 0$ だったが，真空中では $\rho = 0$ なので，ただ 1 つの式 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ が**任意の点**で成立する．方程式

$$\mathbf{A} = -\nabla\cdot\Phi,$$
$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

は **重力場の方程式**(gravitational field equations) と呼ばれる．この式こそニュートンの重力理論の中心に君臨する式で，$\mathbf{A}$ が重力源 ρ からどのように生じるかを厳密に規定している．

練習問題

1. 地球の表面における重力場の大きさには，次の 2 つの表し方がある．

$$\mathbf{A} = \frac{GM}{r^2}(0,0,-1), \qquad \mathbf{A} = g(0,0,-1).$$

ここで，M は地球の質量，r は地球の半径，G は重力定数，g は地表面での重力加速度である．この 2 つ式が一致するはずなので，$M = gr^2/G$ となる．本文中に挙げた定数 G，g の値と，地球の周長 4×10^7 メートルを用いて，地球の質量をキログラム単位で求めよ．

2. 関数 $\Phi(x,y,z)=1/r$ を考える．ただし，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$．式

$$\nabla^2\Phi(x,y,z)=0$$

が，$(x,y,z)\neq(x_0,y_0,z_0)$ を満たす任意の点 (x,y,z) において成立することを示せ．

3. (a) 等しい質量 M の 2 つの質点が $(\pm 1,0,0)$ にあるとき，重力ポテンシャル $\Phi(x,y,0)$ の等高線を描け．ただし，$GM=1$ となる単位をとることにする．

   (b) 単位質量の質点を y 軸上を無限遠から原点まで運んでくるときに，重力場 $-\nabla\Phi$ のする仕事を求めよ．

4. この節の例 1 の重力場中を，単位質量の質点を無限遠から $(-1,0,0)$ に運んでくる際に重力場のする仕事を求めよ．

5. $f(x,y,z)$ を滑らかな関数，(α,β,γ) を（ユークリッド幾何の意味での）単位ベクトルとし，$\varepsilon\approx 0$ とする．近似的関係

$$f(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta,\varepsilon\gamma)-f(0,0,0)\approx\varepsilon\nabla f(0,0,0)\cdot(\alpha,\beta,\gamma)$$

が成り立つことを説明せよ．

6. 座標 (U,V,W) と (r,φ,θ) との関係が式

$$U=r\sin\varphi\cos\theta,\qquad V=r\sin\varphi\sin\theta,\qquad W=r\cos\varphi$$

で与えられているとする．

   (a) 関係 $dU=\sin\varphi\cos\theta\,dr+r\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\,d\theta$ を示せ．微分 dV, dW についても，同様に，微分 dr, $d\varphi$, $d\theta$ の線型結合として表した式を求めよ．

   (b) 以下の計算では，微分形式の代数，特に，**外積**(exterior product) を使う．任意の個数の微分の外積は，次の規則から定義される．任意の微分 dp, dq dr と任意の関数 f に対して，$dp\,dp=0$, $dq\,dp=-dp\,dq$, $(f\,dp+dq)dr=f\,dp\,dr+dq\,dr$．詳細は，進んだ内容を扱っている微積分の教科書，または微分形式の教科書を参照．上の規則から，$dr\,dq\,dp=-dp\,dq\,dr=-dq\,dr\,dp=-dr\,dp\,dq$ を示せ．（外積 $dp\,dq$ はしばしば $dp\wedge dq$ と書かれる．）

   (c) 関係 $dU\,dV=r\sin^2\varphi\,dr\,d\theta+r^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta$ を示せ．また，$dV\,dW$, $dW\,dU$ についても対応する関係を求めよ．

   (d) 関係 $dU\,dV\,dW=r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$ を示せ．

   (e) (r,θ) を，(x,y) 平面の極座標表示 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とする．このとき，dx, dy を，dr, $d\theta$ の線型結合として求め，$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ を示せ．

7. 次の 2 次元のベクトル場 $\mathbf{A}(x,y)$ のそれぞれについて，流れの様子を描き，また発散 $\operatorname{div}\mathbf{A}$ を計算せよ．

   (a) $\mathbf{A}(x,y)=(x/5,y/5)$.

   (b) $\mathbf{A}(x,y)=((x-1)/5,(y-2)/5)$.

   (c) $\mathbf{A}(x,y)=(y/5,0)$.

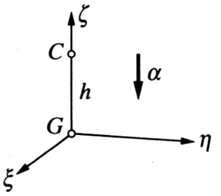
(d) $\mathbf{A}(x,y) = (y/5, x/5)$.

4.4　特殊相対論における重力

重力赤方偏移

重力はドップラー効果を引き起こす

等価原理によれば，等加速度直線運動する座標系で発見された性質は，すべて，重力場中に静止している座標系にも，時空の十分に小さい領域に限れば，備わっていると考えなければならない．そのような性質の 1 つとして，ドップラー効果がある．



観測者 G が，ζ 軸の負の向きの，強さ α の一様重力場中に静止しているとしよう．振動数 ν の光の信号が G によって発射されたとする．そして，ζ 軸上の点 $\zeta = h$ に静止している，もう一人の観測者 C を考える．このとき，C が G から受け取る光の信号の振動数はどのような値をとるだろうか？

もし，G が，ζ 軸の負の向きの重力場中にいるのでなく，ζ 軸の正の向きに大きさ α で等加速度直線運動しているとしたら，ドップラー効果が発生する．その場合に C が受け取る信号の振動数が

$$N = e^{-\alpha h}\,\nu$$

であることを，4.2 節で，特殊相対論を用いて示した．観測者 G と C の両方が重力場中に静止している場合にも，等価原理によって，これと同じ式が成立しなければならない．つまり，重力もドップラー効果を引き起こさなければならない．しかし，等価原理は，時空の限られた領域にだけ適用できるから，h が小さいときにしかこの議論は正しくない．したがって，このときには，N を与える式は，テイラーの定理による線型近似

$$N = \nu(1 - \alpha h)$$

で置き換えて考えてもよい．

時間の伸びと縮み

アインシュタインは 1911 年にこのような見解に到達した．[12, p. 105][注 5]そのとき，彼は次のように述べた．（記号はいまの議論で使っているものに置き換えてある．）

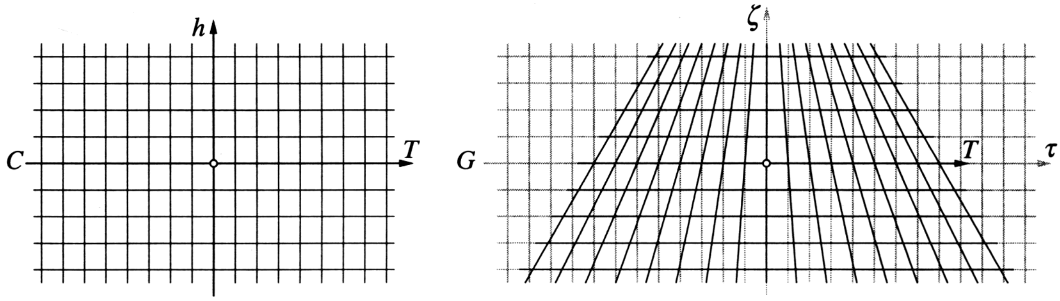
> ちょっと考えただけだと，この式はおかしいような気がする．観測者 G から C に，一定のペースで光が送られているのに，どうして，1 秒間に C に到着する波の数（1 秒間に繰り返される周期の個数）が，G で発射された波の数と一致しないということが起こりうるのだろうか？ しかし，これに対する答えは簡単だ．座標系 G の時間をまだ定義していないのだから，量 ν や N を，単純に振動数（1 秒間に繰り返される周期の個数）と見なすことはできない．量 ν が表すのは，G の時計の時間 τ に関して単位時間内の周期の個数であるのに対し，量 N が表すのは，C の時計の時間 T に関して単位時間内の周期の個数である．2 つの時計が ... 同じ速さで進むべきだという理由は何もない．

実際，この章では，等加速度直線運動する座標系の各点 $\zeta = h$ に置かれた

[注 5] 訳注：和訳については訳者のノート参照．

時計の進み方は異なることを見てきた．等価原理から，重力場中でも同じことが起きるはずである．特に，時間的な間隔が C にとって ΔT 秒であるとき，G にとってはそれは $\Delta\tau = F(h)\Delta T$ 秒であるはずである．ここで現れた因子は $F(h) = 1 - \alpha h$ である．この式は，4.2 節の時間スケールの補正因子 $F(h)$ の式を h に関して線型近似したものにほかならない．下の図は，各位置 $\zeta = h$ に置かれた C の時計が，G の時計と比べてどのように進むかを示している．今の場合，ζ 座標の値 h が小さくなるにつれて重力ポテンシャルは増大するので，**重力場中の時計は遅れる**ことになる．

重力場中の時計は遅れる



このドップラー効果の式を振動数の差と，発信時の振動数そのものの比という形が現れるように書き表すと，

相対赤方偏移

$$\frac{N - \nu}{\nu} = -\alpha h$$

となる．この**相対的な**偏移の大きさは，光の（発信時の）振動数には依存せず，位置 h に関して線型に減少する．つまり，どんな光も，重力場の中をポテンシャルの高い側に移動するときには，その振動数が赤い側に偏移し，その相対的な偏移の大きさは，移動した距離と重力場の強さの積に比例する．

これを光でない普通の物体の場合と比べてみよう．質量 m が重力ポテンシャルの低いところから高いところに移動したときには，運動エネルギーを，ポテンシャルエネルギーの差 $\Delta U = m\Delta\Phi$ だけ失う．ここで，Φ は重力ポテンシャルである．いま考えている重力場のポテンシャル関数は $\Phi(h) = \alpha h +$ 定数なので，光子の赤方偏移も，ポテンシャルの差として次のように表せる．

$$N = \nu(1 - \Delta\Phi), \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{N - \nu}{\nu} = -\Delta\Phi.$$

ところで，光子のエネルギーは振動数とプランク定数の積 $E = h\nu$ なので，赤方偏移の式は $hN = h\nu - h\nu\Delta\Phi$ というエネルギーの変化の形にも表せる．（この段落の以下の部分では，h は，座標系 C での位置ではなく，プランク定数を表す.）重力場を登り始める前と後の光子のエネルギーをそれぞれ $E_{\text{bottom}} = h\nu, E_{\text{top}} = hN$ とすると，この式はさらに，

赤方偏移はエネルギー損失

$$\Delta U = E_{\text{top}} - E_{\text{bottom}} = -E_{\text{bottom}}\Delta\Phi$$

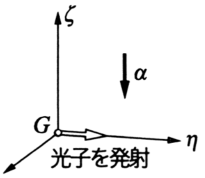
と書き直せる．したがって，光子（静止質量はゼロである）と通常の物質は，重力場の中を登ると，まったく同じだけ運動エネルギーを失う．

なお，幾何単位系のかわりに通常の単位系を用いると，赤方偏移とエネルギー損失の式はそれぞれ，

$$N = \nu\left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right), \quad \Delta U = E_{\mathrm{top}} - E_{\mathrm{bottom}} = -\underbrace{\frac{E_{\mathrm{bottom}}}{c^2}}_{\text{質量}}\underbrace{\Delta\Phi}_{\text{速度}^2}$$

となる．ポテンシャル関数を使うと，一様とは限らない，**任意の**重力場中での赤方偏移を求められる．アインシュタインは，太陽から地球に届く光の赤方偏移を，1911 年にこの方法で求めた．しかし，地球の表面と太陽の表面での重力ポテンシャルの差は幾何単位系で $\Delta\Phi = 2 \times 10^{-6}$ しかなく，赤方偏移の効果はわずかである．

光線の屈曲



等価原理から，重力場が光線を曲げるということが導ける．このことを具体的に確かめるために，重力場中に静止している観測者 G を考えることにする．重力場は，向きが ζ 軸の負の向きで，強さが α であるとする．このとき，光子が重力場の向きと垂直に，η 軸の正の向きに発射されたとしよう．このときの，光子の空間中での軌跡と，時空での世界線を求めたい．

光子でなく，質量のある物体が原点から速度 v で η 軸の正の向きに発射された場合には，その粒子は (η, ζ) 平面内で放物線の軌道を描いて重力場中を落下することがわかっている．光子の軌跡を求めるときにも，この粒子の軌跡の場合と並行して計算すると，よくわかる．

等価原理を用いて，観測者 G は重力場中にいるのではなく，慣性座標系 R に対して上向きの大きさ α の加速度で運動していると仮定する．さらに，2 つの座標系で，空間方向の対応する座標軸は同じ向きであると考えてよい．定理 4.1 から，2 つの座標系は，次の写像 $M : G \to R$ によって関係づけられている．

$$M : \begin{cases} t = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\sinh\alpha\tau, \\ x = \xi, \\ y = \eta, \\ z = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha}\cosh\alpha\tau. \end{cases}$$

すべての事象は，$x = 0$ あるいは $\xi = 0$ で指定される時空の $(1+2)$ 次元断面に含まれるので，今後は，運動に垂直な方向を向いている x 軸と ξ 軸は無視することにする．また，等価原理の大前提から，写像 M を使ってよいのは，G における原点の**小さな**近傍に限られるということを思い出そう．

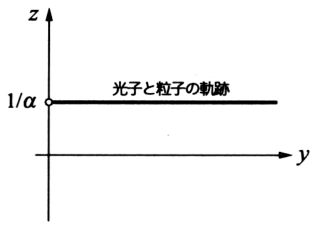
慣性座標系 R における世界線

慣性座標系 R では，光子も物体も，(y, z) 平面でまっすぐな軌跡を描く．具体的には，軌跡は直線 $z = 1/\alpha$ の $y > 0$ の部分である．対応する世界線は，(t, y, z) 時空の中の平面 $z = 1/\alpha$ に含まれる．世界線は直線で，(t, y) 平面に描かれたグラフとして見たとき，傾きはそれぞれ $c = 1$ と v である．また，3 次元の曲線としては，助変数 q を用いて

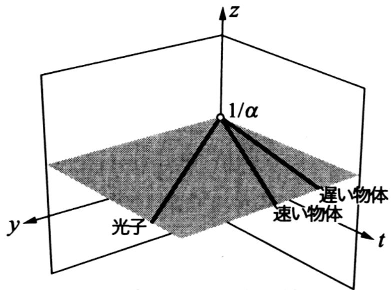
$$(t, y, z) = (q, vq, 1/\alpha)$$

と表示できる．光子については，$v = c = 1$ とすればよい．下の図には，異な

る速度で運動する 2 個の物体と光子について，軌跡と世界線が描かれている．



空間における軌跡



時空における世界線

座標系 G における対応する世界線は，R における世界線を，

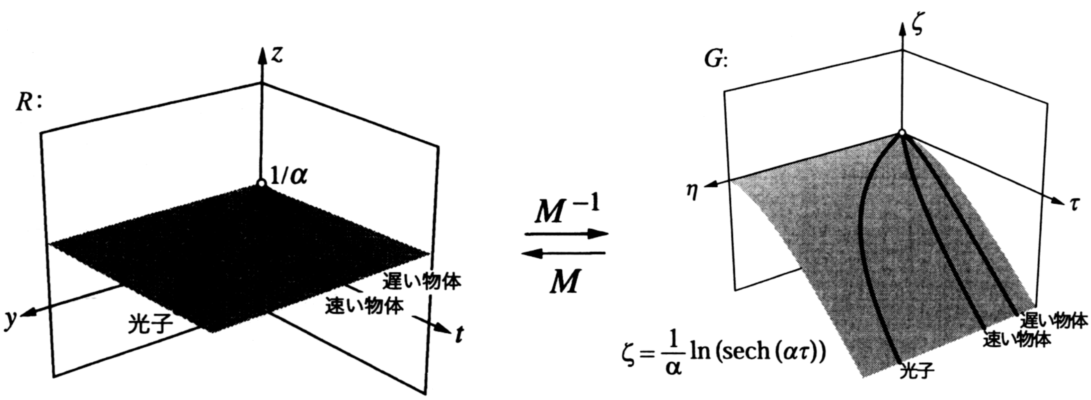
加速度座標系 G における世界線

$$M^{-1}: \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\dfrac{t}{z}\right), \\ \eta = y, \\ \zeta = \dfrac{1}{2\alpha}\ln\left(\alpha^2(z^2 - t^2)\right) \end{cases}$$

で与えられる逆写像 $M^{-1} : R \to G$ で写した像である．逆写像 M^{-1} は，M と同様に，限られた領域，今の場合は，点 $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 1/\alpha)$ のまわりの小さな近傍でだけ定義されているのだった．結局，G における世界線は，助変数表示で

$$(\tau, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}(\alpha q), vq, \frac{1}{2\alpha}\ln\left(1 - \alpha^2 q^2\right)\right)$$

となる．下の図には，写像 M^{-1} と，それによる世界線の像が描かれている．



座標系 G における世界線は，平面 $z = 1/\alpha$ の像である曲面に含まれていることに注目しよう．実は，この曲面は，ある関数 $\zeta = \psi(\tau, \eta)$ のグラフになっていることが示せる．このグラフは η 軸を底線とする柱面，つまり，η 軸を平行移動した直線の族の和集合である．すなわち，ψ は η に依存しないので，関数 ψ を求めるには，あとは，関係 $z = 1/\alpha$ から ζ と τ の関係を求めるだけでよい．そこで，条件 $z = 1/\alpha$ を写像 M^{-1} の式に代入すると，

$z = 1/\alpha$ の像

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}(\alpha t), \qquad \zeta = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(1-\alpha^2 t^2\right)$$

を得る．第 1 番目の式を αt について解いて，ζ の式に代入すると，

$$\alpha t = \tanh(\alpha\tau), \qquad \zeta = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(1-\tanh^2(\alpha\tau)\right)$$

となるが，恒等式 $1-\tanh^2\alpha\tau = \mathrm{sech}^2\,\alpha\tau$ を用いると，最終的に

$$\zeta = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\mathrm{sech}^2(\alpha\tau)\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\mathrm{sech}(\alpha\tau)\right) = \psi(\tau,\eta)$$

と求められる．

加速度座標系における軌跡

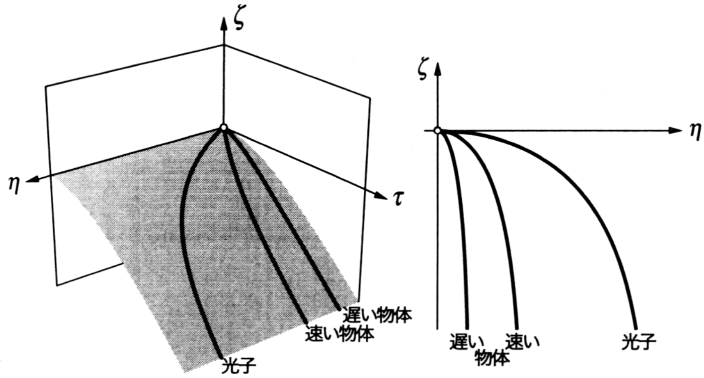
光子と物体の軌跡は，(τ,η,ζ) 時空における世界線の，(η,ζ) 平面への射影である．つまり，

$$(\eta,\zeta) = \left(vq, \frac{1}{2\alpha}\ln\left(1-\alpha^2 q^2\right)\right)$$

である．ここで，$q=\eta/v$ と解けるので，軌跡は関数

$$\zeta = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{v^2}\eta^2\right)$$

のグラフであると言うことができる．



空間における軌跡

ニュートンの落体の法則

等価原理によって，このように求めた物体や格子の世界線は，慣性座標系に対して等加速度直線運動している観測者 G にとってのものであると同時に，重力場中の観測者 G にとってのものであると見なせる．ただし，G の座標系の覆う範囲が小さいという条件のもとである．（等価原理は**局所的**なものだった.）ここで，q,η が小さいということは，テイラーの定理を用いて，世界線の式を近似してもよいということである．その結果は，

$$(\eta,\zeta) = \left(vq, -\frac{\alpha}{2}q^2\right), \qquad \zeta = -\frac{\alpha}{2}\frac{\eta^2}{v^2}$$

である．これらは，水平方向に一定の速度 v で運動しつつ，鉛直方向には強さ α の重力場のもとで落下する物体の，ニュートン力学での式にほかならない．しかし，速度 $v=c=1$ で運動する光子も，質量のある物体と同じ公式にしたがうということが，ここで新たにわかった．すなわち，光は，重力場中で曲がった経路をたどる．

相性の根本的な悪さ

重力は慣性座標系で取り扱えるか？

上の議論では，重力を記述しようとしたところ，等価原理によって，加速する非慣性座標系を自然に導入することになった．しかし，これだけでは，特殊相対論の，より単純な慣性座標系で重力を記述することが不可能であることが示されたことにはならない．以下では，重力を特殊相対論の慣性座標系の枠内で記述する試みは決してうまく行かないことを示す．この 2 つは根本的に互いに相容れないのである．

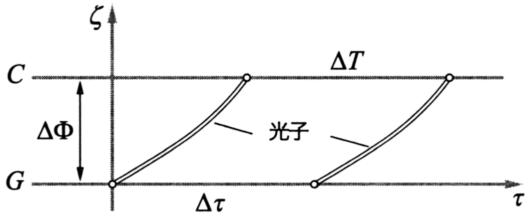
慣性座標系 $G:(\tau,\zeta)$ の記述する領域に重力場があるとする．これは，G でニュートンの運動の法則が成立し，また，他の力を原因としないような加速度運動は**重力**によって説明される，という意味である．重力場は位置によって変化してもよいが，位置を固定したときには時間的に変化しないとする．このとき，重力ポテンシャル関数は Φ は，当然 ζ 軸上の各点で異なる値をとりうる．

赤方偏移と固有時間

もう一人の観測者 C が点 $\zeta \neq 0$ に静止しているとする．このとき，関数 Φ は C と G で異なる値をとってよい $(\Delta\Phi \neq 0)$．ここで，G が周期 $\Delta\tau$ の光の信号を発信する．観測者 C がこの信号を受け取ったとき，その周期は，p. 151 の考察から，重力赤方偏移によって，

$$\Delta T = \frac{\Delta\tau}{1-\Delta\Phi} \neq \Delta\tau$$

に変化している．



ここで，G と C の世界線の一部と，異なる時刻に G から C へと運動する光子の世界線からなる，平行 4 辺形のような図形を考えることにする．重力場によって，光子の世界線は曲がる．その具体的な形はわからないが，重力場は時間に依存しないので，2 つの光子の世界線の形はまったく同じはずである．このことから，平行 4 辺形の上の辺の長さは下の辺と同じ，すなわち $\Delta T = \Delta\tau$ となるはずである．

重力は空間を歪める

この考察で，不一致点が明確になった．ミンコフスキ幾何の性質から $\Delta T = \Delta\tau$ となるが，重力がある限り，$\Delta T \neq \Delta\tau$ でなければならない．したがって，慣性座標系で重力を考えることはできない．どうしても距離が歪められてしまう．重力のある時空ではミンコフスキ幾何の法則は成り立たない．

曲率の意味

曲がりと伸び

平面の一部分をとって形を曲面に変化させたときには，普通，2 つのことが起きている．平面は，3 次元方向に**たわみ**(bend)，また，新しい形をとる

ために**伸びる**(steretch)．この2つは同じことではない．紙を丸めて円柱にするとき，紙はたわんではいるが伸びてはいない．一方，平らなゴム板の一辺を持って引っ張ると，板は曲がらずに伸びる．曲率(曲がり)(curvature)という言葉は，日常語では，伸びでなくたわみに対して使われるが，数学や物理での使い方はそれとは少し違う．上の意味でのたわみが起こるためには，曲面はより大きな空間の中に置かれなければならない．時空の曲率というときに，このような意味での曲がりを考えると，時空を含むより大きな空間が必要になってしまう．しかし，そのようなものは実在しない．実際，これまでの私達の考察でも，そのようなものは現れていない．

曲率は地図の歪みを意味する

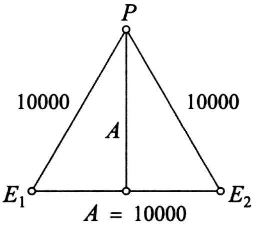
数学や物理学では，曲率という言葉は，たわみでなく伸びを意味する．この点からは，面が曲がっているというのは，縮尺一定の地図では描けないということだと言える．言い換えると，曲面あるいはその一部分を平らな地図に描こうとすると，地図上ではユークリッド幾何の法則が成り立つが，曲面上では成り立たないため，どうしても地図上の距離が歪められてしまうということである．

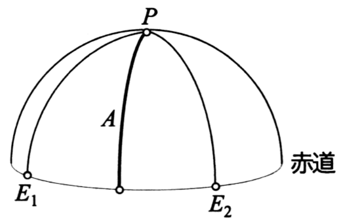
例

例を1つ挙げよう．下の図の左側の3角形は，北極 P と，赤道上で90° 離れた2点 E_1, E_2 を3頂点とする北半球の1/4の区域の地図である．地図では，この3点が正3角形の3頂点になっている．実際，3辺はみな長さ10,000 kmである．(もともと，1mは極点と赤道との間の距離の1/10,000,000として定義された!) それでは，3角形の高さ A はどれだけだろうか？ ユークリッド幾何では，

$$A = 10000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8660 \text{ km}$$

となるはずである．





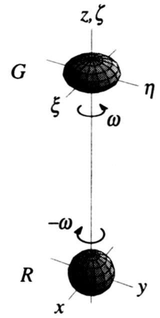
しかし，本物の地球上で考えると，高さを表す垂線は，極点から赤道までのびており，3角形の2辺とまったく同じものである．したがって，その長さは8,660 kmでな10,000 kmである．地図は，地球上の地形と距離を再現したものなので，距離 A には8,660 kmでなく10,000 kmという値を与えなければならない．これが，地図上では距離が歪められているということである．(さらに角の大きさも歪められている．地図上で60° に見える各頂角は，地球上では実は90° である.)

平坦な地図からも曲率はみつけられる

ここで最も重要な点は，面が曲がっていると結論するために，面が3次元空間に埋め込まれている様子を示す右の図を参照する必要はないということである．左の図の，平坦な2次元の地図を見れば十分である．図に含まれる長さの情報(例えば A は10000であって8600でないなど)だけで，面が曲がっていてユークリッド幾何の法則を満たさないことを示しているからである．

続く2つの章では，曲面の微分幾何を学び，平坦な地図から曲率の情報を直接取り出す道具を整備する．この準備が終わったときには，そこで用いた仮定，曲面が2次元的であることや距離がユークリッド的であることには何の特殊性もないということが明らかになるだろう．同じ考え方が，任意の次元やミンコフスキ的距離に自然に拡張できる．この視点から見ると，上で構成した非慣性座標系は，4次元時空の記述に適当な地図と見なせ，これらの地図上での距離の歪みと時空の曲率を結びつけることが可能になる．

重力の新しい理論



アインシュタインは，1916年に公表された一般相対論に関する最初の論文で，重力を定式化するのためには全く一般の座標系を用いるしかないことを主張する2つの議論を行っている．アインシュタインによれば，1番目の議論はもともとエルンストマッハ(Ernst Mach)によるものである．それは次のような思考実験から始まる．大きな質量を持つ2つの流体 R, G が，互いにも，他の質量からも十分に離れていて，それぞれ自分自身の重力の影響だけを受けるものとする．自分自身の作る重力場により，流体は球状になる．さらに，R が静止している(回転も移動もしていない)ような座標系をとったときに，G は，R と G の中心を結ぶ直線を回転軸として，一定の角速度 ω で回転しているとする．このとき，逆に G が静止していているような座標系をとると，R は同じ軸のまわりを一定の角速度 $-\omega$ で回転しているように見える．

ここまでのところ，R と G の立場は対称である．しかし，何らかの理由で2つの流体が異なる形になっていると仮定しよう．一方の流体 R が球体なのに対して，G は赤道部分が膨らんでいるとする．この非対称性の物理的な原因は何だろうか？ アインシュタインは，まず，以下のようなニュートン力学の説明を持ち出す．特定の座標系—慣性座標系—だけが“特権的な地位にあり”(“privileged”)，物理法則はこの座標系でのみ成立し，物理学にはこの座標系だけを使うべきである．流体 R の座標系では，G は回転していて，結果として赤道部が膨らむ．これは物理法則にあっている．流体 G の座標系では，R は回転しているが膨らまない．これは矛盾である．したがって，G の座標系は“違法なもの”(“out of bounds”)である．つまり，流体 R が静止している座標系は特権的な地位にあるが，G の座標系はそうではない．

特権的座標系は正当化できない

しかし，物理法則は特定の座標系でだけ成立する，と宣言するだけというのは説明になっていない，特に，何が非対称性を**引き起こす**のかという問いの答えになっていない．実際，2つの物体だけからなる系の枠内で説明を与えることはできない．仮定した状況が対称であることから，それは明らかである．説明を与えるためには，系の外部の影響を考える必要がある．流体 G だけが膨らんでいるなら，それは G だけが“本当に”回転している—つまり，宇宙の中で遠く離れた他の物体に対して回転しているからである．非対称性があるということは，系の外に物体が存在して影響を与えていることを示している．物理法則が限られた特権的座標系でだけ成立するという主張に対する実証可能な正当化は見当たらない．

一般相対性原理

逆に，アインシュタインは次のように主張した [10, p. 113, 強調は彼自身によるもの].[注6]“**物理法則は，任意の運動をしている座標系で成立するようなものでなければならない.**” これは，“物理法則は，等速直線運動する座標系で成立するようなものでなければならない” というガリレイの相対性原理の完全なまでの一般化にほかならない．このことから，アインシュタインの一般の座標系についての議論の結論は**一般相対性原理**(the principle of general relativity)と呼ばれる．

一般の座標系と重力

アインシュタインの2番目の議論は，等価原理に基づくものである．それによれば，局所的な重力場は，慣性座標系に対して等加速度直線運動をする座標系を用いて調べることができる．しかし，アインシュタインは，一般の座標系を用いて，重力を単に**調べる**だけでなく，重力に根本的に新しい理論的基礎づけを行った．彼自身の言葉を借りると [10, p. 114],[注7]“これらの考察からわかるように，相対性の一般的な理論を追究することによって，重力の理論に到達することになる．なぜなら，重力場は単に座標系を変更することによって‘作り出される’からである”．

重力と幾何学

以下の章は，アインシュタインの重力理論についてのものである．それは，ニュートンの理論とは，様々な点で大きく異なる．ニュートンとアインシュタインのどちらの場合にも，物体を観測されるように運動させるのは重力場である．ニュートンの場合，場は**力**を記述し，観測される運動は，重力質量に引き起こされる力の結果である．しかし，アインシュタインはまったく異なる見方をとった．アインシュタインの場合，重力場は，力を直接に記述するのはなく，単に時空の曲率を記述する．重力質量が引き起こすのはこの曲率である．重力質量によって時空の幾何は変化する．他の重力質量の影響を受けて物体が描く世界線は，これらの質量によって曲げられた時空の中では，考えられる最もまっすぐな経路なのである．この見方では，重力はもはや力ではない．幾何の一側面である．アインシュタインにとっては，非慣性座標系は，次に示した重力と幾何をつなぐ連鎖の中の，本質的な一要素である．

重力 ⟹ 加速度
運動 ⟹ 非慣性
座標系 ⟹ 曲がった
時空

練習問題

1. (a) 太陽の表面における，重力による加速度が，

$$\alpha = \frac{GM}{X^2}$$

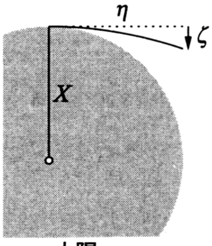
で与えられることを示せ．ただし，G は重力定数，$M = 2 \times 10^{30}$ kg は太陽の質量，$X = 7 \times 10^8$ m は太陽の半径である．加速度 α を3元組立単位系(α の次元は $\mathrm{m/s^2}$)および幾何単位系(α の次元

[注6] 訳注：和訳については訳者のノート参照.

[注7] 訳注：和訳については訳者のノート参照.

は s^{-1}) で求めよ．

(b) 太陽の表面をかすめて通過する光子を考える．重力の影響を考えないならば，その経路は，表面との接点で半径に直交している．本文中で導いた，光子が重力場に垂直な方向に η だけ進んだときに落下する距離を与える公式 $\zeta = -\alpha\eta^2/2$ を用いて，光子が太陽をかすめた後，太陽半径 $\eta = X$ だけ進む間に落下する距離を計算せよ．結果は 3 元組立単位系およびおよび幾何単位系で求めよ．注: 本文で導いたこの公式は，重力場の大きさ，向きが一定であることを仮定している．今のように，垂直な移動距離 η を太陽半径 X 程度の大きさに取った場合には，もちろんこの仮定はなりたっていない．しかし，それでもこの公式は，$|\eta| \leq X$ のときにはある程度の正確な近似になっていることが期待できる．



太陽

(c) 光子が，距離 η だけ進む間に受ける，進行**方向**の変化を θ とする．このとき，

$$\theta \approx \tan\theta = -\alpha\eta \quad \text{ラジアン}$$

を示せ．距離 $\eta = X$ に対して，角 θ の値を求めよ．

(d) アインシュタインは，1911 年に，遠方の恒星からの光が，太陽の表面をかすめる際に，約 4×10^{-6} ラジアンの屈折を受けると計算した．その計算では，重力場として，向きが太陽の中心向き，大きさが太陽の中心との距離の逆 2 乗に比例するようなニュートン的な重力場が仮定されていた．上の読者の計算結果を，アインシュタインの計算結果と比較せよ．比較の際には，読者の計算結果は 2 倍しておく必要がある (なぜか?)

2. (a) ドップラー効果が，通常の単位系で $N = \nu\left(1 - \Delta\Phi/c^2\right)$ という形になるのはなぜか？

(b) 地球の表面と太陽の表面との重力ポテンシャルの差 $\Delta\Phi$ を求めよ．

(c) 太陽の光を地球の表面で見たときの，相対的な赤方偏移を求めよ．

第 4 章の内容をより深く知るには

ニュートンの重力理論は，**ファインマン物理学** [13][注8] や Berry の教科書 [2] で詳しく論じられている．特に，後者では一般相対論と関係づけて扱われている．Boas [4, 13.8 節] には，重力場の方程式について，明快な，そして敷居の低い取り扱いがある．で，非慣性座標系をとったときに直面する複雑な状況は，Berry と，そして Einstein 自身 [12], [10] によって取り扱われている．重力と特殊相対論が整合しない，というこの章での議論は，Misner, Thorne, Wheeler の教科書 [24] に基づいている．彼らの教科書では，1 章をこの点にあてている．

[注8] 訳注：和訳第 1 巻 ‘力学’

第5章 曲面と曲率

この章では，3 次元空間の中の 2 次元曲面の微分幾何学を扱う．そして，角の大きさ，曲線の長さ，領域の面積，そして最終的には，曲面上の各点での曲率を測る方法を確立する．次の第 6 章では，これらの概念を，すべて**内在的な**(intrinsic)見方から定式化する．すなわち，曲面を，非ユークリッド的計量を持つ平面の一部として定義し，その曲率を，空間への何らかの埋め込みに頼ることなく，計量から直接決定する．

5.1 計量

曲面の微分幾何学を展開するにあたっての方針は，これまでに曲線に対して行った取り扱いを適切に拡張するということである．例えば，曲線 C の長さの定義

$$C\,\text{の長さ} = \int_a^b \|\mathbf{x}'(q)\|\,dq \qquad \text{ただし，}\ C : \mathbf{x}(q),\ a \le q \le b$$

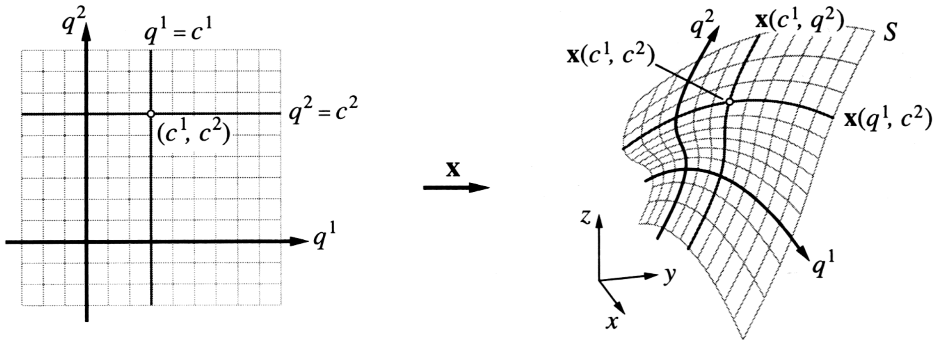
を思い出そう．この式に従って長さを計算するには，第一に，曲線 C の助変数表示 $\mathbf{x}(q)$ が必要である．第二に，曲面上の点での接ベクトルの定義と，その長さを測る方法が必要である．そして最後に，積分を計算することが必要になる．したがって，曲面の場合にも，最初の段階は，曲面の助変数表示を定義することである．そうすれば，その定義に基づいて，接平面のベクトルを考え，接平面内での幾何学を展開することができるだろう．接平面は通常の平面なので，そこでは内積が問題になる．最後に，積分のような道具を導入して，接平面の幾何学的情報を曲面そのものと関係づける． **微分幾何学の第一歩**

曲面を助変数表示する

まず，写像 $\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 : (q^1, q^2) \to (x, y, z)$ を考えよう．この写像は，3 つの滑らかな 2 変数関数から次のように定義される．

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = \big(x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)\big)\,.$$

ここで，q^1, q^2 はやがて曲面の助変数の役目を果たす．



曲面 S は写像 $\mathbf{x}$ の像であり，絵に描く場合には，(q^1, q^2) 平面（上付き添え字を用いる理由は後で明らかになる）の縦方向，横方向の直線の写像による像（それらは曲線である）からなる，3 次元空間内の網目として描く．これら像の曲線に注目してみよう．写像 $\mathbf{x}$ の定義域を横方向の直線 $q^2 = c^2$ に制限したものは，助変数 q^1 で助変数表示された曲線

$$q^1 \mapsto \mathbf{x}(q^1, c^2)$$

である．数 c^2 を変化させると，像の曲線は，空間の中で互いに平行のような別の曲線に次々と変わっていく．同様に，写像 $\mathbf{x}$ の定義域を縦方向の直線 $q^1 = c^1$ に制限した

$$q^2 \mapsto \mathbf{x}(c^1, q^2)$$

q^1 と q^2 が S 上の座標を定義する

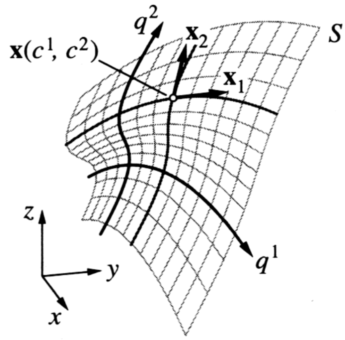
は，q^2 により助変数表示された曲線の族を与える．第 2 の族の曲線は第 1 の族の曲線と交わるが，一般には，交わる角は直角ではない．したがって，この 2 つの族を合せたものは，S 上の**曲線**座標（curvilinear coordinate）の格子と考えられる．ちょうど，緯線と経線が地球上で緯度経度からなる座標を定義しているのと同じである．助変数 q^1, q^2 は S の座標なので，点 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ のことを単に (q^1, q^2) と表す．

座標曲線の接ベクトル

座標曲線（coordinate curve）（$\mathbf{x}$ の 2 個の助変数のうち 1 個の値を固定して得られる曲線）の各点では接ベクトルを考えることができるが，これらのベクトルは曲面のその点での接平面上にある．まず "横方向" の座標曲線 $\mathbf{x}(q^1, c^2)$ を考えよう．これは 1 変数関数なので，接ベクトルを $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'(q^1, c^2)$ と書くことができる．ただし，$\mathbf{x}'$ は変数 q^1 に関する微分を意味する．同様に "縦方向" の座標曲線は $\mathbf{x}(c^1, q^2)$ であるから，接ベクトルは $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'(c^1, q^2)$ である．今度は，$\mathbf{x}'$ は変数 q^2 に関する微分を意味する．写像 $\mathbf{x}$ は実際には**両方**の変数 q^1, q^2 についての関数であるので，偏微分を使った方が明確だろう．すると，点 $(q^1, q^2) = (c^1, c^2)$ における座標軸の方向の接ベクトルは，

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1}(c^1, c^2) \qquad \text{および} \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2}(c^1, c^2)$$

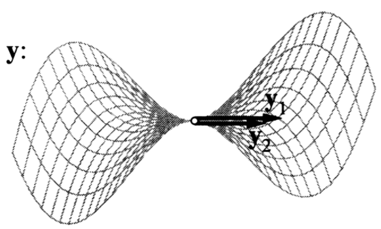
となる．



特異的な振る舞い

上の図では 2 つのベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は線型独立である．しかし，いつでもそううまくいくとはかぎらない．ベクトルのうちの 1 つが $\mathbf{0}$ につぶれてしまったり，2 つのベクトルが同じ方向を向いてしまったりするかもしれない．例えば，次の‘蝶ネクタイ’写像

$$\mathbf{y}:\begin{cases} x = q^1 + 0.9q^2, \\ y = 0, \\ z = (q^1 - 0.9q^2)(q^1 + 0.9q^2)^2 \end{cases}$$



では，(q^1, q^2) 平面が，原点では直線状に絞られてしまっている．つまり原点では，2 つの接ベクトル $\mathbf{y}_1$,$\mathbf{y}_2$ が，$\mathbf{y}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{y}_2 = (0.9, 0, 0)$ となって同じ方向を向いている(collinear)ことが確かめられる．このように，座標軸の接ベクトルが線型独立でなくなってしまっているような点を**特異点**という．

曲面は非特異でなければならない

特異点は，タイプはいろいろあるが，一般にそこで局所的に 2 次元でなくなってしまっているような点である．これを防ぐため，曲面の助変数表示がいたるところ非特異であることを要求することにする．そこで，2 つのベクトルの外積は，線型独立であるとき，そしてそのときに限ってゼロでないベクトルになることを利用しよう．曲面 $\mathbf{x}$ が非特異であることを保証するために，すべての (q^1, q^2) に対して，

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1(q^1, q^2) \times \mathbf{x}_2(q^1, q^2) \neq \mathbf{0}$$

という条件を課すことにする．

定義 5.1 $\mathcal{R}$ を $\mathbf{R}^2$ の領域とする．$\mathcal{R}$ で**助変数表示される曲面** S(surface S parametrized by $\mathcal{R}$)とは，滑らかな写像 $\mathbf{x}\ :\ \mathcal{R} \ni (q^1, q^2) \mapsto \big(x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)\big) \in \mathbf{R}^3$ であって，外積 $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ が $\mathcal{R}$ のいたるところでゼロでないベクトルであるようなもののことをいう．

S の単位法線ベクトル

2 つのベクトルの外積は，2 つの両方に垂直である．つまり，$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0$ である．一方，$\mathbf{x}_1$ および $\mathbf{x}_2$ は $\mathbf{x}$ で助変数表示される曲面 S の接空間を張るので，外積 $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ は接空間に，したがって曲面に垂直である．さらに，$\mathbf{x}$ は非特異なので，外積ベクトルを $\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|^{-1}$ 倍して各点の**単位法線ベクトル**(unit normal)を

$$\mathbf{n}(q^1, q^2) = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

と求めることができる．

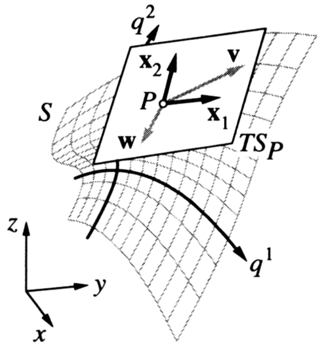
接平面上の幾何

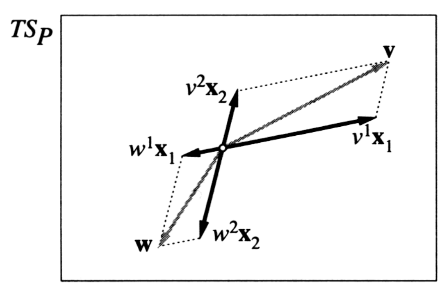
曲面 S の一点における接平面

空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトルで，点 $P = (c^1, c^2)$ で S に接しているものすべての集合を TS_P とする．集合 TS_P を P における S の**接平面**(tangent plane to S at P)という．接平面 TS_P 上の幾何的概念は，その上の内積をもとに定式化できる．接平面 TS_P の任意のベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ は，$\mathbf{R}^3$ のベクトルでもあるので，内積を $\mathbf{R}^3$ の座標を用いて表すことができる．2つのベクトルの座標が $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ であるとすると，

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

である．この考え方はまったく正しいのだが，便利ではない．座標の任意の3つ組 (v_1, v_2, v_3) のうち，実際に TS_P のベクトルを表すのはその一部だけである．そして実際に TS_P のベクトルで**ある**ような3つ組についても，この表示は，S を定義する写像 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ と無関係である．そして最後に，接平面は2次元なのだから，ベクトルは3つ組でなく2つ組で表されることが望ましい．





TS_P の基底

より便利な考え方は，線型独立なベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ を TS_P の基底として用いることである．接ベクトルを $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の線型結合として書いたときの係数として，2つの座標の値が得られる．これらの座標は

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{x}_1 + v^2\mathbf{x}_2, \qquad \mathbf{w} = w^1\mathbf{x}_1 + w^2\mathbf{x}_2$$

のように上付き添え字を用いて書くことにする．次のようにも表される．

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}.$$

ここでの座標の値は，$\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ の $\mathbf{R}^3$ のベクトルとしての成分とは別のものである．このことを忘れないように，後者と区別して上付き添え字を使っている．（しかし，上付き添え字にはもっと大事な役割がある．これについては，

まもなく見ることになる.)

ベクトル $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ の内積は，この上付き添え字で書かれる座標で次のように直接表すことができる.

内積の成分表示

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= \left(v^1\mathbf{x}_1 + v^2\mathbf{x}_2\right)\cdot\left(w^1\mathbf{x}_1 + w^2\mathbf{x}_2\right)\\ &= v^1w^1(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1) + v^1w^2(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2) + v^2w^1(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1) + v^2w^2(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2)\\ &= (v^1, v^2)\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2\\ \mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w^1\\ w^2\end{pmatrix}\\ &= \mathbf{v}^t G\,\mathbf{w}.\end{aligned}$$

最後の段階では，$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ を，ミンコフスキ内積を扱うときに便利だった行列の積の形に表した．ミンコフスキ内積の場合には，間にはさまる，内積を表す行列は

$$J_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

だったが，ここでは，

$$G = \begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2\\ \mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{x}_1\|^2 & \mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2\\ \mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1 & \|\mathbf{x}_2\|^2\end{pmatrix}$$

である．この行列 G は，ミンコフスキ幾何での $J_{1,1}$ と同様に，TS_P の幾何で重要な役割を果たす．行列 G, あるいは g_{ij} を TS_P の**計量**(metric)と呼ぼう．各接平面にはそれぞれの計量 G があるので，G は助変数 q^1,q^2 の関数であり $G = G(q^1, q^2)$ と書ける．また，G は常に**対称行列**$(G^t = G)$になる．なぜなら，$g_{21} = \mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2 = g_{12}$ だからである.

計量

計量は**計量テンソル**(metric tensor)とも呼ばれる．この名前は，計量が“テンソル的性質”を持っていることからきているが，その意味は，第 6 章でテンソルの性質を詳しく調べるときに明らかになる．計量のもう 1 つの名前は，**第 1 基本形式**(first fundamental form)である．この名前は，ガウス(Gauss)が曲面の研究で導入したもので，現在でも非常によく使われる.

命題 5.1 行列 G のすべての固有値は正である.

証明：G は対称なので，その固有値 λ_1, λ_2 は実である．また，$\det G = \lambda_1\lambda_2$,$\operatorname{tr} G = \lambda_1 + \lambda_2$ なので，対角和と行列式の両方が正であることをいえば十分である.

ところが $\operatorname{tr} G = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 > 0$ は直ちに導かれる．一方 $\det G$ を計算するには，$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は線型独立であることに注意する．この 2 つのベクトルのなす角 θ は $0 < \theta < \pi$ を満たす．よって，$\sin\theta > 0$ であり，

$$\begin{aligned}\det G &= \|\mathbf{x}_1\|^2\|\mathbf{x}_2\|^2 - (\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2\|\mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{x}_1\|^2\|\mathbf{x}_2\|^2\cos^2\theta\\ &= \|\mathbf{x}_1\|^2\|\mathbf{x}_2\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\mathbf{x}_1\|^2\|\mathbf{x}_2\|^2\sin^2\theta > 0.\end{aligned}$$

証明終

内積と計量を，和の記号を用いて表すと，

計量に関する基本的な量

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \left(\sum_{i=1}^{2} v^i\mathbf{x}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{2} w^j\mathbf{x}_j\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v^iw^j(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v^iw^j g_{ij}$$

となる．同様に，接ベクトルの長さは

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{\textstyle\sum_{i,j} v^i v^j g_{ij}}$$

となる．2 つのベクトル $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i,j} v^i w^j g_{ij}}{\sqrt{\sum_{i,j} v^i v^j g_{ij}}\sqrt{\sum_{i,j} w^i w^j g_{ij}}}$$

である．

アインシュタインの和の規約

これらの例は $G = (g_{ij})$ がなぜ計量と呼ばれる理由の一端を説明している．これらはまた，微分幾何学に出てくる式は見た目が複雑で読み取りにくい傾向があることを実証している．この複雑さを緩和するために，アインシュタインは和の記号 $\sum$ の省略を許すこと，かわりに，次の規約を導入することを提案した．

和の規約: ある項の添え字に，ある変数が上付き添え字として 1 回，下付き添え字として 1 回，計 2 回現れるときには，和の記号が省略されていても，その変数について和を取れ．

この規約に従うと，例えば，

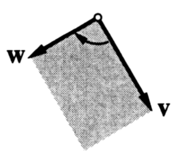
$$\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{x}_i \qquad \text{のかわりに} \qquad \mathbf{v} = v^i \mathbf{x}_i$$

のように簡単に書ける．その他の量も，それぞれ，

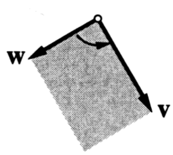
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v^i w^j g_{ij}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v^i v^j g_{ij}}, \quad \cos\theta = \frac{v^i w^j g_{ij}}{\sqrt{v^i v^j g_{ij}}\sqrt{w^i w^j g_{ij}}}$$

のようになる．

向きづけられた面積



$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$



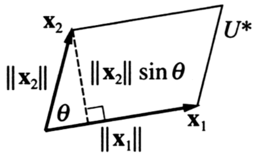
$\mathbf{w}\wedge\mathbf{v} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$

面積を計算するのにも計量を使う．まず，正または負の値の面積をとりうる**向きづけられた**(oriented)領域というものを定義する．まず，$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ を，ベクトルの(**順序まで考えた**)組 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ の張る向きづけられた平行 4 辺形と定義しよう．順序を入れ替えた $\mathbf{w}\wedge\mathbf{v} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ は向きを逆にしただけの同じ平行 4 辺形である．さらに，向きが逆の平行 4 辺形の面積を，

$$\operatorname{area}\mathbf{w}\wedge\mathbf{v} = -\operatorname{area}\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$$

と考える．最後に，平行 4 辺形 $U^* = \mathbf{x}_1\wedge\mathbf{x}_2$ が正の面積を持つものと決める．その値は，次の命題で与えられる．今後の記述の便利のため，$g = \det G$ とする．

命題 5.2 $\operatorname{area}U^* = \operatorname{area}\mathbf{x}_1\wedge\mathbf{x}_2 = \|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2\| = \sqrt{g}$.



証明：定義から $\|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2\| = \operatorname{area}U^*$ である．一方 $\operatorname{area}U^* = \|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\|\sin\theta$ であるが，これは命題 5.1 より $\sqrt{\det G} = \sqrt{g}$ に等しい．　**証明終**

次の命題は，任意の平行 4 辺形 $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ が，“基本” 平行 4 辺形 $\mathbf{x}_1\wedge\mathbf{x}_2$ とどのような関係にあるかを述べている．

命題 5.3 $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(v^1w^2-v^2w^1)(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)=(\det R)(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)$ が成立する．ただし，

$$\mathbf{v}=v^i\mathbf{x}_i,\quad \mathbf{w}=w^j\mathbf{x}_j,\quad R=\begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{pmatrix}.$$

とする（ここで，和の規約を用いた）．したがって，$\text{area}\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\det R\cdot\text{area}\,\mathbf{x}_1\wedge\mathbf{x}_2=\sqrt{g}\det R$ が成り立つ．

任意の平行 4 辺形の面積

証明： 和の規約を用ることにすると，

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=v^i\mathbf{x}_i\times w^j\mathbf{x}_j=v^iw^j(\mathbf{x}_i\times\mathbf{x}_j)$$

となる．ここで，$\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$，$\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_1=-\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2$ を用いると，

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\times\mathbf{w}&=v^1w^2(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)+v^2w^1(\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_1)\\&=(v^1w^2-v^2w^1)(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)=(\det R)(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)\end{aligned}$$

である．したがって，$\text{area}\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\det R\cdot\text{area}\,\mathbf{x}_1\wedge\mathbf{x}_2=\det R\sqrt{g}$ が示される． **証明終**

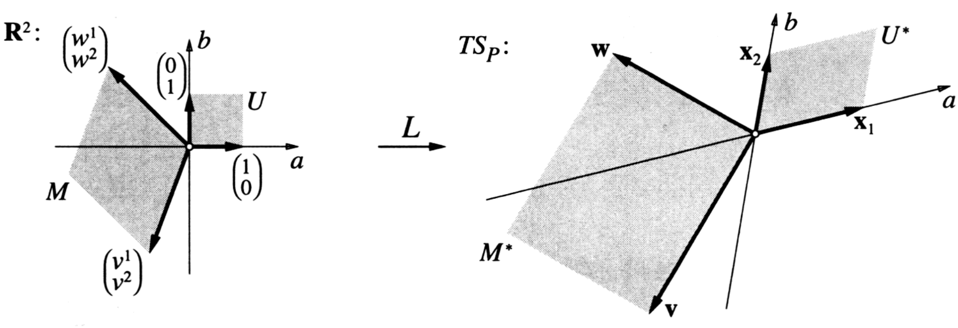
系 5.1 $\det R>0$ であるとき，そしてそのときに限って $\text{area}\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}>0$.

面積を座標で表す

面積に関するこれらの関係式を理解するには，TS_P に座標を導入して，その座標でいろいろな量を表すとよい．定義により $\mathbf{R}^2$ は実数のすべての 2 つ組 (a,b) からなる集合である．接平面 TS_P の座標づけとは線型写像 $L:\mathbf{R}^2\to TS_P$ であり，これは，標準基底に対する作用

$$L:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\mathbf{x}_1,\quad L:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\mathbf{x}_2,\quad \text{よって}\quad L:\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}\mapsto\mathbf{v}\quad \text{ただし}\ \mathbf{v}=v^i\mathbf{x}_i$$

s



で指定される．2 次元ベクトル空間から別の 2 次元ベクトル空間への与えられた線型写像は，面積を決まった倍率で定数倍する．線型写像 L の倍率は，次の議論からわかるように $\sqrt{g}$ である．ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の中で，(1,0) と (0,1) によって張られる単位面積の正方形を U とする．その像 $U^*=L(U)$ は，TS_P で $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ によって張られる平行 4 辺形である．$\text{area}\,U=1$ に対し，$\text{area}\,U^*=\sqrt{g}$ なので，線型写像 L は面積を $\sqrt{g}$ 倍にする．

L は面積を $\sqrt{g}$ 倍にする

次に，M を $\mathbf{R}^2$ の平行 4 辺形

$$\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}w^1\\w^2\end{pmatrix}$$

とする．練習問題4で，

$$R = \begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{pmatrix}.$$

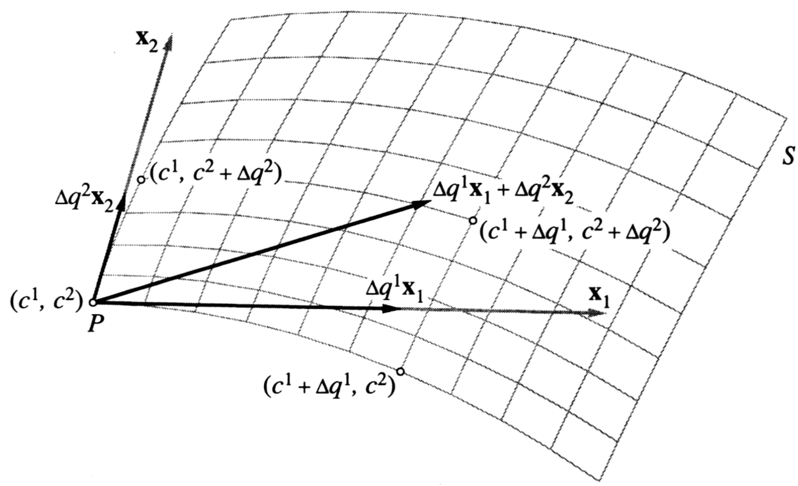
とおいたとき area $M = \det R$ となることを示す．このことを認めると，像の平行4辺形 $L(M) = M^* = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ の面積は，すでに別の方法でも示してあったように，$\sqrt{g}\,\det R$ となる．なお，上の図の例では，$\det R < 0$ で，M と M^* の面積は**負**になる．

曲面上の幾何

接平面を曲面に結びつける

接平面 TS_P の幾何学的情報から，曲面 S 自身の，少なくとも P の近くの幾何学的情報が得られる．それには，次のようにテイラーの定理を用いる．点 $P = (c^1, c^2)$（これは $P = \mathbf{x}(c^1, c^2)$ の略記である）を考え，また $(\Delta q^1, \Delta q^2)$ が $(0, 0)$ に近いとする．このとき，$(c^1 + \Delta q^1, c^2 + \Delta q^2)$ は P に近く，

$$\underbrace{\mathbf{x}(c^1 + \Delta q^1, c^2 + \Delta q^2)}_{\text{曲面上で } P \text{ に近い点}} \approx \underbrace{\mathbf{x}(c^1, c^2) + \Delta q^1\, \mathbf{x}_1(c^1, c^2) + \Delta q^2\, \mathbf{x}_2(c^1, c^2)}_{\text{曲面の } P \text{ における接平面上の点}}$$



となる．点 $\mathbf{x}(c^1 + \Delta q^1, c^2 + \Delta q^2)$ は，上の図では単に $(c^1 + \Delta q^1, c^2 + \Delta q^2)$ と記されており，その座標は (c^1, c^2) を基準とすると $(\Delta q^1, \Delta q^2)$ である．一方，点 $\mathbf{x}$ から $\mathbf{x} + \Delta q^1\, \mathbf{x}_1 + \Delta q^2\, \mathbf{x}_2$ に向かうベクトルは TS_P 内にあり，基底として $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$ をとって成分表示したときの座標は $(\Delta q^1, \Delta q^2)$ である．この2つの点は，意味は違うが座標 $(\Delta q^1, \Delta q^2)$ の値は同じである．一方は曲面上にあるのに対し，他方は接平面上にあり，離れている．しかし，テイラーの定理から $\mathbf{R}^3$ の中で近いということが示せる．近さの正確な評価は，極限

$$\lim_{(\Delta q^1, \Delta q^2) \to (0,0)} \frac{\|\mathbf{x}(c^1 + \Delta q^1, c^2 + \Delta q^2) - (\mathbf{x} + \Delta q^1\, \mathbf{x}_1 + \Delta q^2\, \mathbf{x}_2)\|}{\|(\Delta q^1, \Delta q^2)\|^2}$$

が存在し有限であるということである．（ここで，上の式と上の図に現れる引数のない $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ は，(c^1, c^2) での値を意味している．）このテイラーの定

理から導かれた評価は，ランダウの記号 O を用いると

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(c^1+\Delta q^1, c^2+\Delta q^2)\\&=\mathbf{x}(c^1,c^2)+\Delta q^1\,\mathbf{x}_1(c^1,c^2)+\Delta q^2\,\mathbf{x}_2(c^1,c^2)+O\left((\Delta q^1)^2+(\Delta q^2)^2\right)\end{aligned}$$

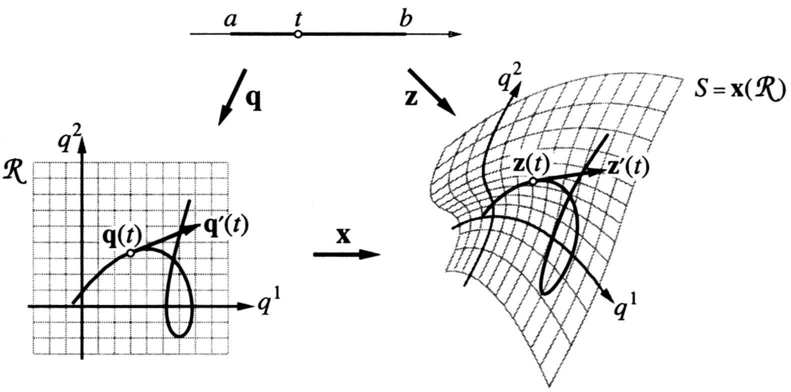
と表現できる．

ここで，曲面 S の上の曲線の長さを測るという問題に移ろう．曲面 S は助変数表示 $\mathbf{x}:\mathcal{R}\to\mathbf{R}^3$ で与えられるとする．まず，助変数の平面 $\mathcal{R}$ 上の曲線で，

S 上の曲線の長さ

$$\begin{aligned}\mathbf{q}:[a,b]&\to\mathcal{R}\\ t\ &\mapsto\left(q^1(t),q^2(t)\right)\end{aligned}$$

で定義されるものを考えよう．次に，合成写像 $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(\mathbf{q}(t))$ を考えると，これは，$\mathbf{R}^3$ 内の助変数表示された曲線で，像が S に含まれるものになっている．これで，2 つの曲線，一方は $\mathcal{R}$ 上のもの，他方は $S=\mathbf{x}(\mathcal{R})$ 上のものが定義された．



それぞれの曲線の長さを計算してみるのは理解に役立つだろう．最初に，S 上の曲線 $\mathbf{z}(t)$ の場合は，

$$\mathbf{z}\,の長さ=\int_a^b\|\mathbf{z}'(t)\|\,dt$$

と表せる．被積分関数を計算しよう．まず，$\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(q^1(t),q^2(t))$ であるので，合成関数の微分法から

$$\mathbf{z}'(t)=\frac{d\mathbf{z}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q^1}\frac{dq^1}{dt}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q^2}\frac{dq^2}{dt}=\frac{dq^1}{dt}\mathbf{x}_1+\frac{dq^2}{dt}\mathbf{x}_2$$

となる．ベクトル $\mathbf{z}'(t)$ は点 $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(\mathbf{q}(t))$ における接平面内にある．平面の基底を $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ としたときの座標は，上の計算から $dq^1/dt,\ dq^2/dt$ であることがわかる．この情報から，ベクトルの長さを，$TS_{\mathbf{z}(t)}$ の計量を用いて表せる．和の規約を利用し，しかしそれ以外は省略なしに書くと，

$TS_{\mathbf{z}}$ 上で $\mathbf{z}'=\left(\dfrac{dq^1}{dt},\dfrac{dq^2}{dt}\right)$

$$\|\mathbf{z}'(t)\|=\sqrt{g_{ij}(q^1(t),q^2(t))\frac{dq^i}{dt}(t)\frac{dq^j}{dt}(t)}$$

となる．よって，曲線の長さは，今度は多少の略記を用いて

$$\mathbf{z}\text{ の長さ} = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}}\, dt$$

と求められる．

$\mathcal{R}$ 上で $\mathbf{q}' = \left(\frac{dq^1}{dt}, \frac{dq^2}{dt}\right)$

今度は，$\mathcal{R}$ 上の曲線 $\mathbf{q}(t)$ を考える．関係 $\mathbf{q}' = (dq^1/dt, dq^2/dt)$ に注意すると，$\mathbf{q}'$ と $\mathbf{z}'$ は，各々のベクトル空間で，各々の基底のもとで，座標が同じ値をとる．したがって，

$$\mathbf{q}\text{ の長さ} = \int_a^b \|\mathbf{q}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dq^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

と求められる．これを $\mathbf{z}(t)$ の長さの式とより似た形に書こう．助変数の平面 $\mathcal{R}$ でのベクトルの長さは計量が単位行列である普通のユークリッド内積で測られることに注意する．すなわち，$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}^t I\,\mathbf{w}$, ただし

$$I = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．言い換えると，$\mathcal{R}$ 自体も計量が

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

であるような曲面と考えることができる．ここで，$\delta_{ij}v^iv^j = (v^1)^2 + (v^2)^2$ に注意すると，この内積のもとでの $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$ の長さは，$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\delta_{ij}v^iv^j}$ となる．よって，最終的に，

$$\mathbf{q}\text{ の長さ} = \int_a^b \sqrt{\delta_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}}\, dt$$

となる．

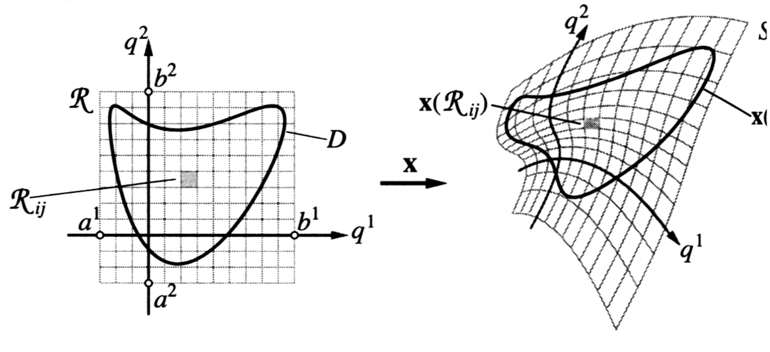
この $\mathbf{q}(t)$ の長さの式では，確かに $\mathcal{R}$ 上の量だけが用いられている．2つの曲線 $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ に対する計算がよく似ていることから，曲線 $\mathbf{z}(t)$ の長さもまた，$\mathcal{R}$ 上で定義された量だけで書けていることに気づく．

曲面 S 上の領域の面積

定理 5.1 助変数の平面 $\mathcal{R}$ の領域 D と，曲面 $S = \mathbf{x}(\mathcal{R})$ を考える．このとき，それぞれ

$$\text{area}\, D = \iint_D dq^1dq^2, \qquad \text{area}\,\mathbf{x}(D) = \iint_D \sqrt{g(q^1, q^2)}\, dq^1dq^2$$

である．



証明：以下は証明のスケッチである．領域 D の面積についての主張は定義そのものだが，まず，この場合について詳しく見るのがよいだろう．

領域 D が，(q^1, q^2) 平面の長方形の領域 $\mathcal{R} = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$ の内部にあるとする．この 2 つの区間の分割

D の面積

$$a^1 = q^1_1 < q^1_2 < q^1_3 < \cdots < q^1_{m+1} = b^1, \quad a^2 = q^2_1 < q^2_2 < q^2_3 < \cdots < q^2_{n+1} = b^2,$$

により，長方形 $\mathcal{R}$ は小さな長方形の族 $\mathcal{R}_{ij} = [q^1_i, q^1_{i+1}] \times [q^2_j, q^2_{j+1}]$ に分割される．ここで，$\Delta q^1_i = q^1_{i+1} - q^1_i$, $\Delta q^2_j = q^2_{j+1} - q^2_j$ としたとき，$\text{area}\,\mathcal{R}_{ij} = \Delta q^1_i \Delta q^2_j$ となっている．領域 D の面積は，D と共通部分を持つような $\mathcal{R}_{ij}$ の面積の和に近似的に等しい．このことをより正確に述べるために，D の**特性関数**(characteristic function)

$$\chi_D(q^1, q^2) = \begin{cases} 1 & (q^1, q^2) \in D, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

を導入する．このとき

$$\text{area}\, D \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \chi_D(q^1_i, q^2_j)\, \text{area}\, \mathcal{R}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \chi_D(q^1_i, q^2_j) \Delta q^1_i \Delta q^2_j$$

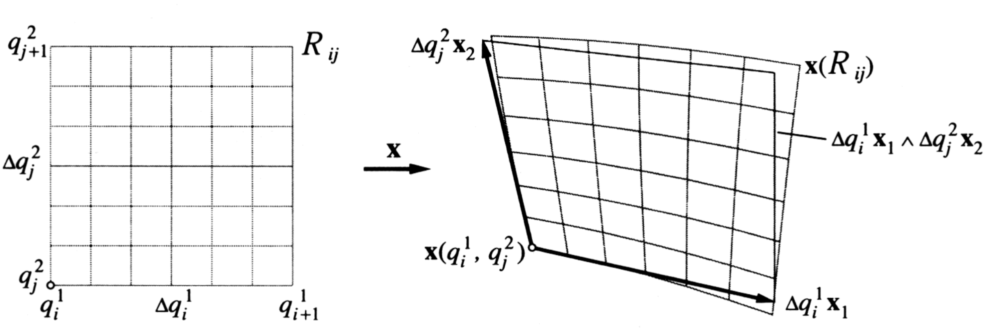
である．ただし，ここでは和の規約は用いていない．極限 $(\Delta q^1_i)^2 + (\Delta q^2_j)^2 \to 0$ で，この和は積分

$$\iint_R \chi_D(q^1, q^2)\, dq^1 dq^2 = \iint_D dq^1 dq^2$$

に等しくなる．

像 $\mathbf{x}(D)$ の面積を求めるために，まず 1 つの長方形 $\mathcal{R}_{ij}$ の像に注目しよう．実際，注目すべき像はふたつある．一方は曲面 S の一部である $\mathbf{x}(\mathcal{R}_{ij})$ であり，もう一方は点 $\mathbf{x}(q^1_i, q^2_j)$ における接平面上にあり，ベクトル $\Delta q^1_i \mathbf{x}_1$ と $\Delta q^2_j \mathbf{x}_2$ で張られる平行 4 辺形 $\Delta q^1_i \mathbf{x}_1 \wedge \Delta q^2_j \mathbf{x}_2$ である．(下の図では，接平面は，曲面の手前に透明に描かれている．)

1 つの $\mathcal{R}_{ij}$ の像の面積



テイラーの定理によれば，平行 4 辺形 $\Delta q^1_i \mathbf{x}_1 \wedge \Delta q^2_j \mathbf{x}_2$ は像 $\mathbf{x}(\mathcal{R}_{ij})$ に非常に近いので，

$$\begin{aligned}\operatorname{area}\mathbf{x}(\mathcal{R}_{ij}) &\approx \operatorname{area}\left(\Delta q_i^1\mathbf{x}_1 \wedge \Delta q_j^2\mathbf{x}_2\right)\\ &= \Delta q_i^1\Delta q_j^2 \cdot \operatorname{area}\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\\ &= \Delta q_i^1\Delta q_j^2\sqrt{g(q_i^1, q_j^2)}\\ &= \sqrt{g(q_i^1, q_j^2)}\ \operatorname{area}\mathcal{R}_{ij}\end{aligned}$$

となる．すでに，$\mathcal{R}_{ij}$ を接平面に写す写像の，面積拡大率(area magnification factor)が $\sqrt{g}$ 倍であることがわかっている．上の結果から，$\mathcal{R}_{ij}$ を曲面上に写す写像 $\mathbf{x}$ の(近似的な)局所的拡大率もまた $\sqrt{g}$ であることがわかる．

像全体の面積

したがって，像 $\mathbf{x}(D)$ 全体の面積は，領域 D と共通部分を持つすべての小長方形 $\mathcal{R}_{ij}$ についての像 $\mathbf{x}(\mathcal{R}_{ij})$ の面積の総和で近似することができ，

$$\begin{aligned}\operatorname{area}\mathbf{x}(D) &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\chi_D(q_i^1, q_j^2)\operatorname{area}\mathbf{x}(\mathcal{R}_{ij})\\ &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\chi_D(q_i^1, q_j^2)\sqrt{g(q_i^1, q_j^2)}\Delta q_i^1\Delta q_j^2\end{aligned}$$

となる．ここで極限 $(\Delta q_i^1)^2 + (\Delta q_j^2)^2 \to 0$ をとると，1行目の右辺の和は厳密に左辺 $\operatorname{area}\mathbf{x}(D)$ と等しくなり，2行目の和は積分

$$\iint_R \chi_D(q^1, q^2)\sqrt{g(q^1, q^2)}\ dq^1dq^2 = \iint_D \sqrt{g(q^1, q^2)}\ dq^1dq^2$$

となる．　**証明終**

練習問題

1. (a) $\mathbf{R}^3$ の次の曲面を描き，2組の座標曲線群 $q^1 =$ 定数, $q^2 =$ 定数 を示せ．可能な場合には，曲面を言葉で説明せよ．
   (b) $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (q^1, q^2, q^1q^2)$, $-1 \le q^1, q^2 \le 1$.
   (c) $\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left(q^1, q^2, (q^1)^2 - (q^2)^2\right)$, $-1 \le q^1, q^2 \le 1$.
   (d) $\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left(q^1, q^2, \sqrt{1-(q^1)^2-(q^2)^2}\right)$, $(q^1)^2 + (q^2)^2 \le 1$.
   (e) $\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left(\cos q^2 \cos q^1, \cos q^2 \sin q^1, \sin q^2\right)$, $0 \le q^1 \le 2\pi$, $0 \le q^2 \le \pi/2$.
   (f) 上の曲面で，定義域を $-\pi/2 \le q^2 \le \pi/2$ に広げたもの．
   (g) $\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left(\sin q^2 \cos q^1, \sin q^2 \sin q^1, \cos q^2\right)$, $0 \le q^1 \le 2\pi$, $0 \le q^2 \le \pi$.
   (h) $\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left(\cosh q^2 \cos q^1, \cosh q^2 \sin q^1, \sinh q^2\right)$, $0 \le q^1 \le 2\pi$, $-1 \le q^2 \le 1$.
2. 練習問題1の各曲面 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ について，$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$, $g_{ij}, \sqrt{g}$ を求めよ．2つの座標についての座標曲線群が互いに直交しているかどうかを判定せよ．
3. (a) 本文の“蝶ネクタイ”曲面

$$x = q^1 + 0.9q^2, \qquad y = 0, \qquad z = \left(q^1 - 0.9q^2\right)\left(q^1 + 0.9q^2\right)^2$$

の助変数表示 $\mathbf{y}(q^1, q^2)$ を考える．接ベクトル $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ を計算し，$(q^1, q^2) = (0, 0)$ で方向が一致していることを示せ．

(b) 写像 $\mathbf{y}$ の定義域が (q^1, q^2) 平面全体であるとする．曲面の像が (x, z) 平面全体から原点以外の z 軸を除いたものであることを示せ．

4. 平行 4 辺形 M が

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき，$\operatorname{area} M = v_1 w_2 - v_2 w_1$ であることを示せ．

5. 次の各曲面 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ について，$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$, g_{ij}, $\sqrt{g}$ を求めよ．

(a) 平面 $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (q^1, q^2, aq^1 + bq^2 + c)$.

(b) 関数 $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (q^1, q^2, f(q^1, q^2))$ のグラフ．

(c) 回転面 $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (r(q^2)\cos q^1, r(q^2)\sin q^1, z(q^2))$. ただし $0 \le q^1 \le 2\pi$.

(d) 半径 R の球面

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left(R\cos q^2 \cos q^1, R\cos q^2 \sin q^1, R\sin q^2\right),$$

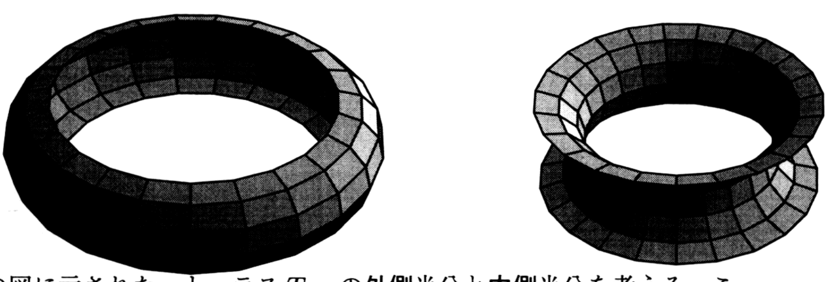
ただし $0 \le q^1 \le 2\pi$, $-\pi/2 \le q^2 \le \pi/2$（これは回転面の例である）．

(e) トーラス（輪環面）$T_{a,r}$

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = \left((a + r\cos q^2)\cos q^1, (a + r\cos q^2)\sin q^1, r\sin q^2\right),$$

ただし，$0 \le q^1 \le 2\pi$, $-\pi \le q^2 \le \pi$（これは回転面の例である）．変数 a, r はトーラスのどのような幾何的性質を決めるか．$a = 1, 2, 3, 4$ についてトーラス $T_{a,3}$ を描け．

6. 助変数表示された曲線 $(r, z) = (r(q), z(q))$ は回転面 $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (r(q^2)\cos q^1, r(q^2)\sin q^1, z(q^2))$ の中にどのように含まれるか．練習問題 1d, 1f, 1g, 5d, 5e の回転面の場合に，具体的に示せ．



7. 上の図に示された，トーラス $T_{a,r}$ の**外側**半分と**内側**半分を考える．これら 2 つの領域の面積を，a と r の関数として求めよ．それには，まず，助変数平面の領域 $\mathcal{R}: 0 \le q^1 \le 2\pi, -\pi \le q^2 \le \pi$ のうち，トーラスの各半分にあたる部分領域を決定するとよい．トーラス全体の面積はどれだけか．

8. (a) トーラス $T_{a,r}$ 上の座標曲線は "経線"（"meridians of longitude"）$q^1 =$ 定数 と "緯線"（"parallels of latitude"）$q^2 =$ 定数 の 2 つの族からなる．これらの曲線の長さを求めよ．特に，緯線の長さは q^2

の値に依存するが，経線の長さはすべて同じであることを示せ．

(b) トーラス $T_{a,r}$ 上に，曲線 $q^2 = q^1 - \pi$, $0 \leq q^1 \leq 2\pi$ を描け．その際，**閉曲線**であること，すなわち，始点と終点が同じであることがわかるように描け．

(c) トーラス $T_{a,r}$ 上に，曲線 $\mathbf{x}(2t, 3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ を描け．その際，**三つ葉結び目**(trefoil knot)の形をした閉曲線であることがわかるように描け．

9. (a) 弧長により助変数表示されたらせん

$$\mathbf{z}(s) = \left(\cos\frac{s}{2}, \sin\frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \qquad \text{ただし}\quad 0 \leq s \leq \pi$$

を描け．

(b) すべての s について，接ベクトル $\mathbf{z}'(s)$ が単位ベクトルであることを確かめよ．問(a)で描いた図に，$s = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$ の点での接ベクトル $\mathbf{z}'(s)$ を書き加えよ．

(c) ある s を固定したとき，t により助変数表示される接線

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{z}(s) + t\mathbf{z}'(s)$$

を考える．問(a)で描いた図に，問(b)で指定された各 s について，$-1 \leq t \leq 2$ の範囲の接線を書き加えよ．

(d) 助変数 s が 0 から π まで連続に変化していく場合を考え，問(c)で描いた接線の間を "埋めて" 曲面を描け．これは $\mathbf{z}$ の接線可展曲面(tangent developable surface)と呼ばれる曲面の一部分である．描いた図から，この面の 2 つの部分が，曲線 $\mathbf{z}$ 上で尖点(カスプ)的に交わっていることがわかるはずである．

10. (a) 弧長により助変数表示された任意の空間曲線 $\mathbf{z}(s)$ と，その接線可展曲面 $\mathbf{x}(q^1, q^2) = \mathbf{z}(q^1) + q^2\mathbf{z}'(q^1)$ を考える．ベクトル $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$, と関数 g_{ij}, $\sqrt{g}$ を $\mathbf{z}$ で表せ．

(b) この助変数表示 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ が特異的になるのはどのような点 (q^1, q^2) においてか？ その特異点で曲面はどうなっているか？

(c) ある接線(すなわち，ひとつの座標曲線 $q^1 =$ 定数)をとったとき，その上のすべての点で曲面の単位法線ベクトル $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)/\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|$ が等しいことを示せ．

(d) 座標曲線の 2 つの族が互いに直交しているかどうかを判定せよ．

(e) 座標曲線 $q^2 \mapsto \mathbf{x}(c^1, q^2)$ の $a \leq q^2 \leq b$ の部分の長さが $b - a$ であることを示せ．

5.2　球面上の内在的幾何

内在的幾何

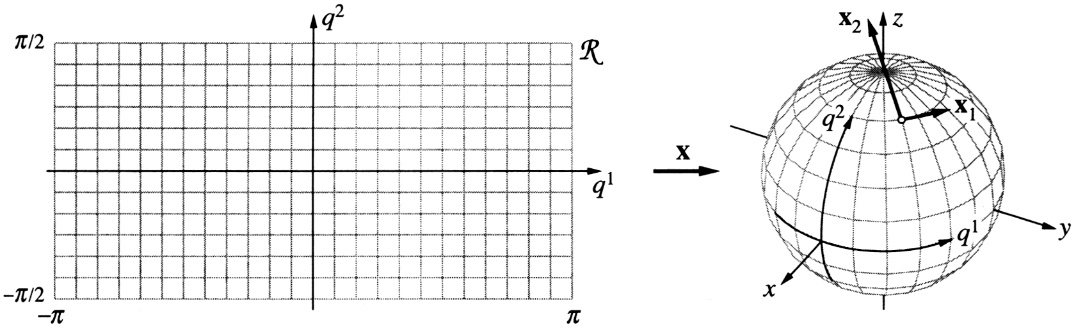
空間 $\mathbf{R}^3$ の曲面 S が助変数表示 $\mathbf{x} : \mathcal{R} \ni \mathbf{q} \mapsto (x(\mathbf{q}), y(\mathbf{q}), z(\mathbf{q})) \in \mathbf{R}^3$ によって定義されているとしよう．前の節 5.1 では，助変数の平面 $\mathcal{R}$ の上での計算だけで，計量テンソル g_{ij} からすべての基本的な幾何学的量を求められることを見た．このような，助変数の平面上だけで行う曲面 S の分析では，曲

面 S の $\mathbf{R}^3$ の中への埋め込まれ方を意識する必要がないので，このような分析の方法を**内在的幾何**(intrinsic geometry)という．(もちろん，計量 g_{ij} は，写像 $\mathbf{x}$ から計算しなければならない．ここで内在的というのは，いったん計量を求めてしまえば，その後は写像 $\mathbf{x}$ の知識を使う必要がないということである．)

例: 球面

内在的幾何から曲面についてどれだけのことがわかるかを示すために，すでに性質がよくわかっている曲面である球面を，この方法で調べ直してみることにしよう．まず，q^1 を経度，q^2 を緯度とする標準的な助変数表示

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = (\cos(q^1)\cos(q^2), \sin(q^1)\cos(q^2), \sin(q^2)),$$
$$\mathcal{R}: \begin{cases} -\pi \le q^1 \le \pi, \\ -\pi/2 \le q^2 \le \pi/2 \end{cases}$$



を使うことにする．性質 $\|\mathbf{x}(\mathbf{q})\| = 1$ がすべての $\mathbf{q}$ について成り立っていることは確かめられるので，点 $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ は間違いなく半径 1 の球面上にあることがわかる．接平面の基底ベクトルは，

$$\mathbf{x}_1 = (-\sin(q^1)\cos(q^2), \cos(q^1)\cos(q^2), 0),$$
$$\mathbf{x}_2 = (-\cos(q^1)\sin(q^2), -\sin(q^1)\sin(q^2), \cos(q^2))$$

である．これらに対しては，曲面が特異的でないための条件 $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ が成り立たなければならない．実際，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 &= \left(\cos(q^1)\cos^2(q^2), \sin(q^1)\cos^2(q^2), \sin q^2 \cos(q^2)\right) \\ &= \cos(q^2)\left(\cos(q^1)\cos(q^2), \sin(q^1)\cos(q^2), \sin(q^2)\right) \\ &= \cos(q^2)\,\mathbf{x}\end{aligned}$$

x の特異点

となる．したがって $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ はいつでも $\mathbf{x}$ と同じ向きである．これは驚くことではない．なぜなら，$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ は常に曲面に垂直であり，一方 $\mathbf{x}$ は球面の動径ベクトルで，やはり曲面に垂直だからである．また $\|\mathbf{x}\| = 1$ なので，$\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = 0$ となるのは $\cos(q^2) = 0$ すなわち $q^2 = \pm\pi/2$ が成立するとき，そしてそのときだけだということがわかる．したがって，これら長方形領域 $\mathcal{R}$ の上下の辺の上の点は写像 $\mathbf{x}$ の**特異**点である．上の辺全体は北極の 1 点に写されるので特異である．下の辺全体は南極の 1 点に写されるのでやはり特異である．写像 $\mathbf{x}$ は，これらの点の上では局所的 1 対 1 ではないが，領

域 $\mathcal{R}$ の境界上の点なので許容できる．

図からわかるように，また直接の計算からも確かめられるように，$\|\mathbf{x}_2\|^2 = 1$ であるが，もう一方の $\|\mathbf{x}_1\|^2 = \cos^2(q^2)$ は $\mathbf{q}$ が極点に近づくとき 0 まで減少する．さらに，$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ なので，曲線座標の格子は互いに**直交**している（緯線と経線は垂直に交わる）．したがって，計量テンソル G は

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(q^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という形になる．

緯線の長さ

次の問から内在的幾何を調べ始めよう．球面を一周する閉じた緯線 $q^2 = \varphi$ の長さはどれだけか？ 緯線を $(q^1(t), q^2(t)) = (t, \varphi)$ と助変数表示することにすると，$(dq^1/dt, dq^2/dt) = (1, 0)$ である．したがって，

$$g_{ij}\left(q^1(t), q^2(t)\right) \frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} = g_{11}(t,\varphi)\left(\frac{dq^1}{dt}\right)^2 + g_{22}(t,\varphi)\left(\frac{dq^2}{dt}\right)^2 = \cos^2(\varphi)$$

であり，

$$\text{長さ} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g_{ij}\left(q^1(t), q^2(t)\right) \frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi)\, dt = 2\pi\cos(\varphi)$$

と求められる．したがって，赤道（$\varphi = 0$ すなわち $\cos\varphi = 1$）では，その長さは 2π である．極までの真ん中の位置 $\varphi = \pm\pi/4$ すなわち $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$ では，長さは $\sqrt{2}\,\pi$ にすぎない．両極では $\cos\varphi = 0$ であり，長さは 0 である．

もちろん (q^1, q^2) 平面上では，これらの経路はすべて領域 $\mathcal{R}$ の左側 $q^1 = 0$ から右側 $q^1 = 2\pi$ へ至るものであり，その**見た目の**長さは 2π である．したがって

$$\frac{\text{見た目の長さ}}{\text{真の長さ}} = \frac{2\pi}{2\pi\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

となる．これはまさに，4.1 節でミラー円柱図法の歪みについて考えたときに得た関係である．

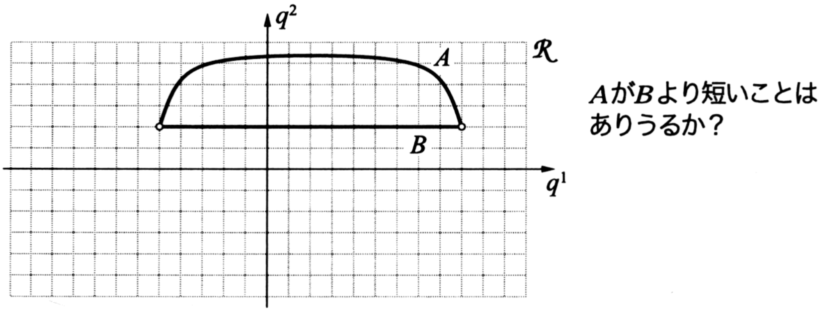
経線の長さ

これに対して，経線に沿った距離（縦方向の距離）は見た目と**厳密**に同じである．これを確かめるために，経度 $q^1 = \theta$ を固定して曲線 $\mathbf{q}(t) = (\theta, t)$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ を考えよう．練習問題 2 で，θ と無関係にこの長さが π であることを見る．

長く見える経路のほうが実は短いこともある？

球面の計量テンソルの性質は，次のように読み取れる．垂直方向の距離は見た目の通りだが，水平方向の距離はそうではない．**水平方向の経路の距離の歪みは，q^1 軸から離れれば離れるほど激しくなる**．ここで同じ緯度 $q^2 = c$ にある 2 つの点を結ぶ 2 つの経路を考えてみることにしよう．経路 A のように，c より大きな q^2 の値の部分を回っていくものと，経路 B のように，q^2 の値を保ったまま 2 点を“まっすぐに”つなぐものとを比べたときに，A のほ

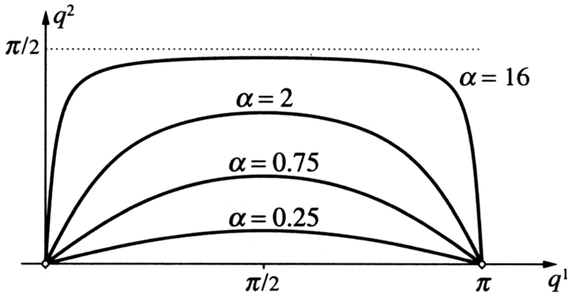
うが短いということはあり得るだろうか？



この問題を解くために，曲線の族 C_α を助変数表示

$$\mathbf{q}_\alpha(t) = (t, \arctan(\alpha \sin t)), \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

で定義しよう．族のすべての曲線は，共通の端点を持つ．始点は $(q^1, q^2) = (0, 0)$, 終点は $(\pi, 0)$ である．これらの曲線の長さの比較はどうなるだろうか．特に，曲線のうち“高緯度地方”を通過する部分が長いという得と，縦方向に回り道するという損の差し引きはどうなるだろうか．



長さを計算する上での出発点は

$$\frac{dq^1}{dt} = 1, \qquad \frac{dq^2}{dt} = \frac{\alpha \cos t}{1 + \alpha^2 \sin^2 t}$$

である．したがって，

$$g_{ij}\left(q^1(t), q^2(t)\right) \frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} = \cos^2(\arctan(\alpha \sin t)) + \frac{\alpha^2 \cos^2 t}{\left(1 + \alpha^2 \sin^2 t\right)^2}$$

となる．ここで，$\cos(\arctan y) = 1/\sqrt{1 + y^2}$ に注意すると，

$$\cos^2(\arctan(\alpha \sin t)) = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2 t}$$

であり，よって，

$$g_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} = \frac{1 + \alpha^2 \sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t}{\left(1 + \alpha^2 \sin^2 t\right)^2} = \frac{1 + \alpha^2}{\left(1 + \alpha^2 \sin^2 t\right)^2}$$

となる．したがって，曲線 C_α の長さ L_α は

$$L_\alpha = \int_0^\pi \sqrt{g_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}}\, dt = \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \alpha^2 \sin^2 t}\, dt$$

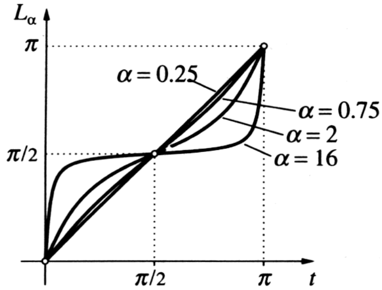
で与えられる．これを 3 角関数の公式を使って少し変形すると，

$$\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2\sin^2 t} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\cos^2 t+\sin^2 t+\alpha^2\sin^2 t}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\cos^2 t+(1+\alpha^2)\sin^2 t} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{1+(1+\alpha^2)\tan^2 t}$$

となる．ここで，$u=\sqrt{1+\alpha^2}\cdot\tan t$とおこう．すると$du=\sqrt{1+\alpha^2}\cdot\sec^2 t dt$であり，

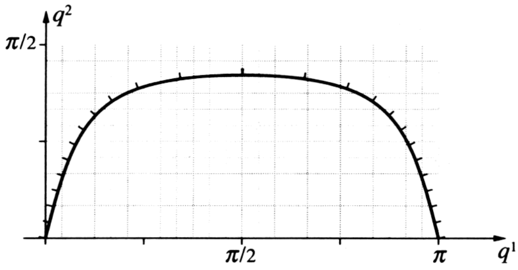
$$L_\alpha(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^u \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \arctan(u) = \arctan\left(\sqrt{1+\alpha^2}\,\tan t\right)$$

が得られる[注1]．求めたい値は $L_\alpha(\pi)$ である．次のグラフからわかるように，関数 L_α は互いに異なるが，位置 $t=\pi/2, \pi$ での値はすべての α について一致する．実際，すべての α に対して，$L_\alpha(\pi/2)=\pi/2$, $L_\alpha(\pi)=\pi$ となっている．



すべての曲線 C_α の長さは π

つまり，すべての曲線 C_α の長さは同じである！ これらはどれも，$(0,0)$ から $(\pi,0)$ まで赤道上を直接行く経路と同じ長さなのである．弧長関数 L_α を見ると，t が増加するにつれて長さがどのように増加していくかがわかる．そして，これは，垂直方向の遠回りによる長さの損失と，高緯度地方を水平に移動することによる節約との間の損得勘定の答えになっている．関数 $L_{16}(t)$ のグラフが，最も特徴がはっきりしていてよくわかる．最初の $t=0$ 近くの傾斜の急な部分は，垂直方向の経路に沿って進む間に長さが急に増加することを示している．しかし，t が $\pi/2$ 付近になったときには，グラフはほとんど水平になり，長さがゆっくり増加することを示している．



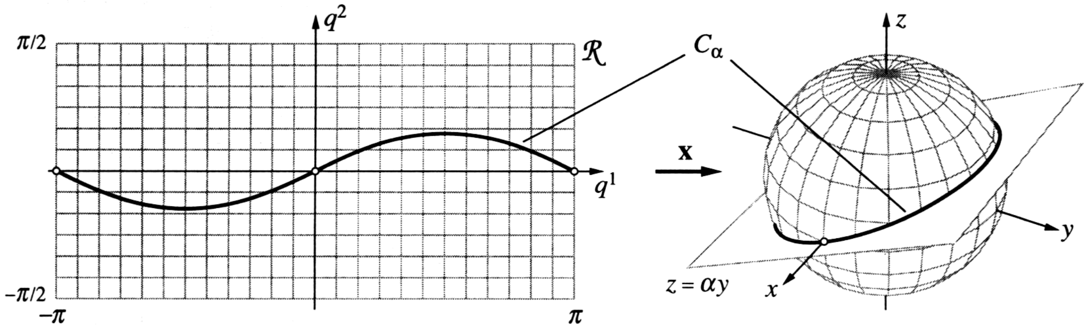
上の図は，弧長 $\pi/24$ の増加ごとの印とともに曲線 C_4 を描いている．この長さ $\pi/24$ は，背景の格子の水平および垂直方向の一辺の長さと同じである．経路の傾きが急である間は，印は格子の垂直方向の刻みと良く一致して

注1 訳注：$0 \le t \le \pi$ なので，$t=\pi/2$ でこの変数変換は正しくない．$[0,\pi/2)$, $(\pi/2,\pi]$ に分割して積分したと考えればよい．この結果，$t\in(\pi/2,\pi]$ のときには，$L_\alpha(t)=\arctan+\pi$ となる．arctan の値域を $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$ とする流儀（p.179 ではこの流儀が取られている）ではこの形が正しい．下のグラフはこのままで正しい．

いる．しかし，経路がほぼ水平になった辺りでは，印は，水平方向の刻みに比べてずっと間隔が開いている．この不釣り合いが，計量 g_{ij} と，私たちの眼にとって自然なユークリッド計量の違いをよく表している．この図を，3.3節の，一定の固有時間ごとに印をつけた世界線の図と比較してみよう．

曲線 C_α は大円

上で扱った曲線の族 C_α は明らかに特別で，注意深く選ばれたものである．このことは，曲面 S が空間の中にどのように埋め込まれているかを調べる**外部的**(extrinsic)幾何学に戻ってみるとよくわかる．この立場から見ると，曲線 C_α は球面の大円(great circle)である．2 点 $(0,0)$, $(\pi, 0)$ は球の対蹠点(antipodal point)であり，平面 $z = \alpha y$ はすべてこの 2 点を通る．この平面と球面との交点の集合は $(0,0)$ と $(\pi, 0)$ を通る大円であり，曲線 C_α は，写像の定義域 $\mathcal{R}$ におけるこの大円の逆像である．



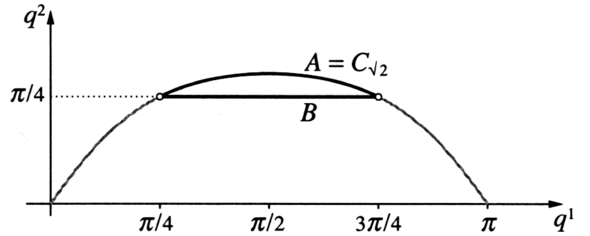
曲線 C_α の助変数表示 $\mathbf{q}_\alpha(t)$ を求めるには，平面の式 $z = \alpha y$ が $\mathbf{x}(\mathbf{q}(t))$ に対するどのような条件になっているかを考えればよい．

$$\sin(q^2) = z = \alpha y = \alpha \sin(q^1)\cos(q^2)$$

なので，$\tan(q^2) = \alpha \sin(q^1)$ であり，これは $q^2 = \arctan(\alpha \sin(q^1))$ と書き直せる．そしてこれは，上で用いた助変数表示と同じものである．

“極回り” 経路は近いか？

ここで，同じ緯度にある 2 点を結ぶ経路で，緯線上を “まっすぐ” 結ぶ経路よりも**真に**短いものがあるか，という問題にもどろう．緯線 $q^2 = \pi/4$ 上にある 2 点 $q^1 = \pi/4$, $q^1 = 3\pi/4$ を考えよう．緯線 B 上の距離は $(3\pi/4 - \pi/4)\cos(\pi/4) = \pi\sqrt{2}/4$ である．



大円のうち 1 つ $A = C_\alpha$ もこれら 2 点を通っている．それは，$q^1 = \pi/4$ で $q^2 = \pi/4$ となるものなので

$$1 = \tan(\pi/4) = \alpha \sin(\pi/4) = \alpha\sqrt{2}/2$$

から $\alpha = \sqrt{2}$ となる．この大円 $C_{\sqrt{2}}$ の全長は π である．その最初の部分

$q^1 = 0$ から $q^1 = \pi/4$ までの長さは

$$L_{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \arctan\left(\sqrt{1+2}\,\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

である．最後の部分 $q^1 = 3\pi/4$ から $q^1 = \pi$ までの長さは同様に $\pi/3$ であり，したがって，真ん中の部分 A の長さは $\pi/3$ である．長さを比べると，$\pi/3 < \pi\sqrt{2}/4$ なので A は真に B より短いことになる．

これで A が B より短いことを内在的方法で示せたわけだが，A がこれらの端点を結ぶ最短の経路であることを示すような内在的方法はまだ手にしていない．しかし，A は大円の一部分なので**外部的**証明は明らかである．

角の大きさを測る

内在的幾何の方法でも，交わる曲線の間の角の大きさを求めることができる．定義域 $\mathcal{R}$ の直線 $q^2 = q^1$ を考えよう．この直線と水平方向との角はいたるところ 45° であるように見える．しかし，各点での角の**真の**大きさはどれだけなのだろうか？

この直線は，$\mathbf{q}(t) = (t, t)$ ただし $0 \le t \le \pi/2$ と助変数表示できる．知りたいのは，直線の接ベクトル $\mathbf{q}' = (1, 1)$, と水平方向の基底ベクトル $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ との間の角 θ である．この θ は

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{x}_1}{\sqrt{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}'}\sqrt{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}}$$

から求められる．ここで，計量テンソル $g_{ij}(\mathbf{q}(t))$ を用いて内積を計算すると，

$$\mathbf{q}' \cdot \mathbf{x}_1 = (1, 1)\begin{pmatrix}\cos^2(t) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \cos^2(t),$$

$$\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}' = (1, 1)\begin{pmatrix}\cos^2(t) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} = \cos^2(t) + 1,$$

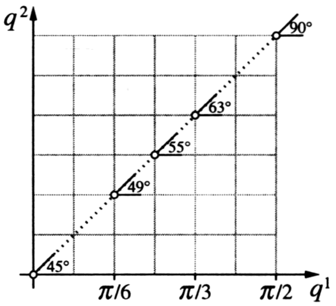
$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = (1, 0)\begin{pmatrix}\cos^2(t) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \cos^2(t)$$

である．したがって，

$$\cos\theta = \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + 1}}$$

を得る．これは t の単調減少関数である．よって，θ は t とともに増大する．始点 $t = 0$ では θ は見た目の通り 45° だが，$t \to \pi/2$ では 90° に近づく．このことを外部的に確かめるには経路 $\mathbf{q}(t)$ を球面上に描いて，角の大きさを

測ってみるとよい.



最後に，計量テンソルを用いて面積を計算してみよう．全球面の面積は　**球面の面積**

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{g}\, dq^1 dq^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(q^2)\, dq^2 \right) dq^1 = \int_{-\pi}^{\pi} 2\, dq^1 = 4\pi$$

となる．これに対して，定義域 $\mathcal{R}$ の**見た目の**面積，つまり平面 $\mathbf{R}^2$ 上の単なる長方形と見なしたときの面積は，$2\pi \times \pi = 2\pi^2$ となる．

練習問題

単位球面が出てくる問題では，本文中の助変数表示を用いよ．

1. 本文で用いた単位球面の助変数表示を，$\mathbf{R}^3$ の中の半径 R の球面に拡張し，計量テンソル g_{ij} を計算せよ．このテンソルを，単位球面のものと比較せよ．面積拡大率 $\sqrt{g}$ を比較せよ．
2. (a) 単位球面上の経線 ($q^1 =$ 定数) が長さ π であることを示せ．北極を中心とする半径 d の円が $q^2 = \pi/2 - d$ と表せることを示せ．
   (b) 単位球面の北極の回りの，半径 d の緯線に囲まれる北側の領域の面積が $2\pi(1-\cos d)$ であることを示せ．
   (c) 半径 R の球面の北極の回りの，半径 d の緯線に囲まれる北側の領域の面積が $2\pi R^2(1-\cos(d/R))$ であることを示せ．半径 d が半径 R に比べて小さいとき，この領域の面積が $\pi d^2 + O(d^4/R^2)$ となる理由を説明せよ．
3. 関数 $\theta = \arccos\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right)$ のグラフを $0 \le t \le \pi/2$ の範囲で描け．
4. 単位球面上の曲線 $q^2 = q^1$ ただし $0 \le q^1 \le \pi/2$ の長さを求めよ．
5. (a) 球面上の**斜航線** (loxodrome) とは，すべての緯線と (したがって経線とも) 同じ角の大きさで交わる曲線のことをいう．曲線

$$\mathbf{q}(t) = (t, \arcsin(\tanh t)), \qquad -\infty < t < \infty,$$

   が単位球面上の斜航線であることを示せ．注: q^1 は範囲 $[0, 2\pi]$ には限定されず，負の無限大から正の無限大までの値をとる．
   (b) この曲線 $\mathbf{q}$ が緯線と交わる角の大きさを求めよ．範囲 $0 \le t \le 3\pi$

について，曲線 $\mathbf{q}(t)$ を描け．

(c) 任意の指定された角で緯線と交わる斜航線の助変数表示を求めよ．

(d) 極点の近くでは，斜航線は対数(等角)らせんのように見える．3.2 節の練習問題 6 参照．曲線 $\mathbf{q}(t)$ のこの様子を $\pi \le t \le 4\pi$ で描け．北極から眺めて描くとよい．

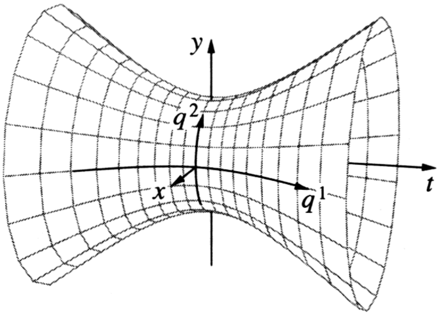
(e) 斜航線 $\mathbf{q}(t)$ の範囲 $-\infty < t < \infty$（すなわち南極から北極まで）の全長を求めよ．

5.3 ドジッター時空

曲がった時空の単純な例

ドジッター時空(de Sitter spacetime)[注1]は，おそらく，曲がった時空の中で，考えられる最も単純なものである．この時空は，$(1+4)$ 次元ミンコフスキ空間の中の空間的単位球面，すなわち，空間的単位ベクトル全体からなる集合として定義される．どのような集合であるかを具体的に見るために，時空が埋め込まれている $(1+4)$ 次元空間から $(1+2)$ 次元断面を取り出して，そこに現れているドジッター時空の断面を調べることにする．この解析の背後にあるより大きな目標は，この章で始めた，ユークリッド空間内の曲面の理論を，どのようにミンコフスキ空間に拡張したらよいかを明らかにすることである．

断面として現れる $(1+2)$ 次元ミンコフスキ空間の点を $\mathbb{X} = (t, x, y)$ としたとき，標準的な内積は $Q(\mathbb{X}) = t^2 - (x^2 + y^2)$ で与えられる．空間的単位ベクトル $\mathbb{X}$ とは，条件 $\|\mathbb{X}\|^2 = -Q(\mathbb{X}) = x^2 + y^2 - t^2 = 1$ を満たすようなものである．これらの点は，通常の $\mathbf{R}^3$ 内では **1 葉双曲面**(hyperboloid of one sheet)と呼ばれる曲面 S 上にある．



これがドジッター時空である．それは $(1+1)$ 次元であり，時間方向には過去にも未来にも限りなく伸びているが，空間方向には閉じて単なる円周になっている（しかし大きさは一定でなく，時間とともに，まず収縮し，次に膨張するようなものである）．これはまったく新しいタイプの時空である．空間方向に有限ではあるが，境界や “端” がない時空など想像もしていなかっただろう．観測者や物体が運動するときは，この円周に沿って運動する．したがって，観測者，あるいは光子が，向きを変えずに進んでいったら出発点に戻っ

[注1] 訳注：ドジッター宇宙(de Sitter universe)ドジッター空間(de Sitter space)などとも呼ばれる．原文中でも，これらの用語も使われている．

てきて，空間全体を“世界一周”するということが起きるかもしれないと考えられる．

ドジッター時空の助変数表示

この新しい時空を調べるために，まず助変数表示を作ろう．ミンコフスキ空間の中のドジッター時空は，ユークリッド空間の中の普通の球面に対応するものなので，前節 5.2 で球面に用いた助変数表示を修正して

$$\mathbb{X}(q^1, q^2) = (\sinh(q^1), \cosh(q^1)\cos(q^2), \cosh(q^1)\sin(q^2)),$$

ただし $-\infty < q^1 < \infty$, $-\pi \le q^2 \le \pi$ とすればよい．図の通り，q^1 が時間を，q^2 が位置を表す．

接空間の基底ベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_1 &= (\cosh(q^1), \sinh(q^1)\cos(q^2), \sinh(q^1)\sin(q^2)),\\ \mathbb{X}_2 &= (0, -\cosh(q^1)\sin(q^2), \cosh(q^1)\cos(q^2))\end{aligned}$$

で与えられる．計量テンソルの各成分は

$$\begin{aligned}g_{11} &= \mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_1 = \cosh^2(q^1) - \sinh^2(q^1)\cos^2(q^2) - \sinh^2(q^1)\sin^2(q^2) \equiv 1,\\ g_{12} &= \mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_2 = \sinh(q^1)\cosh(q^1)\cos(q^2)\sin(q^2)\\ &\qquad\qquad - \sinh(q^1)\cosh(q^1)\cos(q^2)\sin(q^2) \equiv 0,\\ g_{22} &= \mathbb{X}_2 \cdot \mathbb{X}_2 = -\cosh^2(q^1)\sin^2(q^2) - \cosh^2(q^1)\cos^2(q^2) = -\cosh^2(q^1)\end{aligned}$$

各接空間のミンコフスキ幾何

である．負の符号がこれらの表式に現れるのは，$(1+2)$ 次元のミンコフスキ内積を計算しているからである．計量テンソル g_{ij} の値からは，基底ベクトルを適当な定数倍に取り直すと，各接空間が $(1+1)$ 次元ミンコフスキ空間であることが読み取れる．2 つの基底ベクトル $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ は，ミンコフスキ的に直交し，$\mathbb{X}_1$ が未来時間的，$\mathbb{X}_2$ が空間的である．

接ベクトルが常に未来時間的ベクトルであるような曲線は適当な観測者の世界線と見なせることを，3.3 節で示した．ところが，ベクトル $\mathbb{X}_1$ は常に未来時間的なので，“横方向の”座標曲線 $q^2 =$ 定数 はみな世界線と見なせる．特に，観測者 G の世界線が q^1 軸であるとする．実際，q^1 は G の固有時間 τ であることが，計算

$$\tau(q^1) = \int_0^{q^1} \|\mathbb{X}_1\|\, dq^1 = \int_0^{q^1} 1 \cdot dq^1 = q^1$$

によりわかる．以下では，τ と q^1 を同じ意味に使う．

空間の半径

世界一周の問題を考えるのに，まず，空間の一周の長さを求めよう．時刻 τ において，

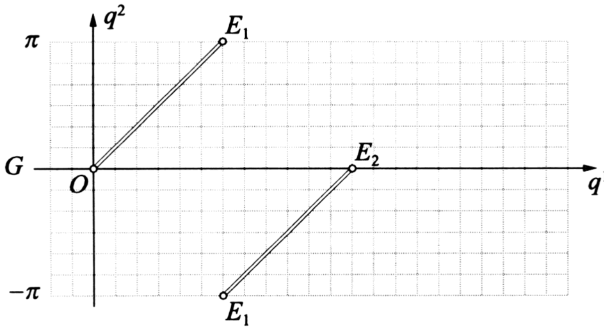
$$\text{周長} = \int_{-\pi}^{\pi} \|\mathbb{X}_2\|\, dq^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(\tau)\, dq^2 = 2\pi\cosh(\tau)$$

と求まる．(ベクトル $\mathbb{X}_2$ は**空間的**なので，$\|\mathbb{X}_2\| = \sqrt{-\mathbb{X}_2 \cdot \mathbb{X}_2} = +\cosh(q^1) > 0$ である．) したがって，時刻 τ における空間の**半径**は $\cosh(\tau)$ であると言ってもよいだろう．この半径は，$\tau > 0$ では，時間 τ とともに指数関数的に増大する．

光子は空間を一周できるか？

ここで，光子の世界一周を (q^1, q^2) 平面上で考えることにする．事象 O で

観測者 G が正の q^2 の向きに光子を発射し，後に事象 E_2 で同じ観測者 G が光子を観測したとしよう．そのような光子は，下の図のような世界線を持つことになる．事象 E_1 は世界線上に2回現れているが，これは，図が q^2 軸方向に“一巻き”するようになっているからに過ぎない．



このような
光子の世界線は
ありうるか？

各点の光円錐

しかし，実はこのような世界一周は起こらない．実際，これから，光子は円周の半分以上を移動することができないということを証明する．まず，各接空間上の光円錐は，計量テンソル

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cosh^2(q^1) \end{pmatrix}, \qquad g = -\cosh^2(q^1) \leq -1$$

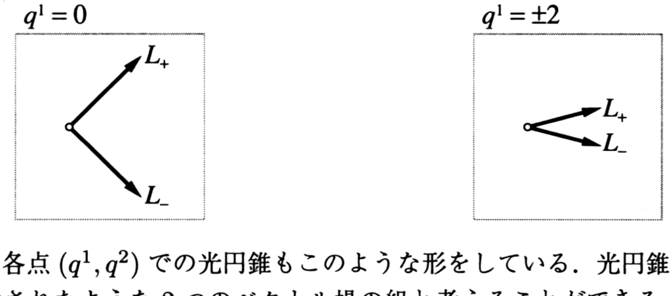
から定まる．この計量は，普通の平坦なミンコフスキ平面の見慣れた計量と，非常に似た特徴を持っている．実際，$q^1 = 0$ のときには，ミンコフスキ計量そのもの

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g = -1$$

になってしまう．次に，空間的ベクトルと時間的ベクトルを隔てる光的ベクトルは，点 (q^1, q^2) においては，

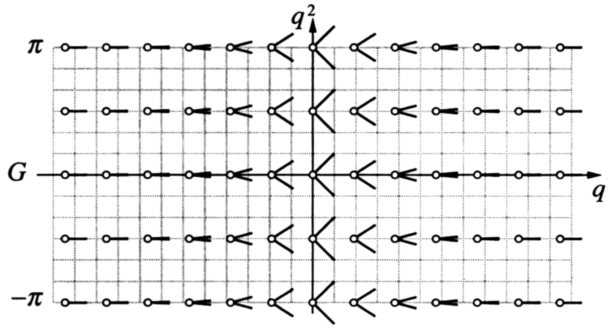
$$L_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\,\mathrm{sech}(q^1) \end{pmatrix}$$

の定数倍であることに注意しよう．したがって，L_+, L_- の傾きはそれぞれ $\pm\,\mathrm{sech}(q^1)$ であり，この傾きはどちらも，$|q^1|$ が増加するにつれて急速に0に近づく．



助変数空間の各点 (q^1, q^2) での光円錐もこのような形をしている．光円錐は，下の図で示されたような2つのベクトル場の組と考えることができる．

これらのベクトル場は，各点での光子の世界線の向きを示している．



世界線の満たす微分方程式

ここで，光子の世界線がある関数 $\varphi(\tau)$ の，(q^1, q^2) 平面でのグラフ $q^2 = \varphi(q^1)$ になっているとして，この関数 $\varphi(\tau)$ を求めよう．このグラフは，2つの‘光円錐ベクトル場’のどちらか一方に，いたるところで接している．説明を明確にするために，ここでは傾き $\mathrm{sech}(\tau)$ のほうのベクトル場 L_+ を考えることにすると，

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mathrm{sech}(\tau), \qquad q^2 = \varphi(\tau) = \int \mathrm{sech}(\tau)\, d\tau$$

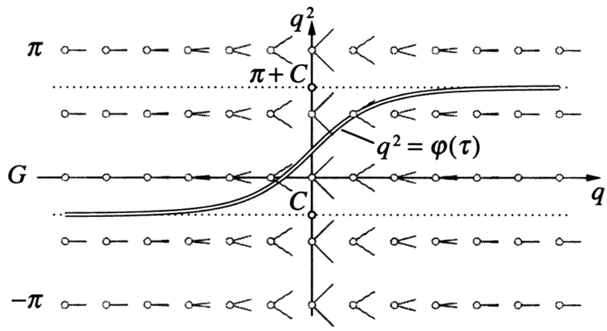
である．これを積分するために，被積分関数を

$$\mathrm{sech}(\tau) = \frac{2}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = \frac{2e^{\tau}}{e^{2\tau} + 1}$$

と変形して，変数変換 $u = e^{\tau}$, $du = e^{\tau}\, d\tau$ を行うと，

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \int \mathrm{sech}(\tau)\, d\tau = \int \frac{2e^{\tau}\, d\tau}{e^{2\tau}+1} \\ &= \int \frac{2\, du}{u^2+1} = 2\arctan(u) + C \\ &= 2\arctan(e^{\tau}) + C\end{aligned}$$

という結果を得る．この関数は，極限 $\tau \to -\infty$ では $e^{\tau} \to 0$ より $\varphi(\tau) \to C$ である．一方，極限 $\tau \to +\infty$ では $e^{\tau} \to +\infty$ より $\arctan(e^{\tau}) \to \pi/2$ で $\varphi(\tau) \to \pi + C$ となる．下の図では，これらのグラフ $q^2 = \varphi(\tau)$ のうちの1つが，ベクトル場と重ねて描かれている．他のグラフは，C の値に応じて，縦方向に平行移動したものになる．各グラフは，高さが π の，横方向にのびた帯の中に収まっている．



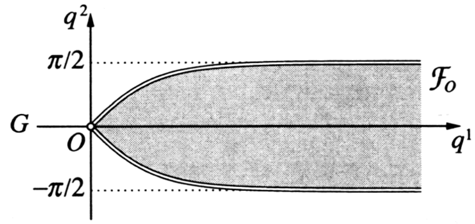
光子は円周を半周以上まわれない

練習問題4で，もう一方のベクトル場 L_- に接する世界線は，上で調べ

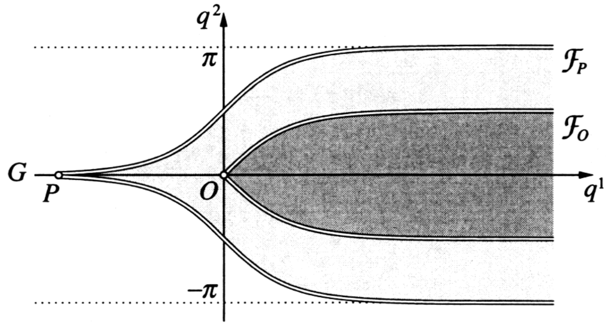
た L_+ に接する世界線を鏡映することによって得られることを示す．グラフ $q^2 = \varphi(\tau)$ の対称性から，2種類の鏡映 $\tau \mapsto -\tau$ と $q^2 \mapsto -q^2$ のどちらでも同じ結果になる．どの光子の世界線も，高さが $\Delta q^2 = \pi$ の，横方向にのびた帯の中に収まっているので，光子は円周を半周以上は回れないことになる．

未来集合 $\mathcal{F}$

事象 $O = (0, 0)$ を通過する2本の世界線が，事象 O の未来集合 $\mathcal{F}_O$ の境界になる．



集合 $\mathcal{F}_O$ は，観測者 G の $q^1 = 0$ 以降の行動が影響を与えられる事象からなる．したがって，G から見て円周の反対側あたりの点は，決して G の $q^1 = 0$ 以降の行動から影響を受けることはないということがわかる．しかし，G の世界線上で，より早い時刻に位置する事象 P の未来集合 $\mathcal{F}_P$ は，より遠くまで及んでいる．



このように，時間の経過とともに，G の "影響の地平線" は常に縮小していく．これに対して，G の世界線上の事象から見て**時間的過去**に位置する事象からなる集合から "視野の地平線" が決まるが，これは常に拡大していく．これについては練習問題5を参照のこと．

光の速さは定数

見たところ，光子の速度，つまり $q^2 = \varphi(\tau)$ の傾きは，極限 $\tau \to \infty$ で減少して0に近づくように思われる．しかし，これは誤りである．傾きが $\Delta q^2/\Delta q^1$ なのに対して速度は Δ距離$/\Delta$時間 である．確かに Δq^1 は経過時間に一致するが，Δq^2 のほうは距離には対応しない．光子の速度は，光的ベクトル

$$L_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\operatorname{sech}(\tau) \end{pmatrix} = \underset{\text{時間的}}{1 \cdot \mathbb{X}_1} \pm \underset{\text{空間的}}{\operatorname{sech}(\tau) \cdot \mathbb{X}_2}$$

の，空間的成分の時間的成分に対する比であるから，

$$\text{速度} = \frac{\pm\operatorname{sech}(\tau)\,\|\mathbb{X}_2\|}{\|\mathbb{X}_1\|} = \frac{\pm\operatorname{sech}(\tau)\cosh(\tau)}{1} = \pm 1$$

となる．結局のところ，ドジッター時空では，光の速さは定数 $c = 1$ である．光子の世界線が曲がって見えるのは，計量 g_{ij} の定める空間方向の距離が，見

慣れたユークリッド的距離と大きく異なっているためである．

光円錐の外部的幾何による解析

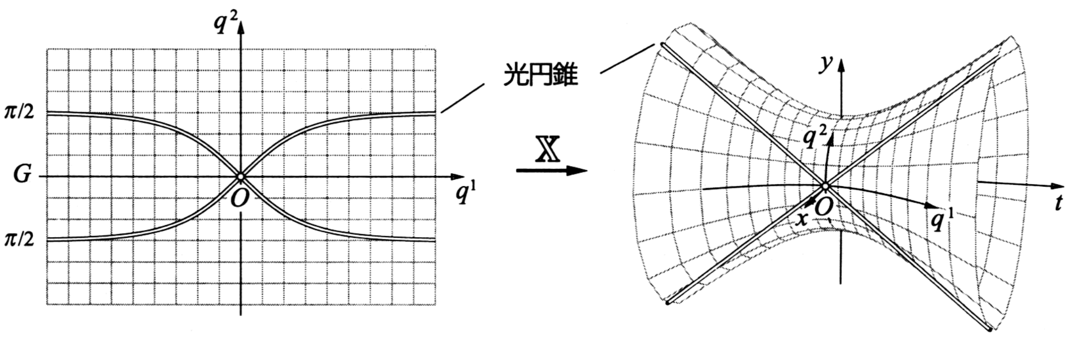
ドジッター時空の，(t,x,y) 空間への双曲面 S としての埋め込みに戻って考えると，上で調べた光円錐の性質を，ユークリッド/ミンコフスキ的直観から理解することが容易になる．まず，$O=(q^1,q^2)=(0,0)$ から発射された 2 つの光子の世界線を考えてみよう．それは，それぞれグラフ

$$q^2 = 2\arctan(e^\tau) - \pi/2,$$
$$q^2 = -2\arctan(e^\tau) + \pi/2$$

であることが確かめられる．この 2 つの式は，まとめて $q^2 = \pm 2\arctan(e^\tau) \mp \pi/2$ と表せる．これらの曲線の (t,x,y) 空間における助変数表示は，上の式と，曲面の助変数表示の写像 $\mathbb{X}$ とを合成して $\tau \mapsto \mathbb{X}(\tau, \pm 2\arctan(e^\tau) \mp \pi/2)$ を考えることにより，

$$t(\tau) = \sinh(\tau),$$
$$x(\tau) = \cosh(\tau)\cos\left(\pm 2\arctan(e^\tau) \mp \pi/2\right),$$
$$y(\tau) = \cosh(\tau)\sin\left(\pm 2\arctan(e^\tau) \mp \pi/2\right)$$

と求められる．以下で，これらの曲線が，実は直線であること，そして，これらの直線は双曲面と平面 $x=1$ との共通部分上にあること，さらに，平面 $x=1$ は，双曲面の O における接平面であることを見ていく．

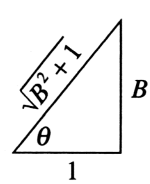


これらのことを証明するために，まず $x(\tau) \equiv 1$ を示す．そのために，$x(\tau)$ の表式に含まれる余弦関数の部分を簡単化しよう．関係

$$\cos(\pm A \mp \pi/2) = \pm\sin(\pm A) = \sin(A)$$

と，正弦関数の倍角公式とから，

$$\begin{aligned}\cos\left(\pm 2\arctan(e^\tau) \mp \pi/2\right) &= \sin\left(2\arctan(e^\tau)\right)\\ &= 2\sin\left(\arctan(e^\tau)\right)\cdot\cos\left(\arctan(e^\tau)\right)\end{aligned}$$



となる．ここで，$\sin(\arctan(B)) = B/\sqrt{B^2+1}$, $\cos(\arctan(B)) = 1/\sqrt{B^2+1}$ だから，もとの余弦関数の部分は，

$$\cos\left(\pm 2\arctan(e^\tau) \mp \pi/2\right) = \frac{2e^\tau}{e^{2\tau}+1} = \frac{2}{e^\tau + e^{-\tau}} = \frac{1}{\cosh(\tau)}$$

となる．結局，

$$x(\tau) = \cosh(\tau)\cos\left(\pm 2\arctan(e^{\tau}) \mp \pi/2\right) = \cosh(\tau)\cdot\frac{1}{\cosh(\tau)} \equiv 1$$

となり，求めていた結論が得られた．式 $x = 1$ は (t, x, y) 空間の中の平面を表すので，光円錐は，双曲面 S とこの平面との共通部分であることがわかった．さらに，$x = 1$ は S 上の 2 つの異なる曲線を含むので，この 2 つの曲線が交わる点における S の接平面にほかならない．

次に，$y(\tau) = \pm\sinh(\tau) = \pm t(\tau)$ を示す．これが示せれば，いま考えている曲線は，実は平面 $x = 1$ 上の直線 $y = \pm t$ であることがわかったことになる．証明は $x(\tau)$ についてのものと同様で，

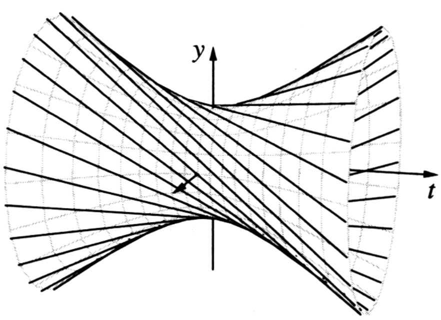
$$\begin{aligned}
\sin\left(\pm 2\arctan(e^{\tau}) \mp \pi/2\right) &= \mp\cos\left(2\arctan(e^{\tau})\right) \\
&= \mp\left(\cos^2\left(\arctan(e^{\tau})\right) - \sin^2\left(\arctan(e^{\tau})\right)\right) \\
&= \mp\left(\frac{1}{e^{2\tau}+1} - \frac{e^{2\tau}}{e^{2\tau}+1}\right) \\
&= \pm\frac{e^{2\tau}-1}{e^{2\tau}+1} = \pm\tanh(\tau)
\end{aligned}$$

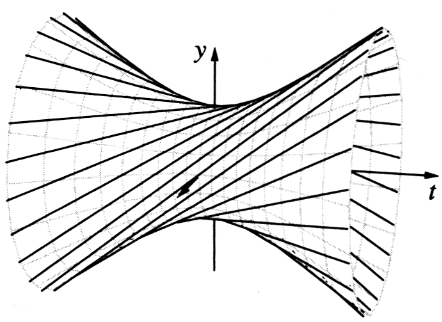
を用いる．よって，$y(\tau) = \cosh(\tau)\cdot\pm\tanh(\tau) = \pm\sinh(\tau) = \pm t(\tau)$ となる．すなわち，平面 $x = 1$ 上では，通常のミンコフスキ空間での光子の世界線と似た，傾き ± 1 の直線である．

光子は双曲面の片側にとどまる

双曲面 S 上の光円錐の形から，光子が空間を一周できない理由は明らかである．仮に光子が双曲面を一周するなら，その世界線は，どこかで x が負にならなければならない．しかし，世界線は平面 $x = 1$ の外に逃れることはできないのである．

上の最後の記述からも明らかなように，これまでは，光円錐を事象 O でだけ考えていたのだった．しかし，双曲面の持つ特徴を使えば，他の事象における光円錐も直ちに求めることができる．第一段階として，双曲面は，曲がっているにも関わらず，上で見たように，2 本の直線をその中に埋め込むことができることに注意しよう．さらに，双曲面は t 軸の回りの回転対称性を持つので，この 2 本の直線は，t 軸の回りに任意の角だけ回転したとしてもやはり S に含まれている．下の図からわかるように，2 本のうちの 1 本だけを使ったとしても，その直線を 1 回転させれば，双曲面全体が覆われる．





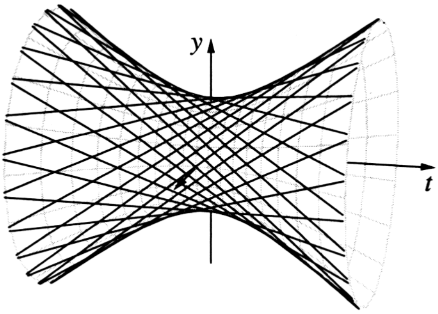
双曲面は 2 重線織面

このような性質を持つ直線を，曲面の**母線**(generator)といい，そのような直線の族を**線織**(ruling)，こうして作られる曲面を**線織曲面**(ruled surface)とい

う．双曲面は，2つの異なる線織を持つので，2重線織曲面と呼ぶことができるだろう．

双曲面の2つの線織はそれぞれ，ドジッター時空の各点を通る光子の世界線を決めている．すなわち，各点における光円錐を決めており，下の図からわかるように，光円錐をなす2つの直線のなす角は，$|t|$ が増加するとき，つまり双曲面のくびれの部分から離れるにつれ減少する．

線織から光円錐が決まる



どの世界線も直線なので，世界線が双曲面を一回りするということは起こりえない．したがって，ドジッター時空の一部である円周状の空間を一周するということは起こりえない．また，空間の広がりが有限でありながら，任意の時点での一人の観測者が影響を及ぼしたり観測したりできる範囲は空間全体には及ばないということも，光円錐の並び方から理解できる．

なお，ここでは空間が1次元の円周 $x^2+y^2=1$ だったが，これは，ドジッター時空の2次元断面だけに着目していたからである．4次元のドジッター時空 U は，$(1+4)$ 次元ミンコフスキ空間の空間的単位ベクトル $\mathbb{X}=(t,x,y,z,w)$ の集合である．すなわち，U は式

$$-Q(\mathbb{X}) = x^2+y^2+z^2+w^2-t^2 = 1$$

で定義される．空間 U の中で考えると，空間は3次元球面 $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ となる．

練習問題

1. (a) 本文で用いたドジッター時空の助変数表示 $\mathbb{X}$ について，$\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2 = \cosh(q^1)\,\mathbb{X}$ が成立することを示せ．
   (b) ミンコフスキノルムに関して，$(\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2)\perp\mathbb{X}_1$ と $(\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2)\perp\mathbb{X}_2$ が成立することを示せ．
   (c) 面積拡大率が $\|\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2\| = \sqrt{-g} = \cosh q^1$ で与えられることを示せ．
2. (a) 双曲面

$$\mathbf{x}(q^1,q^2) = (\sinh(q^1), \cosh(q^1)\cos(q^2), \cosh(q^1)\sin(q^2))$$

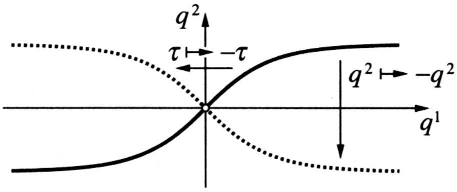
の，ミンコフスキ空間でなく**ユークリッド空間**への埋め込みを考える．このときに，$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2$, g_{ij}, $\sqrt{g}$ を計算せよ．この場合にも，座標曲線は互いに直交しているか？

(b) この場合にも，$\mathbf{q}(t) = (t, 2\arctan(e^t) - \pi/2)$ は，3次元空間の直線であり，曲面に含まれるである．この直線上での法線ベクトル $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)/\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|$ を求めよ．特に，この直線上で法線ベクトル $\mathbf{n}$ が一定でないことを示せ．

(c) 双曲面上の特徴的な点をいくつか選んで，上で求めたユークリッド空間の中にある場合の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と，ミンコフスキ空間の中にある場合の法線ベクトル $\mathbb{N} = (\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)/\|\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2\|$ を描け．外積 $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ は練習問題1で計算してある．これら2種類の法線ベクトルを，特に $|t|$ が大きい部分で比較せよ．

3. 3角関数の恒等式 $\cos(\pm A \mp \pi/2) = \sin(A)$ および $\sin(\pm A \mp \pi/2) = \mp\cos(A)$ を証明せよ．

4. (a) 曲線 $q^2 = 2\arctan(e^\tau) - \pi/2$ に対して，変換 $\tau \mapsto -\tau$ と変換 $q^2 \mapsto -q^2$ が同じ効果を持つことを示せ．



(b) 任意の定数 C に対して，世界線 $q^2 = 2\arctan(e^\tau) + C$ を q^2 軸に関して競映したものは，いたるところベクトル場 L_- に接していて，光子の世界線と見なせることを示せ．

5. 世界線 G 上のいろいろな事象について，**時間的過去**集合を示し，G の固有時間の大きい事象の集合ほど，円の大きい範囲を覆い，その範囲がいくらでも円全体に近づいていくことを示せ．

5.4　曲面の曲率

曲線の曲率の別の同値な定義

弧長による助変数表示は等長写像

曲面の曲率を定義するのに，曲線の曲率から類推するというのは自然な考えである．曲線の曲率の基本的な考え方はそう難しいものではない．曲率とは，その点における曲線の方向の変化率である．そして，この考えをあいまいさのない定義にするために弧長による助変数表示 $\mathbf{y} : [0, L] \ni s \mapsto \mathbf{y}(s) \in \mathbf{R}^n$ を導入したのだった．しかし，$\mathbf{y}$ という助変数表示は，助変数表示の中で非常に特別なものである．それは距離を保つ．すなわち，s_1，s_2 を $[0, L]$ の2点とすると，2点 $\mathbf{y}(s_1)$，$\mathbf{y}(s_2)$ の間の**曲線**に沿って測った距離は，$[0, L]$ 上の2点 s_1，s_2 の間の距離，つまり $\Delta s = s_2 - s_1$ とちょうど一致する．この写像 $\mathbf{y}$ のように，距離を保つ写像を**等長写像**(isometry)と呼ぶ．

曲面の助変数表示は等長写像とは限らない

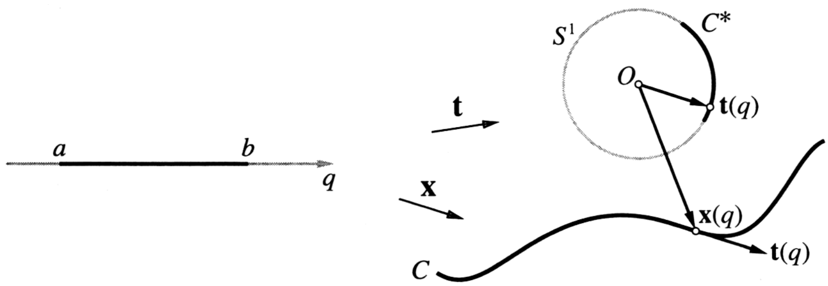
しかし，曲面の場合には事情が異なる．平面から曲面への写像は距離を歪めてしまうのだった．つまり，曲面を等長写像で助変数表示するのは無理である．したがって，曲面の曲率を定義するのに，曲線の曲率を参考にしようとするなら，まず曲線の場合にもどって，曲面の場合に拡張できるような，異

なる，しかし同値な定義を見つけなければならない．

これはそう難しいことではない．簡単のために，話を $\mathbf{R}^2$ 上の曲線 C に限ろう．まず，C の任意の滑らかな助変数表示 $\mathbf{x}:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ が与えられたとする．いつもと同じように $\mathbf{x}$ には特異点がないと仮定する．つまり $\mathbf{x}'(q_0)=\mathbf{0}$ となるような点 q_0 は存在しないとする．曲線 C の，点 $\mathbf{x}(q)$ における**向き**は，単位接ベクトル

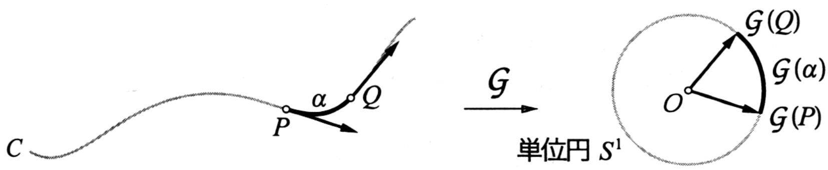
$$\mathbf{t}(q)=\frac{\mathbf{x}'(q)}{\|\mathbf{x}'(q)\|}$$

で与えられる．普通は，接ベクトル $\mathbf{t}(q)$ は，絵を描くときには，その始点を接点 $\mathbf{x}(q)$ と一致させて描かれる．しかし，すべての接ベクトルの始点を原点 O において描くと，$\mathbf{t}(q)$ は，別の曲線 C^* の助変数表示 $\mathbf{t}:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ と見なせる．ここで，曲線 C^* は単位円 S^1 に含まれることになる． **単位接ベクトルの助変数表示**



一般には，写像 $\mathbf{x}$ に特異点がないとしても，$\mathbf{t}$ は特異点を持つことがある．例えば，C の変曲点では，C^* はいったん止まって逆戻りするような特異点を持つ．上の図の場合には，そのような $\mathbf{t}$ の特異点が 3 つあることに注意しよう．このことは練習問題 2 で詳しく調べる．ここまで来ると，曲線の曲率の，**ガウス写像**(Gauss map)，すなわち，曲線上の各点に，接ベクトルを S^1 上の点と見なして対応させる写像を用いた定義を与えることができる．

定義 5.2 平面上の曲線 C の助変数表示を $\mathbf{x}:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ とする．**ガウス写像**(Gauss map) $\mathcal{G}:C\to S^1$ とは，点 $P=\mathbf{x}(q)$ に対して，P における単位接ベクトル $\mathcal{G}(P)=\mathbf{t}(q)=\mathbf{x}'(q)/\|\mathbf{x}'(q)\|$ を対応させる写像である． **曲線のガウス写像**



定義 5.3 曲線 C の点 P における**曲率**(curvature)を

$$\kappa(P)=\lim_{\alpha\downarrow P}\frac{\mathcal{G}(\alpha)\text{ の長さ}}{\alpha\text{ の長さ}}$$

と定義する．[注2] また，極限は，P を含むすべての区間 α を考えて，その区間

注2 訳注：ここでいう $\mathcal{G}(\alpha)$ の長さとは，個々のベクトルの長さではなく，曲線 $\mathcal{G}(\alpha)$ は，円周の一部分であるが，その，曲線としての長さのことである．

α の長さが 0 に近づく極限である．

正確には，C の各点には，互いに反対向きの **2 つの**単位接ベクトルがある．写像 $\mathbf{x}$ を用いると，2 つの可能性とは $\pm\mathbf{t} = \pm\mathbf{x}'/\|\mathbf{x}'\|$ である．したがって，α を C の任意の区間とすると，対応する S^1 に含まれる曲線 $\mathcal{G}(\alpha)$ にも 2 つの可能性があることになるが，この 2 つはちょうど対蹠の関係にあり，長さは等しい．したがって，最終的には曲率 $\kappa(P)$ の定義は単位接ベクトルの選び方にはよらない．

定理 5.2 $P = \mathbf{x}(u)$ とすると $\kappa(P) = \dfrac{\|\mathbf{t}'(u)\|}{\|\mathbf{x}'(u)\|}$ である．

証明：定義から

$$\kappa(P) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathbf{t}\text{ の } u-\epsilon \text{ から } u+\epsilon \text{ までの長さ}}{\mathbf{x}\text{ の } u-\epsilon \text{ から } u+\epsilon \text{ までの長さ}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_{u-\epsilon}^{u+\epsilon} \|\mathbf{t}'(q)\|\,dq}{\displaystyle\int_{u-\epsilon}^{u+\epsilon} \|\mathbf{x}'(q)\|\,dq}.$$

平均値の定理の積分形から，2 つの積分はそれぞれ，積分区間の長さ（今の場合 2ϵ）と，適当な点における被積分関数の値の積で置き換えることができる．つまり，2 つの数 $\theta_1, \theta_2 \in (-1, 1)$ があって，

$$\int_{u-\epsilon}^{u+\epsilon} \|\mathbf{t}'(q)\|\,dq = 2\epsilon\cdot\|\mathbf{t}'(u+\theta_1\epsilon)\|, \quad \int_{u-\epsilon}^{u+\epsilon} \|\mathbf{x}'(q)\|\,dq = 2\epsilon\cdot\|\mathbf{x}'(u+\theta_2\epsilon)\|$$

となる．したがって，

$$\kappa(P) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2\epsilon\cdot\|\mathbf{t}'(u+\theta_1\epsilon)\|}{2\epsilon\cdot\|\mathbf{x}'(u+\theta_2\epsilon)\|} = \frac{\|\mathbf{t}'(u)\|}{\|\mathbf{x}'(u)\|}.$$

証明終

系 5.2 $\kappa(P) = \sqrt{\dfrac{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')(\mathbf{x}''\cdot\mathbf{x}'') - (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'')^2}{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')^3}}$.

証明：練習問題 1 参照．

2 つの定義は同値

この定理と系によって，曲線の任意の助変数表示から曲率を直接計算することが可能になった．ところで，弧長による助変数表示 $\mathbf{y}(s)$ を用いると，単位接ベクトル $\mathbf{t}$ は $\mathbf{y}'(s) = \mathbf{u}(s)$ となり，その微分 $\mathbf{t}'$ は $\mathbf{u}'(s) = \mathbf{k}(s)$ となる．したがって，

$$\kappa(P) = \frac{\|\mathbf{u}'(s)\|}{\|\mathbf{y}'(s)\|} = \|\mathbf{k}(s)\|$$

であり，3.2 節のもともとの定義と一致することがわかる．曲率の 2 つの定義は同値である．

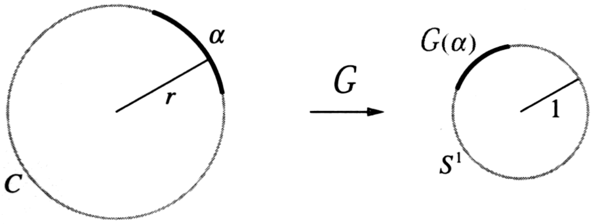
値 $\|\mathbf{x}'(u)\|$ は，u における写像 $\mathbf{x}$ の**長さ拡大率**なので，曲率は

$$\kappa(P) = \frac{\mathbf{t}\text{ の長さ拡大率}}{\mathbf{x}\text{ の長さ拡大率}}$$

とも解釈できる．

例

曲線の例として，特に直線 C を考える．このとき，$\mathcal{G}(C)$ は1点となり，任意の区間 α について弧 $\mathcal{G}(\alpha)$ の長さは0であり，C の各点で $\kappa(P)=0$ となる．また，別の例として，C が半径 r の円周である場合を考える．円周 C 上の弧 α と，その像 $\mathcal{G}(\alpha)$ はユークリッド幾何の意味で相似である．さらに，C 上の区間は，単位円 S^1 上の区間の r 倍の長さを持つので



$$\frac{\mathcal{G}(\alpha)\text{ の長さ}}{\alpha\text{ の長さ}}=\frac{1}{r}$$

となる．したがって，C 上の各点 P で $\kappa(P)=1/r$ となり，円の曲率はその半径の逆数となる．

ガウス曲率

曲面の方向は法線で与えられる

ここでの目的は，曲面の曲率を，曲面の向きの変化率として定義することである．しかし，ある点での曲面の向きを記述するにはどうすればよいだろうか？曲線の場合には，**接線**の向きを用いた．この向きは，単位接ベクトルという1個のベクトルで指定することができた．なぜなら，1点におけるすべての接ベクトル全体は1直線上にあったからである．一方，1点における曲面の接ベクトル全体は，直線でなく平面をなす．平面は2次元であり，1個の接ベクトルでその向きを表すことはできない．しかし，$\mathbf{R}^3$ 内の任意の平面の場合，法線の向きは1つに定まり，1次元である．したがって1個のベクトルで指定することができる．そこで，単位法線ベクトルを，ある点での曲面の向きを定義するのに使うことにする．

ガウス写像

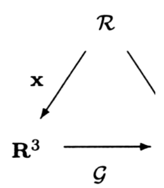
この考え方を用いて，助変数表示 $\mathbf{x}:\mathcal{R}\to\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{x}:(q^1,q^2)=\mathbf{q}\mapsto(x(\mathbf{q}),y(\mathbf{q}),z(\mathbf{q}))$$

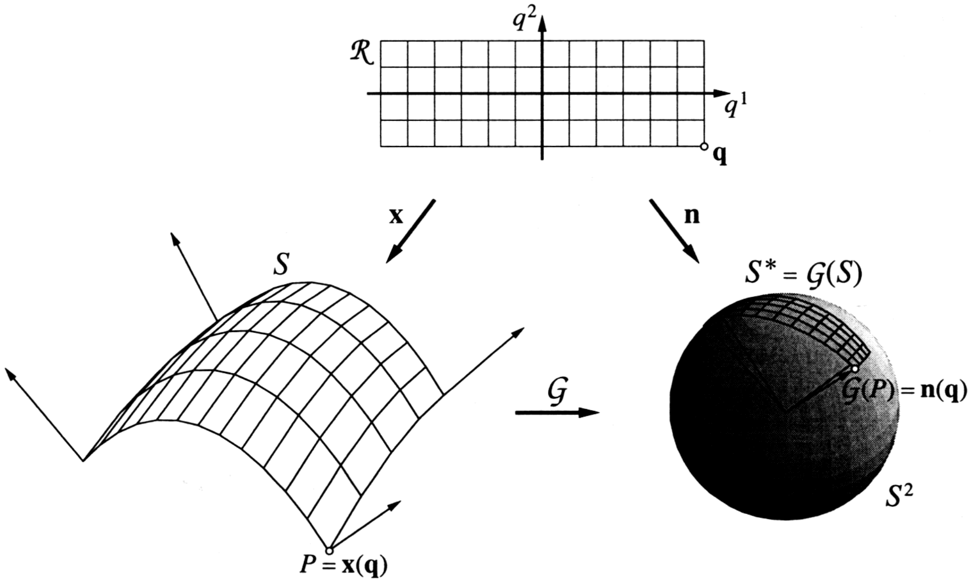
で与えられる曲面 S のガウス写像を定義しよう．助変数表示 $\mathbf{x}$ が非特異であることは仮定しているので，法線ベクトル $\mathbf{x}_1(\mathbf{q})\times\mathbf{x}_2(\mathbf{q})$ は曲面上の各点 $\mathbf{q}$ でゼロでないベクトルとなり，したがって単位法線ベクトルが

$$\mathbf{n}(\mathbf{q})=\frac{\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2\|}$$

で定義される．単位法線ベクトルは球面 S^2 上の点を指す．実際，$\mathbf{n}:\mathcal{R}\to S^2$ は，それ自身がまた，S^2 に含まれる曲面 S^* の助変数表示と見なせる．



定義 5.4 曲面 S が助変数表示 $\mathbf{x}:\mathcal{R}\to\mathbf{R}^3$ で与えられるとする．**ガウス写像** $\mathcal{G}:S\to S^2$ は，点 $P=\mathbf{x}(\mathbf{q})$ に対して，P における単位法線ベクトル $\mathcal{G}(P)=\mathbf{n}(\mathbf{q})$ を対応させ，次の図式を可換にするようなものである．



ガウス写像の像の相対的大きさ

上の図は，曲面 S とそのガウス写像による像 $S^* = \mathcal{G}(S)$ の関係の典型的な例を示している．曲面 S は，1つの方向に比べて，もう1つの方向により鋭く曲がっていることに注意しよう．具体的には，S の法線は，S 上を q^1 方向に動くと大きく変化するが，q^2 方向に動いてもそれほど変化しない．これは，S^* が，q^1 方向には球面上の広い範囲を覆うが，q^2 方向には圧縮されていることを意味する．これは，たとえ $\mathcal{R}$ を $\mathbf{x}$ で S に写したときに q^2 方向に拡大されているかどうかとは無関係である．おおざっぱに言うと，曲面上の領域が鋭く曲がっているほど，もとの領域の大きさに比べてガウス写像の像は大きくなる．

定義 5.5　曲面 S の点 P における**曲率あるいはガウス曲率**(Gaussian curvature) とは

$$K(P) = \lim_{\Omega \downarrow P} \frac{\mathcal{G}(\Omega)\text{ の面積}}{\Omega\text{ の面積}}$$

である．ただし，極限は，P を含む S のすべての領域 Ω で，Ω の直径が 0 に近づく極限である．領域の**直径**(diameter) とは，領域の任意の2点の距離の上限である．

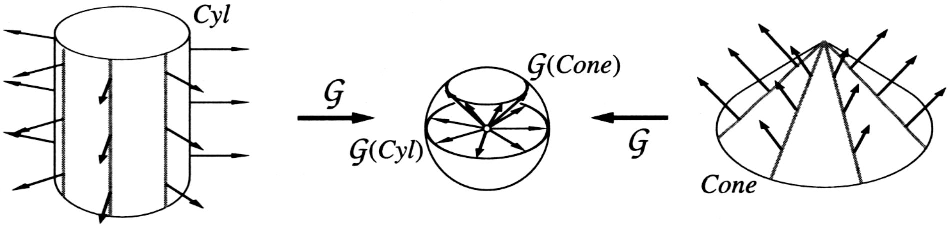
平面と球面

曲面 S が特に平面である場合，像 $\mathcal{G}(S)$ は S^2 上の1点となり，面積は0である．したがって，S 上の各点 P で $K(P) = 0$ となるが，これはまさに期待した通りの結果である．また，曲面 S が半径 r の球面であるとすると，Ω と像 $\mathcal{G}(\Omega)$ は相似になる．曲面 S 上の長さは，単位球面 S^2 上の長さの r 倍になるので，

$$\frac{\mathcal{G}(\Omega)\text{ の面積}}{\Omega\text{ の面積}} = \frac{1}{r^2}$$

と，Ω に依存しない一定の比になる．したがって，S 上の各点 P で $K(P) =$

$1/r^2$ となる．すなわち，ひとつの球面上では曲率は一定であり，球面の半径が大きいほど，曲率は小さい．



円柱と円錐

おそらく，もっと意外な結果は円柱 Cyl と円錐 $Cone$ の場合だろう．円柱や円錐の 1 つの母線上では，すべての法線ベクトルは互いに平行なので，1 つの母線上の点は，ガウス写像で，同一の点に写る．異なる母線上の点はそれぞれ異なる像を持つが，それでも値域の S^2 上の 1 次元的な円周を覆うだけである．したがって，$\mathrm{area}\,\mathcal{G}(Cyl) = \mathrm{area}\,\mathcal{G}(Cone) = 0$ であり，これらの曲面上では，各点 P で $K(P) = 0$ となる．

定理 5.3 曲面 S の助変数表示を $\mathbf{x}$ とする．曲面 S 上の 1 点 $P = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ において，曲率は

$$K(P) = \frac{\|\mathbf{n}_1(\mathbf{q}) \times \mathbf{n}_2(\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{x}_1(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_2(\mathbf{q})\|}$$

とも表せる．ただし，$\mathbf{n}_1(\mathbf{q}), \mathbf{n}_2(\mathbf{q})$ は，$\mathbf{x}_1(\mathbf{q}), \mathbf{x}_2(\mathbf{q})$ 同様に，$\mathbf{n}$ を曲面の助変数表示と見なしたときの，$\mathbf{q}$ における，q^1, q^2 方向の偏微分である．

証明： この定理は曲線に対する定理 5.2 と対応しており，したがって証明も対応したものになる．助変数平面 $\mathcal{R}$ の領域 D_ϵ を，中心が $\mathbf{q}$，一辺の長さが 2ϵ の正方形とする．このとき，$\Omega_\epsilon = \mathbf{x}(D_\epsilon)$ は，P を含む S の領域で，$\mathcal{G}(\Omega_\epsilon) = \mathbf{n}(D_\epsilon)$ がそのガウス写像による像である．したがって，

$$K(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathcal{G}(\Omega_\epsilon)\ \text{の面積}}{\Omega_\epsilon\ \text{の面積}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\displaystyle\iint_{D_\epsilon} \|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\|\, dq^1 dq^2}{\displaystyle\iint_{D_\epsilon} \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|\, dq^1 dq^2}$$

となる．2 重積分に対する平均値の定理より，2 つの積分は，それぞれ，D_ϵ の面積と，D_ϵ の内部の適当な点における被積分関数の値との積に等しい．したがって，D_ϵ の適当な点 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ に対して，

$$K(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{4\epsilon^2 \|\mathbf{n}_1(\mathbf{q}_1) \times \mathbf{n}_2(\mathbf{q}_1)\|}{4\epsilon^2 \|\mathbf{x}_1(\mathbf{q}_2) \times \mathbf{x}_2(\mathbf{q}_2)\|}$$

が成立する．極限 $\epsilon \to 0$ で，正方形 D_ϵ は一点 $\mathbf{q}$ となるので，$\mathbf{q}_1 \to \mathbf{q}, \mathbf{q}_2 \to \mathbf{q}$ となる．これにより，定理が導かれる． **証明終**

K は向きづけられた面積の比

この定理は，ガウス曲率 $K(P)$ を，2 つの平行 4 辺形の面積から計算する具体的な方法

$$K(P) = \frac{\mathrm{area}\,\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2}{\mathrm{area}\,\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}$$

を与える．この2つの平行4辺形は，異なる接平面($\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ は TS_P,$\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2$ は $T\mathcal{G}(S)_{\mathcal{G}(P)}$)に属するが，実は，2つの平面は平行である．このことは，次の命題で示される．この結果，5.1節で行ったのと同じように，2つの平行4辺形の向きを比べることが可能になり，ガウス曲率を**向きづけられた**面積を用いて解釈し直すことができる．向きづけられた面積は，負の値もとれるので，ガウス曲率は，正の値ばかりでなく，負の値もとれるということになる．

命題 5.4 $\mathcal{R}$ の各点 $\mathbf{q}$ で，ベクトル $\mathbf{n}_1(\mathbf{q})$ と $\mathbf{n}_2(\mathbf{q})$ は，ベクトル $\mathbf{x}_1(\mathbf{q})$ と $\mathbf{x}_2(\mathbf{q})$ によって張られる接平面 $TS_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}$ に属する．

証明： 法線ベクトル $\mathbf{n}$ は，ベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ によって張られる平面に垂直なので，関係 $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}$ および $\mathbf{n}_2 \perp \mathbf{n}$ を示せば十分である．定義から $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ なので，両辺を微分して次を得る．

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i} = 2\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n} = 0.$$

証明終

$\mathbf{n}_1$ と $\mathbf{n}_2$ を $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ で表す

この命題から，各点 $\mathbf{q}$ において，$\mathbf{n}_1(\mathbf{q})$ と $\mathbf{n}_2(\mathbf{q})$ は，基底ベクトル $\mathbf{x}_1(\mathbf{q})$, $\mathbf{x}_2(\mathbf{q})$ の線型結合として表せることがわかる．したがって，この基底での $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ の座標となるスカラー関数 $-b^i_j(\mathbf{q})$ が存在する．この関数 $-b^i_j(\mathbf{q})$ は，

$$\mathbf{n}_1 = -b^1_1\mathbf{x}_1 - b^2_1\mathbf{x}_2, \qquad \mathbf{n}_2 = -b^1_2\mathbf{x}_1 - b^2_2\mathbf{x}_2,$$

あるいは，和の規約を用いて $\mathbf{n}_j = -b^i_j\mathbf{x}_i$ ただし $j = 1, 2$ を満たす．負の符号をつけておいた理由は次の節で明らかになるだろう．平行4辺形 $\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2$ を $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ と関係づけるには，基底 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ のもとでの $\mathbf{n}_1$ と $\mathbf{n}_2$ の座標を列ベクトルとする行列

$$\widetilde{B}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -b^1_1 & -b^1_2 \\ -b^2_1 & -b^2_2 \end{pmatrix}$$

を用いる．面積の間の関係は，命題5.3で与えられていて，

$$\operatorname{area}\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2 = \det\widetilde{B}\cdot\operatorname{area}\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = \det\widetilde{B}\sqrt{g}$$

である．ただし，$g = \det g_{ij}$ である．なお，行列 $\widetilde{B}$ は偶数次元なので，$\det(-\widetilde{B}) = \det\widetilde{B}$ であることに注意しよう．

ここでついに，$K(P)$ が2つの**向きづけられた**平行4辺形の面積の比として表す形に定理を述べ直すことができる．

定理 5.4 $K(P) = \dfrac{\operatorname{area}\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2}{\operatorname{area}\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2} = \det\widetilde{B} = b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2.$

S^* 上の向きづけられた面積

向きづけられた面積の考えは，さらに，曲面 S, $S^* = \mathcal{G}(S)$ 上の領域に対しても自然に適用できる．曲面 S 上の任意の領域 Ω を考え，$\Omega = \mathbf{x}(D)$ であるとしよう．すると，

$$\operatorname{area}\Omega = \iint_D \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|\,dq^1dq^2 = \iint_D \sqrt{g}\,dq^1dq^2 \geq 0$$

である．これまでは，ガウス写像による像 $\mathcal{G}(\Omega) = \mathbf{n}(D)$ の面積を

$$\operatorname{area} \mathcal{G}(\Omega) = \iint_D \|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\| \, dq^1 dq^2 \geq 0$$

で計算していた．この方法では，被積分関数 $\|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\|$ 自体が非負なので，面積が負になることはない．しかし，この被積分関数は平行 4 辺形 $\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2$ の向きづけなしの面積である．これを向きづけられた面積

$$\operatorname{area} \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2 = \det \widetilde{B} \sqrt{g},$$

に置き換えると，

$$\operatorname{area} \mathcal{G}(\Omega) = \iint_D \det \widetilde{B} \sqrt{g} \, dq^1 dq^2$$

となる．こうすると，もちろん $\mathcal{G}(\Omega)$ の面積は負に**なりうる**．この新しい定義は，領域 Ω と $\mathcal{G}(\Omega)$ の相対的な向きを比較できるために可能になったのである．面積 $\operatorname{area} \mathcal{G}(\Omega)$ はガウス写像 $\mathcal{G}$ が向きを逆にするとき，そしてそのときに限って負になる．

負曲率: 1 つの例

鞍部は負曲率

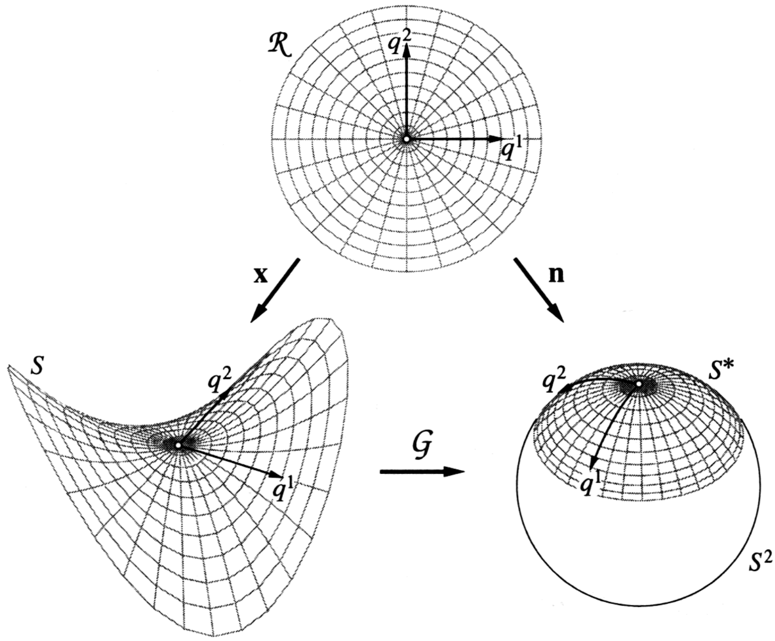
曲面がどのようにして負曲率を持つのか，どのようにしてガウス写像が向きを逆にする写像になるのかを理解するために，1 つの例を詳細に調べてみることにしよう．関数 $z = xy$ のグラフ S を考える．これは鞍型の曲面で，

$$x = q^1, \qquad y = q^2, \qquad z = q^1 q^2$$

と助変数表示される．単位法線ベクトル写像 $\mathbf{n}$ は回転対称性を持つのだが，このことは，(q^1, q^2) 平面の極座標 $q^1 = r\cos\theta$, $q^2 = r\sin\theta$ を用いると明らかになる．座標 r, θ による助変数表示は

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \tfrac{1}{2}r^2 \sin 2\theta\right)$$

である．



曲率 $K(P)$ を計算する前に，まず S の形を調べてみよう．一方向(この場合は第1, 第3象限)では上方向に曲がり，もう一方向では下方向に曲がっている．このような曲がり方が，負曲率の曲面の特徴である．

$\mathcal{G}: S \to S^*$ は向きづけを逆にする

次に，S と S^* の向きづけを比べよう．上から見て，q^1 軸を q^2 軸に鋭角で回すことを考えると，S 上では反時計回りに，S^* 上では時計回りに配置されている．特に，S の正の q^1 軸上の法線ベクトルはだいたい前向き(読者の左肩の上あたりを越える向き)であり，ベクトルの終点が，図に示されている S^* の正の q^1 軸上に並ぶようになっていることを納得しよう．同様に，S の正の q^2 軸上の法線ベクトルは，だいたい左向きで，その終点は図に描かれた S^* の正の q^2 軸上に来る．このように，写像 $\mathcal{G}$ が面の向きを逆にすることも，負の曲率を持つ曲面の特徴である．

最後に，この例の単位法線ベクトル写像 $\mathbf{n}: \mathcal{R} \to S^2$ の持つ特別な対称性に注目しよう．定義域 $\mathcal{R}$ の同心円は，この写像で，S^2 の同心円に写る．ただし，その間隔は写像で保たれない．座標 r が増加するにつれ，同心円はだんだんと密に配置されるようになってくる．以下では，写像 $\mathbf{n}$ が (q^1, q^2) 平面全体を値域 S^2 の上半球に圧縮して写すことを確かめる．

$K(P)$ の計算

では，$K(P)$ の計算を始めよう．ここでは和の規約は特に助けにならないので，添え字を数字にすることはやめて，添え字 r, θ を偏微分を表すのに使うことにする．まず，

$$\mathbf{x}_r = \left(\cos\theta, \sin\theta, r\sin 2\theta\right), \qquad \mathbf{x}_\theta = \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, r^2\cos 2\theta\right),$$
$$\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\theta = \left(-r^2\sin\theta, -r^2\cos\theta, r\right)$$

である．したがって，$g = \|\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\theta\|^2 = r^2(1+r^2)$ なので，$\mathbf{x}$ が非特異な $r > 0$ に限って考えることにする．ここで $\Delta = \sqrt{g}/r = \sqrt{1+r^2}$ とおくと，

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\Delta}\left(-r\sin\theta, -r\cos\theta, 1\right),$$

$$\mathbf{n}_r = -\frac{1}{\Delta^3}\left(\sin\theta, \cos\theta, r\right), \qquad \mathbf{n}_\theta = \frac{r}{\Delta}\left(-\cos\theta, \sin\theta, 0\right)$$

となる．命題 5.4 から，$\mathbf{n}_r$ と $\mathbf{n}_\theta$ を基底 $\mathbf{x}_r$, $\mathbf{x}_\theta$ を用いて書くことができる．実際，

$$\mathbf{n}_r = -\frac{\sin 2\theta}{\Delta^3}\,\mathbf{x}_r - \frac{\cos 2\theta}{r\Delta^3}\,\mathbf{x}_\theta, \qquad \mathbf{n}_\theta = -\frac{r\cos 2\theta}{\Delta}\,\mathbf{x}_r + \frac{\sin 2\theta}{\Delta}\,\mathbf{x}_\theta$$

であることが確かめられる．したがって，

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2\theta}{\Delta^3} & \dfrac{r\cos 2\theta}{\Delta} \\[2ex] \dfrac{\cos 2\theta}{r\Delta^3} & -\dfrac{\sin 2\theta}{\Delta} \end{pmatrix}$$

となる．この結果と，定理 5.4 から，

$$K(P) = \det\widetilde{B} = -\frac{1}{\Delta^4} = -\frac{1}{(1+r^2)^2}$$

と計算できる．したがって，$K(P)$ は，$P = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ としたとき，$\mathcal{R}$ の 2 点 $\mathbf{q}$ と原点 $\mathbf{0}$ の間の距離だけによって定まり，回転対称である．さらに，K は常に負であることもわかる．実際 $-1 \le K < 0$ であり特に，等号 $K = -1$ は原点のみで成立し，一方，極限 $P \to \infty$ では $K \to 0$ となる．

ここで，写像 $\mathbf{n}$ による全平面の像が上半球 S^2 に収まっているのを見ることができる．それには，写像 $\mathbf{n}$ の z 座標 $z(r,\theta)$ が，r, θ によらずに正であることを言えばよいが，実際，

$$z(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} > 0.$$

である．このことから，$r \to \infty$ で $z \to 0$ となること，上半球全体が写像 $\mathbf{n} : \mathcal{R} \to S^2$ で覆われることがわかる．

注: 厳密にいうと，ここで使った極座標による助変数表示は，原点で特異になっており，原点での議論に使うことはできない．練習問題 5 では，明らかにいたるところ非特異な，デカルト座標による助変数表示を用いて，原点において $K = -1$ であることを確かめる．

練習問題

1. (a) 曲線 $\mathbf{x}(q)$ の曲率 $\kappa(q)$ が，$\mathbf{x}$ とその(高階)微分を用いて，

$$\kappa = \sqrt{\frac{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')(\mathbf{x}''\cdot\mathbf{x}'') - (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'')^2}{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')^3}}$$

となることを示せ．方法の 1 つは，定理 5.2, すなわち

$$\kappa(q) = \frac{\|\mathbf{t}'(q)\|}{\|\mathbf{x}'(q)\|} \quad ただし \quad \mathbf{t}(q) = \frac{\mathbf{x}'(q)}{\|\mathbf{x}'(q)\|}$$

を用いることである．

(b) 曲線の単位接線ベクトルが，$A = 1/\sqrt{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'}$, $B = \mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}''/(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')^{3/2}$ に対して，$\mathbf{t}' = A\mathbf{x}'' - B\mathbf{x}'$ を満たすことを示せ．

(c) $\|\mathbf{t}'\|^2 = \mathbf{t}'\cdot\mathbf{t}'$ を計算して求め，最終的に $\kappa = \|\mathbf{t}'(q)\|/\|\mathbf{x}'(q)\|$ を導け．

2. 単位接線ベクトル写像 $\mathbf{t}(q) = \mathbf{x}'(q)/\|\mathbf{x}'(q)\|$ を次の各曲線 $\mathbf{x}(q)$ について求めよ．写像 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{t}$ の図を描いて，$\mathbf{x}$ の変曲点がどのように $\mathbf{t}$ が折り返される点と対応しているかを調べよ．

(a) $\mathbf{x}(q) = (q, q^3)$, $-1 < q < 2$.

(b) $\mathbf{x}(q) = (q, \sin q)$, $0 < q < 4\pi$.

(c) $\mathbf{x}(q) = (q^2, q - q^3)$, $-1 < q < 1$.

3. 曲線のガウス写像が，定義に用いられた助変数表示によらないことを示せ(ただし，助変数表示の向きには依存する．向きを逆にすると，ガウス写像の像はちょうどもとの写像の像の対蹠点になる)．

4. 円柱

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = \bigl(f(q^1), g(q^1), q^2\bigr)$$

について，ガウス曲率 K を計算せよ．曲面 S と，$\mathbf{x}$ の像，単位法線ベクトル写像の像である曲面 S^* を描け．

5. 鞍部の“デカルト座標”助変数表示

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = \bigl(q^1, q^2, q^1 q^2\bigr)$$

を用いて曲率 K を計算せよ．本文で用いた“極座標”助変数表示が原点で特異であったのに対し，この助変数表示が()いたるところ非特異であることを示せ．このことを利用して，原点での曲率の値が $K = -1$ であることを証明せよ．

6. (a) 平面曲線 C が，助変数表示 $\mathbf{w}(u) = (f(u), g(u))$ ただし，$f(u) = u^2$, $g(u) = u^3 - u$ で与えられているとする．曲面 S を助変数表示

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = (f(q^1), g(q^1), q^2)$$

で定める．曲線 C と曲面 S を描け．曲面 S が，曲線 C を底線とする縦方向の柱面，すなわち，S は C を通る縦方向の直線(母線)の和集合であることがわかるようにせよ．

(b) 曲面の助変数表示 $\mathbf{x}$ から，単位法線ベクトル写像 $\mathbf{n}$ を計算し，単位球面 S^2 に含まれるその像 S^* を描け．これにより，曲面 S の曲率が恒等的に 0 であることがわかるのはなぜか？

(c) 写像 $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ と $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ から行列 $\widetilde{B}(\mathbf{q})$ を求め，曲面 S の曲率に関して $K = \det\widetilde{B}$ が成立していることを示せ．

7. 滑らかな平面曲線の助変数表示 $\mathbf{w}(u) = (f(u), g(u))$ が非特異，すなわち，$\mathbf{w}' = (f', g')$ が 0 となる点が存在しないとする．曲面 S を，この曲線を底線とする，縦方向の柱面

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = (f(q^1), g(q^1), q^2)$$

とする．

(a) 曲面 S が非特異であることを示し，単位法線ベクトル写像 $\mathbf{n}$ を計算せよ．

(b) 行列 $\widetilde{B}(\mathbf{q})$ を計算し，曲面 S の曲率に対して $K = \det \widetilde{B}$ が成立することを示せ．

8. 目分量でよいので，楕円面，釣鐘型の曲面，トーラス（輪環面）のガウス写像を描け．（釣鐘型の曲面としては，具体的に，関数 $z = 1/(1+x^2)$ のグラフを z 軸のまわりに回転して得られる曲面を用いてもよい．）

9. 平面 $\mathbf{x} = (q^1, q^2, aq^1 + bq^2 + c)$ のガウス写像を計算せよ．

10. (a) トーラス $T_{a,r}$ のガウス写像を，助変数表示

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = \big((a + r\cos q^2)\cos q^1, (a + r\cos q^2)\sin q^1, r\sin q^2\big)$$

を用いて計算せよ．ガウス写像 $\mathcal{G}$ の様子を描き，$T_{a,r}$ 上のいくつかの特徴的な領域が $\mathcal{G}$ でどのように写されるかを示せ．

(b) トーラス $T_{a,r}$ の曲率関数 $K(P)$ を求めよ．

(c) トーラス $T_{a,r}$ の外側の半分に含まれる点 P においては $K(P) > 0$，内側の半分に含まれる点 P においては $K(P) < 0$ であることを確かめよ．ガウス写像 $\mathcal{G} : T_{a,r} \to S^2$ が $T_{a,r}$ の内側の半分の上では向きづけを**逆にする**ことを示せ．

(d) 曲率が $K(P) = 0$ となる点 P を求めよ．これらの点の，ガウス写像 $\mathcal{G}$ による像がどのようなものか説明せよ．

曲面 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ の助変数表示の定義域上の領域 D を考える．**D 上の全曲率**（total curvature over D）とは，積分

$$\iint_D K(q^1, q^2)\sqrt{g(q^1, q^2)}\, dq^1\, dq^2$$

のことである．ここで，$g(q^1, q^2)$, $K(q^1, q^2)$ は，それぞれ，助変数 (q^1, q^2) における計量の行列式，曲面の曲率である．

11. (a) 半径 R の上半球面の全曲率を求めよ．同様に，球面全体の全曲率を求めよ．これらの値は半径 R に依存しているか？

(b) 半球面および球面全体の全曲率は，ガウス写像による S^2 中のそれぞれの像の面積とどのように関係しているか？ このことから，全曲率の R 依存性が説明できるか？

12. (a) トーラス $T_{a,r}$ の 3 つの領域，内側の半分，外側の半分，全体，について，全曲率を求めよ．これらの値は変数 a または r に依存するか？

(b) トーラス $T_{a,r}$ の 3 つの領域の全曲率は，ガウス写像によるそれぞれの領域の S^2 中の像の面積とどのように関係しているか？ このことから，全曲率の a, r 依存性が説明できるか？

13. 任意の曲面の領域 D の全曲率が，ガウス写像による D の像の正味の面積と一致することを示せ．

第5章の内容をより深く知るには

ここで採用した曲面の微分幾何学の構成と記号は，Kreyszig[16] のものに最も近い．曲面の微分幾何学は多くの教科書で取り上げられている．いくつかをあげると，Crampin と Pirani[5],Dodson と Poston[6],Dubrovin 他 [7], Klingenberg[15], McCleary [22] などがある．Naber[25] では，$(1+3)$ 次元のドジッター時空が扱われている．

第6章
内在的幾何

ガウス(Gauss)が，曲面の曲率を法線方向の変化率として定義したときには，それは，曲面の空間への埋め込みに依存したものになっていた．当然，これは，“曲率とはたわみである”という外部的な考え方で，“曲率とは伸びである”という内在的な考え方ではない．後者の考え方が一般相対論の基礎であるべきである，ということを4.2節では議論した．ガウスが，曲率が内在的で**ある**と証明したことは，まったく特筆すべきことである．曲率は計量テンソルだけから定まり，曲面の空間への埋め込みには依存しない，という有名な**ガウスの基本定理**(theorema egregium)の議論を検討することから，この章を始めることにする．

ガウスの基本定理は，内在的微分幾何学への鍵となる定理である．いったんこの定理が確立されれば，あとは，重力の理論を相対論に組み込むのに必要な内在的幾何の道具—測地線，テンソル，共変微分—を整備することに集中すればよい．

6.1 ガウスの基本定理

曲面を別の曲面上に展開する

平面は，伸ばしたり破ったりせずに，円錐や円柱に巻き付けることができる．このことを，平面は円錐や円柱に**展開**できるということにする．ここであげた3つの曲面はそれぞれ，他の2つに展開できる．一般に，曲面 S_1 が，もう1つの曲面 S_2 に**展開**(develop)できるとは，距離を保つ写像 $f : S_1 \to S_2$ が存在することをいう．距離を保つ写像のことを**等長写像**(isometry)という．

どのような条件が満たされていれば，曲面は別の曲面上に展開できるのだろうか? ガウスはこの問題を大論文 “Disquisitiones Generalescirca Superficies Curvas” (曲面についての一般的考察，1827)で取り上げ，2つの曲面は，対応する点で同じ曲率を持っていなければならないと結論した．ガウスの証明で本質的なのは，曲面上に定義された関数である曲率を，曲率テンソルとその高階微分だけの式で表すことである．ガウスは，この結果を，ラテン語で **theorema egregium** と呼んだ．直訳すれば “顕著な定理” (“Egregious theorem”)だが，

これは良い訳とはいえない．現代では，“egregious” という単語には軽蔑的な意味が含まれているからである．この単語の語源は，e(x)-grex で，e(x) は $\cdots$ の外へ，grex は群れ，大衆であるから，ガウスの見解では，この定理は，“大衆の中から傑出している” ということになる．

ガウスの基本定理

定理 6.1 (ガウスの基本定理) 写像 $\mathbf{x}:\mathcal{R}\to\mathbf{R}^3$ を，曲面 S の助変数表示とする．このとき，ガウス曲率 K は，計量テンソル $g_{ij}=\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j$ の高階微分で表され，したがって，S の内在的な性質である．

証明： 出発点は，定理 5.4 すなわち，$K=\det\widetilde{B}=\det b^i_j$ である．ここで，成分 b^i_j は，$\mathbf{n}_j=-b^i_j\mathbf{x}_i$ で定義される．目標は，$\det\widetilde{B}$ が計量テンソル g_{ij} とその微分だけで表されることを示すことである．これを，いくつかのステップに分けて実行するが，その過程で，途方に暮れるほどの種類の新しい関数を導入することになる．証明が終わったあとで，振り返って，これらの関数を分類し，関数の種類を増やすことに貢献した “添え字の上げ下げ” 操作について，系統的な見方を説明する．まず，$j=1,2,\ k=1,2$ について，

$$\mathbf{x}_{jk}=\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial q^k\partial q^j},$$

を定義することから始める．これらの関数は，$\mathcal{R}$ 上の各点 $\mathbf{q}$ で定義される．さらに，偏微分は順序交換可能なので，$\mathbf{x}_{jk}=\mathbf{x}_{kj}$ である．

Γ^i_{jk} と b_{jk}

ステップ 1.　ベクトル $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ は接平面の基底であり，$\mathbf{n}$ は，接平面に直交するゼロでないベクトルなので，各 $\mathbf{x}_{jk}$ は，$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{n}$ の線型結合で書ける．したがって，適当な関数 Γ^i_{jk} と b_{jk} が存在して，

$$\mathbf{x}_{jk}=\Gamma^i_{jk}\mathbf{x}_i+b_{jk}\mathbf{n}$$

となる．ここで，$\mathbf{x}_{jk}=\mathbf{x}_{kj}$ から，

$$\mathbf{0}=\mathbf{x}_{kj}-\mathbf{x}_{jk}=\left(\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}\right)\mathbf{x}_i+\left(b_{kj}-b_{jk}\right)\mathbf{n}$$

だが，ベクトル $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{n}$ は線型独立なので，右辺の各係数はゼロでなくてはならない．このことから，$i=1,2$ に対して

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}\qquad\text{および}\qquad b_{jk}=b_{kj}$$

という対称性があることがわかる．

ステップ 2.　上で定義した b_{jk} が，行列 $\widetilde{B}$ の成分に現れる b^i_j と関係していることを示そう．まず，$b_{jk}=\mathbf{x}_{jk}\cdot\mathbf{n}$ である．なぜなら，

$$\mathbf{x}_{jk}\cdot\mathbf{n}=\Gamma^i_{jk}\,\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{n}+b_{jk}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=\Gamma^i_{jk}\cdot 0+b_{jk}\cdot 1$$

となるからである．次に，$b_{jk}=g_{ji}b^i_k$ である．これは，$\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{n}=0$ の両辺を微分することで，次のように示せる．

$$0 = \frac{\partial}{\partial q^k}(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{x}_{jk} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{n}_k = b_{jk} + \mathbf{x}_j \cdot \left(-b^i_k \mathbf{x}_i\right) = b_{jk} - b^i_k g_{ji}.$$

ここで得られた $b_{jk} = g_{ji} b^i_k$ は，行列の積の式

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{pmatrix} = -G\widetilde{B}$$

と見なすことができる．したがって，$\det B = \det G \det \widetilde{B}$ であり，$K = \det \widetilde{B} = \det B / \det G = \det B / g$ となる．すなわち，K が計量テンソルとその微分だけで表せるかどうかは，$\det B = \det b_{jk}$ が計量テンソルとその微分だけで表せるかどうかによって決まる． $K = \dfrac{\det B}{g}$

ステップ 3. まず，

$$\mathbf{x}_{jkl} = \frac{\partial \mathbf{x}_{jk}}{\partial q^l} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l}\mathbf{x}_i + \Gamma^i_{jk}\mathbf{x}_{il} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial q^l}\mathbf{n} + b_{jk}\mathbf{n}_l$$

とおく．このベクトルも，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}$ の線型結合で書けるはずである．その係数を決定するために，第 4 項に $\mathbf{n}_l = -b^i_l \mathbf{x}_i$ を代入する．次に第 2 項において和の規約で和がとられている添え字を i から p に変更した後，$\mathbf{x}_{pl} = \Gamma^i_{pl}\mathbf{x}_i + b_{pl}\mathbf{n}$ を代入しする．すると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{jkl} &= \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l}\mathbf{x}_i + \Gamma^p_{jk}\mathbf{x}_{pl} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial q^l}\mathbf{n} - b_{jk} b^i_l \mathbf{x}_i \\
&= \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l}\mathbf{x}_i + \Gamma^p_{jk}\left(\Gamma^i_{pl}\mathbf{x}_i + b_{pl}\mathbf{n}\right) + \frac{\partial b_{jk}}{\partial q^l}\mathbf{n} - b_{jk} b^i_l \mathbf{x}_i \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl} - b_{jk} b^i_l\right)\mathbf{x}_i + \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jk} b_{pl}\right)\mathbf{n}
\end{aligned}$$

となる．添え字 k と l を入れ替えた $\mathbf{x}_{jlk}$ についても，同様の式

$$\mathbf{x}_{jlk} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - b_{jl} b^i_k\right)\mathbf{x}_i + \left(\frac{\partial b_{jl}}{\partial q^k} + \Gamma^p_{jl} b_{pk}\right)\mathbf{n}$$

を得る．

ステップ 4. 偏微分の順序は交換できるので， $\mathbf{0} = \mathbf{x}_{jlk} - \mathbf{x}_{jkl}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}_j}{\partial q^k \partial q^l} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}_j}{\partial q^l \partial q^k} = \mathbf{x}_{jlk} - \mathbf{x}_{jkl} \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}\right) - \left(b_{jl} b^i_k - b_{jk} b^i_l\right)\right]\mathbf{x}_i + A\,\mathbf{n}
\end{aligned}$$

である．法線ベクトル $\mathbf{n}$ の係数は，この後には出てこないので，単に A とした．ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}$ は線型独立なので，上の和がゼロであるということは，各係数がそれぞれゼロであるということを意味する．ここで，係数を簡潔に表すために，関数 R^i_{jkl}

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}$$

を導入する．この新しい関数を使うと，$\mathbf{x}_i$ の係数が 0 だということは，

$$R^i_{jkl} = b_{jl} b^i_k - b_{jk} b^i_l$$

を意味する．この式は，4 つの添え字 i, j, k, l がそれぞれ 2 つの値をとることができるので，計 $2^4 = 16$ 個の方程式をまとめて書いたものであることに注意しよう．

$K = \dfrac{R_{1212}}{g}$

ステップ 5.　記号 R_{hjkl} を，$R_{hjkl} = g_{ih} R^i_{jkl} = b_{jl}\, b^i_k\, g_{ih} - b_{jk}\, b^i_l\, g_{ih} = b_{jl}\, b_{kh} - b_{jk}\, b_{lh}$ で定義しよう．すると，

$$R_{1212} = b_{22} b_{11} - b_{21} b_{21} = b_{22} b_{11} - b_{21} b_{12} = \det B$$

となり，曲率を

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

と書くことができる．

ステップ 6.　最終的な目標は，R_{1212} が g_{ij} とその微分だけから定まることを示すことである．しかし，

$$R_{1212} = g_{11} R^1_{212} + g_{12} R^2_{212}$$

であり

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jl} \Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk} \Gamma^i_{pl}$$

なので，各 Γ^i_{jk} が g_{ij} とその微分だけで定まることを示せば十分である．

$\Gamma_{jk,h}$ と g^{hm}

ステップ 7.　記号 $\Gamma_{jk,h}$ を，$\Gamma_{jk,h} = \mathbf{x}_{jk} \cdot \mathbf{x}_h$ で定義しよう．すると，$\Gamma_{jk,h} = \Gamma^i_{jk}\, g_{ih}$ であることが，

$$\Gamma_{jk,h} = \left(\Gamma^i_{jk} \mathbf{x}_i + b_{jk} \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{x}_h = \Gamma^i_{jk}\, \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_h + b_{jk}\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_h = \Gamma^i_{jk}\, g_{ih}$$

のようにして確かめられる．この方程式を解いて，逆に Γ^i_{jk} を $\Gamma_{jk,l}$ で表したい．方程式 $\Gamma_{jk,h} = \Gamma^i_{jk}\, g_{ih}$ は，行列の方程式

$$\Gamma_j = \begin{pmatrix} \Gamma_{j1,1} & \Gamma_{j1,2} \\ \Gamma_{j2,1} & \Gamma_{j2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{j1} & \Gamma^2_{j1} \\ \Gamma^1_{j2} & \Gamma^2_{j2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \widetilde{\Gamma}_j G$$

と見なせるので，$\widetilde{\Gamma}_j$ について解くには，G の逆行列を使って $\Gamma_j G^{-1} = \widetilde{\Gamma}_j G G^{-1} = \widetilde{\Gamma}_j$ とすればよい．逆行列の（未知の）成分を上付き添え字の g で表すと，

$$G^{-1} = (g^{hm}) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

と表すと，和の規約をうまく使って表せて，

$$g_{ih}\, g^{hm} = g^{mh}\, g_{hi} = \delta^m_i = \begin{cases} 1, & m = i, \\ 0, & m \neq i \end{cases}$$

となる．したがって，$\Gamma_{jk,h}\,g^{hm} = \Gamma^i_{jk}\,g_{ih}\,g^{hm} = \Gamma^i_{jk}\,\delta^m_i = \Gamma^m_{jk}$ である．証明を完成するには，各 g^{hm} と $\Gamma_{jk,h}$ が，g_{ij} とその微分から決まることを示せばよい．

ステップ 8. 2×2 行列の逆行列について，

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

が成立することはよく知られている．

ステップ 9. 式

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)$$

を示すことによって証明を完了しよう．関係 $g_{ik} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_k$ から，

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} = \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_{kj} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{jk,i}$$

である．同様に

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}, \qquad -\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = -\Gamma_{ik,j} - \Gamma_{jk,i}$$

が成立する．この 3 つの等式の両辺を加えあわせると，必要な結果が得られる． **証明終**

添え字のある量

行列のかけ算

和の規約は，本質的には，行列のかけ算を簡単に書く方法と考えることができる．例えば，$p \times n$ 行列 A の i 行 j 列の成分が a^j_i だとすると

$$A = (a^j_i) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^j_1 & \cdots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \cdots & a^j_2 & \cdots & a^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_i & a^2_i & \cdots & a^j_i & \cdots & a^n_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_p & a^2_p & \cdots & a^j_p & \cdots & a^n_p \end{pmatrix}$$

となる．同様に例えば，$n \times q$ 行列 B の j 行 k 列の成分が b^k_j だとする．このとき，積 $C = AB$ は $p \times q$ 行列で，その i 行 k 列の成分は $c^k_i = a^j_i b^k_j$ である．

ここで，$b^k_j a^j_i = a^j_i b^k_j$ であるので，$b^k_j a^j_i$ もまた AB の成分であり，BA の成分ではないことに注意しよう．実際，積 BA というのは，$p = q$ でない限りは存在しない．存在する場合には，$D = BA$ の l 行 m 列の成分は $d^m_l = b^k_l a^m_k = a^m_k b^k_l$ となる．

和に現れる無効添え字

最後の例は，添え字の名前(変数名)を変更する自由度があることをよく表している．特に，和をとられている添え字は**無効**添え字(見た目だけの添え

字)(dummy index)である．そのような添え字は，すでに使われている変数以外なら，どんな変数に置き換えても結果は変らない．したがって，i と k を固定したとき，

$$a_i^j b_j^k = \sum_j a_i^j b_j^k = \sum_l a_i^l b_l^k = a_i^l b_l^k$$

が成り立つ．

量の一覧

ガウスの基本定理の証明の途中で導入した添え字のある量は，今後も繰り返し使われるので，通常使われる名前とともに，列挙しておく．これらはすべて，曲面 S の助変数表示 $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ から作られる．もともとは，単独の添え字 i は，q^i についての偏微分を意味するものとして導入したのだった．

【第1基本形式】 $g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$.

【第2基本形式】 $b_{ij} = \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}$,

$$b_j^i \quad 式 \quad \mathbf{n}_j = -b_j^i \mathbf{x}_i で定義.$$

$$b_{jk} = b_j^i g_{ik}.$$

【クリストッフェル(Christoffel)の記号，第1種】 $\Gamma_{jk,l} = \mathbf{x}_{jk} \cdot \mathbf{x}_l$.

【クリストッフェルの記号，第2種】

$$\Gamma_{jk}^i \quad 式 \quad \mathbf{x}_{jk} = \Gamma_{jk}^i \mathbf{x}_i + b_{jk}\mathbf{n},$$

$$\Gamma_{jk,l} = \Gamma_{jk}^i g_{il} \quad で定義.$$

【リーマン曲率テンソル，混合】

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial q^l} + \Gamma_{jl}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{pl}^i.$$

【リーマン曲率テンソル，共変】

$$R_{hjkl} = R_{jkl}^i \, g_{ih}.$$

アインシュタインをはじめとして，クリストッフェル自身が考案した古い記法

$$\Gamma_{jk,l} = [jk, l], \qquad \Gamma_{jk}^i = \{jk, i\}$$

を用いる人もいる．[注1]

下付き添え字を**共変添え字**(covariant index)，上付き添え字を**反変添え字**と呼ぶ．これらの用語と，テンソルという用語の意味は，6.4節，6.5節で曲面上の**相対性**を考えるときに明らかになる．ここでの相対性とは，1つの曲面の2つの異なる助変数表示をとったときの，対応する(添え字のある)量の間の関係のことである．しばらくは，これらの用語は，単に物事を区別する便利な呼び名とだけ思っておこう．

添え字を下ろす

添え字のある量は，しばしば2つ一組で現れる．組の一方は混合，つまり上付き添え字が1つで残りが共変であるようなもので，もう一方は，すべて

注1 訳注：記法

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ {i \atop jk} \right\}$$

もしばしば用いられる．

が共変であるようなものである．さらに，これらの組は，すべて同じ形で結びついている．おおざっぱに言うと，それは，

$$B_{j*} = g_{ij} B^i_*$$

という型である．(ここで，アスタリスクは任意の個数の添え字を表す.) ここで行われているな仕方で計量テンソルをかけることを，**添え字を下げる** (lower an index) という．この言い方は今後しばしば用いる．

同様に，**添え字を上げる** (raise an index) ことを，計量テンソルの逆行列 g^{jk} を

添え字を上げる

$$B^k_* = g^{jk} B_{j*}$$

のようにかけることと定義する．逆行列 g^{jk} は条件

$$g^{jk} g_{ij} = \delta^k_i = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

によって定義されるので，

$$B^k_* = g^{jk} B_{j*} = g^{jk} \left(g_{ij} B^i_* \right) = \left(g^{jk} g_{ij} \right) B^i_* = \delta^k_i B^i_* = B^k_*$$

のように計算される．したがって，添え字の上げ下げは，互いの逆の操作である．このことは，すでにガウスの基本定理の証明の最終段階で使っている．すなわち，第 1 種のクリストッフェルの記号を第 2 種で表した式

$$\Gamma_{jk,h} = \Gamma^i_{jk} g_{ih}$$

を逆に解いて，第 2 種を第 1 種で表すために，

$$\Gamma^m_{jk} = \Gamma^i_{jk} \delta^m_i = \Gamma^i_{jk} g_{ih} g^{hm} = \Gamma_{jk,h} g^{hm}$$

という操作を行ったのだった．

一般に，$k+1$ 個の上付き添え字と l 個の下付き添え字を持つ任意の量 B^{i*}_* があったとき，1 つの添え字を下げて，k 個の上付き添え字と $l+1$ 個の下付き添え字を持つ新しい量

$$B^*_{j*} = g_{ij} B^{i*}_*$$

を作ることができる．同様に，

$$B^{h*}_* = g^{hm} B^*_{m*}$$

のように 1 つの添え字を上げて，k 個の上付き添え字と $l+1$ 個の下付き添え字を持つ量を，$k+1$ 個の上付き添え字と l 個の下付き添え字を持つ量に変えることができる．

複数の添え字のある量に対して行えるもう 1 つの操作は**縮約** (contraction) である．行列の対角和を求める操作がその例になっている．行列 $A = \left(a^j_i \right)$ に対して

縮約

$$\operatorname{tr} A = a^1_1 + a^2_2 + \cdots + a^n_n = a^i_i = \text{スカラー}$$

である．この操作では，上付き添え字と下付き添え字を同じ変数にして，和

の規約にしたがって加えていった．この場合の結果は，添え字がまったくなくなって，スカラーになることに注意しよう．一般に，複数の添え字のある量を縮約するには，1つの上付き添え字と1つの下付き添え字を選んで，それらを等しいとおいて加えていく．結果は，上付き添え字，下付き添え字の個数がそれぞれ1つずつ減ったものになる．

ベクトル $\mathbf{v} = v^i$ の長さの普通の計算

$$\|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij}v^iv^j = \left(g_{ij}v^i\right)v^j = v_jv^j = \text{スカラー}$$

も縮約である．2つのベクトルの内積

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = g_{ij}v^iw^j = \left(g_{ij}v^i\right)w^j = v_jw^j = \text{スカラー}$$

も同様である．そして最後に，後で用いるリッチ(Ricci)テンソルを定義する．これは，リーマン曲率テンソルを縮約したもの

$$\textbf{リッチテンソル:}\quad R_{ik} = R^h_{ihk}$$

である．

練習問題

練習問題1〜6の計算を，次の4つの曲面についてそれぞれ実行せよ．

- 平面 $\mathbf{x} = (q^1, q^2, aq^1 + bq^2 + c)$;
- 柱面 $\mathbf{x} = (f(q^1), g(q^1), q^2)$;
- 半径 R の球面 $\mathbf{x} = (R\cos q^1 \sin q^2, R\sin q^1 \sin q^2, R\cos q^2)$;
- トーラス $T_{a,r}$, $\mathbf{x} = \left((a + r\cos q^2)\cos q^1, (a + r\cos q^2)\sin q^1, r\sin q^2\right)$.

1. 計量テンソルの成分 g_{ij} と，その逆 g^{il} の成分を計算せよ．
2. 第2基本形式 b_{jk} および b^i_j の成分を計算せよ．関係 $b_{jk} = g_{ik}b^i_j$ および $b^i_j = g^{ik}b_{kl}$ が成立することを確かめよ．
3. 第1種のクリストッフェルの記号を，次の2つの式で計算せよ．

$$\Gamma_{jk,l} = \mathbf{x}_{jk}\cdot\mathbf{x}_l \qquad \text{および} \qquad \Gamma_{jk,l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}\right).$$

4. 第2種のクリストッフェルの記号 $\Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{jk,l}$ を計算し，$\mathbf{x}_{jk} = \Gamma^i_{jk}\mathbf{x}_i + b_{jk}\mathbf{n}$ が成り立つことを確かめよ．
5. 偏微分 $\partial\Gamma^i_{jk}/\partial q^l$ と混合リーマン曲率テンソル

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}$$

を計算せよ．

6. 曲率テンソル $R_{hjkl} = g_{ih}R^i_{jkl}$ とガウス曲率 $K = R_{1212}/g$ を計算せよ．
7. 正方行列 $\Gamma = (\gamma_{pq})$, $G = (g_{kl})$, $M = (m^j_i)$ を考える．ただし，1番目の，または上付き添え字が行，2番目の，または下付き添え字が列を指定する．

(a) 行列 M の転置を $M^t = (a_i^j)$ とするとき，a_i^j を M の成分を用いて表せ．

(b) 関係 $\Gamma = M^tGM$ が成り立つとき，成分 γ_{pq} を，和の規約を利用して M と G の成分で表せ．

8. (a) 任意の曲面 $\mathbf{x}$ について，混合リーマン曲率テンソルが R^i_{jkl} が，添え字 i, j, k, l のすべての値について，条件 $R^i_{jlk} = -R^i_{jkl}$ を満たすことを示せ．

(b) 混合リーマン曲率テンソル R^i_{jkl} の 16 個の成分のうち，少なくとも 8 個は 0 であることを示せ．その，0 となる成分を列挙せよ．

9. 一般の回転面(5.1 節の練習問題 6 参照)の計量テンソル $g_{ij}(q^1, q^2)$ は

$$g_{11} = \left[r(q^2)\right]^2, \qquad g_{12} = 0,$$
$$g_{21} = 0, \qquad g_{22} = \left[r'(q^2)\right]^2 + \left[z'(q^2)\right]^2.$$

という形をとる．注: 成分 g_{ij} は q^1 に依存しない．一般の関数 $r(q^2), z(q^2)$ に対して定義されるが，任意の q^2 に対して $r(q^2) > 0$ である．

(a) この計量テンソルだけを用いて，g^{kl}, $\Gamma_{jk,l}$, Γ^i_{jk}, R^i_{jkl}, R_{1212}, $K = R_{1212}/g$ を求めよ．

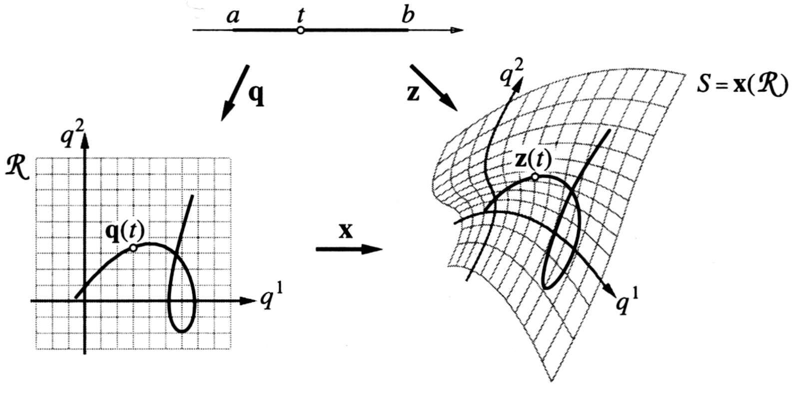
(b) ガウス曲率が $K = 0$ となるような点 (q^1, q^2) では，$z'(q^2) = 0$ または r $r'(q^2)z''(q^2) = r''(q^2)z'(q^2)$ であることを示せ．

(c) ある点でガウス曲率が $K < 0$ であるための条件を，r, z およびその微分で表せ．

6.2 測地線

加速しない観測者ふたたび

特殊相対論では，加速せずに，一直線上を，一定の速さで運動する観測者を考える．しかし，曲がった空間または時空では，直線があるかどうかもわからない．しかしながら，依然として“加速度 0 の”道というものは存在する．それが**測地線**(geodesic)である．以下では，通常の 2 次元曲面上の測地線を定義し，その性質を調べる．



曲面 S が助変数表示 $\mathbf{x} : \mathcal{R} \to \mathbf{R}^3$ を持つとする．また，$\mathbf{q} : [a, b] \to \mathcal{R}$ を助変数平面 $\mathcal{R}$ 上の曲線とする．このとき，$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{q}(t))$ は S 上の曲線で

ある．曲線 $\mathbf{z}$ の速度と加速度は，

$$\begin{aligned}
\text{速度:}\quad \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{x}_i \frac{dq^i}{dt};\\
\text{加速度:}\quad \mathbf{z}''(t) &= \mathbf{x}_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} + \mathbf{x}_i \frac{d^2q^i}{dt^2}\\
&= \left(\Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k + b_{ij}\,\mathbf{n}\right)\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} + \mathbf{x}_k\frac{d^2q^k}{dt^2}\\
&= \left(\frac{d^2q^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}\right)\mathbf{x}_k + b_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}\,\mathbf{n}
\end{aligned}$$

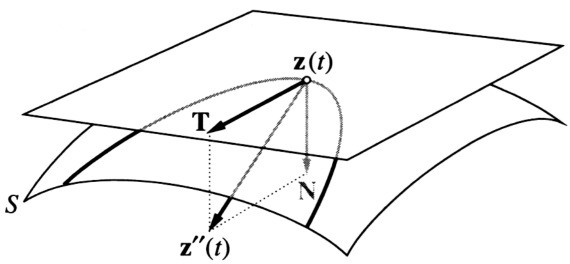
となる．

加速度の法線成分と接平面方向の成分

最後の項は，加速度の法線成分 $\mathbf{N}$ である．これは，第2基本形式 b_{ij} と曲線 $\mathbf{z}(t)$ の速度の各成分 dq^i/dt から定まるが，一般にはゼロではない．言い換えると，$\mathbf{z}(t)$ は，曲面上にとどまるためには，法線方向に加速しなければならないということである．一方，接平面方向の成分

$$\mathbf{T} = \left(\frac{d^2q^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}\right)\mathbf{x}_k$$

については話は別だ．これは，曲線の写像 $\mathbf{q}(t)$ によって定まるもので，関数 $\mathbf{q}(t)$ をうまく選べばゼロにできる．



定義 6.1 助変数平面 $\mathcal{R}$ の曲線 $\mathbf{q}(t) = \left(q^1(t), q^2(t)\right)$ は，曲面 $\mathbf{x}:\mathcal{R}\to\mathbf{R}^3$ の**測地線**(geodesic)であるとは，

$$\frac{d^2q^k(t)}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\left(q^1(t), q^2(t)\right)\frac{dq^i(t)}{dt}\frac{dq^j(t)}{dt} = 0, \qquad k = 1, 2$$

が成立することである．

これは**測地線方程式**(geodesic equations)と呼ばれる2階非線型常微分方程式系である．**これらは，計量テンソル g_{ij} だけから定まる**．普通の曲面の場合には，これは2個の方程式($k=1,2$)からなるが，曲がった$(1+3)$次元時空の場合には4個からなる．

例: 平面

いくつかのとても簡単な場合に，具体的に測地線を求めてみよう．まず，曲面 S を (x, y) 平面としてみる．助変数表示を

$$\mathbf{x}\left(q^1, q^2\right) = \left(q^1, q^2, 0\right)$$

とする．このとき，$i=j$ なら $g_{ij} = \delta_{ij} = 1$, それ以外なら $g_{ij} = 0$ である．

したがって，すべての $\partial g_{ij}/\partial q^k$ は恒等的に 0 となり，任意の i, j, k, h に対して

$$\Gamma_{ij,k} \equiv 0 \qquad \text{かつ} \qquad \Gamma^h_{ij} \equiv 0$$

となる．したがって，測地線方程式は，

$$\frac{d^2q^1(t)}{dt^2} \equiv 0, \qquad \frac{d^2q^2(t)}{dt^2} \equiv 0$$

という簡単な形になる．その解は直線であり，a, b, c, d を任意の積分定数として

$$\mathbf{q}(t) = \big(q^1(t), q^2(t)\big) = (at+b, ct+d)$$

と表せる．助変数 t を動かすと，像は速さ $\|(a,c)\| = \sqrt{a^2+c^2}$ でこの直線上を移動する．

この最後の点は重要である．例として，半直線

$$q^2 = q^1 > 0$$

の，速さが変化する助変数表示 $q^1(t) = q^2(t) = t^2$, $t > 0$ を考えよう．このとき

$$\frac{d^2q^1}{dt^2} = \frac{d^2q^2}{dt^2} \equiv 2 \neq 0$$

なので，これは測地線ではない．道そのものはまっすぐだが，点 (t^2, t^2) は経路上を加速しながら動く.[注2]すなわち，平面上では，すべての測地線は直線だが，すべての直線が測地線なわけではない．それは助変数表示による．

測地線は“最もまっすぐな道”以上のもの

これは大事な教訓である．曲面上の測地線のことを，助変数表示を指定されない，単なる**道**だと思ってしまいがちだが，次の定理が示すように，速さ一定の助変数表示だけが測地線となる資格を持っている.[注3]

定理 6.2 助変数表示された曲線 $\mathbf{q}(t)$ が測地線なら，$\|\mathbf{q}'(t)\|^2 = $ 定数 である．

証明： 計量テンソルを使うと，

$$\|\mathbf{q}'(t)\|^2 = g_{ij}\left(q^1(t), q^2(t)\right)\frac{dq^i(t)}{dt}\frac{dq^j(t)}{dt}$$

である．これが一定であることを示すには，t による導関数が恒等的にゼロであるといえばよい．そこで，それを計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{q}'(t)\|^2\right) &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} + g_{ij}\frac{d^2q^i}{dt^2}\frac{dq^j}{dt} + g_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{d^2q^j}{dt^2} \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} + 2g_{ij}\frac{d^2q^i}{dt^2}\frac{dq^j}{dt}\end{aligned}$$

[注2] 訳注：上の記述から明らかであるが，ここでは 2 次元平面上の測地線を考えており，この t は単なる助変数である．助変数 t を時間として含む $(1+2)$ 次元時空の測地線ではない．したがって，ここでの加速度の話は，6.2 節の冒頭の加速度の有無とは直接は関係しない．

[注3] 訳注：練習問題の中で，回転面の経線は測地線である，などというのは，経線の適当な助変数表示を取ると測地線になる，という意味である．

である．仮定から $\mathbf{q}(t)$ は測地線であり，

$$\frac{d^2q^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{lm}\frac{dq^l}{dt}\frac{dq^m}{dt}$$

が成立するので，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{q}'(t)\|^2\right) &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} - 2g_{ij}\Gamma^i_{lm}\frac{dq^l}{dt}\frac{dq^m}{dt}\frac{dq^j}{dt}\\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} - 2\Gamma_{lm,j}\frac{dq^l}{dt}\frac{dq^m}{dt}\frac{dq^j}{dt}\\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} - \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^j}\right)\frac{dq^l}{dt}\frac{dq^m}{dt}\frac{dq^j}{dt}\end{aligned}$$

となる．これを4つの項の和の形に書く．後ろの3項は，無効添え字の名前を適当につけかえると，すべて

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}$$

の形になることがわかるしたがって，4項はすべて互いに等しい．ただし，2項は正の符号，2項は負の符号で現れているので，和はゼロになる．**証明終**

ある1つの道を考えたとき，それが，複数の異なる助変数表示で測地線となることがありうる．しかし，そのときには，それらの助変数はアファイン的に関係している，すなわち $t = au + b$ という式で結びついていることが示される．

系 6.1 写像 $\mathbf{q}(t)$ と $\mathbf{Q}(u) = \mathbf{q}(\varphi(u))$ を，同じ道の2つの助変数表示とする．このとき，適当な定数 a と b をとると $t = \varphi(u) = au + b$ である．

証明： 合成関数の微分法から，$\mathbf{Q}'(u) = \mathbf{q}'(\varphi(u))\varphi'(u) = \mathbf{q}'(t)\varphi'(u)$ である．助変数表示 $\mathbf{Q}$ および $\mathbf{q}$ が測地線であることから，

$$\underbrace{\|\mathbf{Q}'(u)\|}_{\text{定数}} = \underbrace{\|\mathbf{q}'(t)\|}_{\text{定数}}\cdot|\varphi'(u)|,$$

となり，$\varphi'(u) = a$ が導かれる．ここで a は定数のうちの1つで $\pm\|\mathbf{Q}'(u)\|/\|\mathbf{q}'(t)$ で与えられる．よって，積分定数を b として $\varphi(u) = au + b$ である．**証明終**

例: 球面

球面はもう少し複雑な例なので上で調べた測地線のいろいろな性質を確かめることができる．測地線は計量テンソルだけで定まる．それは5.2節で見た通り，

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2(q^2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^{-2}(q^2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．第1種のクリストッフェルの記号は，g_{ij} の偏導関数の和となる．偏導関数のほとんどはゼロとなり，ゼロとならないのは

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2} = -2\sin(q^2)\cos(q^2)$$

だけなので，ゼロにならずに残るクリストッフェルの記号は，3個の添え字が $\{1,1,2\}$ を適当な順序に入れ替えたもの

$$\Gamma_{11,2} = \sin(q^2)\cos(q^2),$$
$$\Gamma_{21,1} = \Gamma_{12,1} = -\sin(q^2)\cos(q^2)$$

だけである．第2種のクリストッフェルの記号でゼロにならないのは，

$$\Gamma^2_{11} = g^{21}\Gamma_{11,1} + g^{22}\Gamma_{11,2} = \sin(q^2)\cos(q^2),$$
$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = g^{11}\Gamma_{12,1} + g^{12}\Gamma_{12,2} = \frac{-\sin(q^2)\cos(q^2)}{\cos^2(q^2)} = -\tan(q^2)$$

である．これ以外のクリストッフェルの記号はすべて $\Gamma_{ij,k} = \Gamma^h_{ij} \equiv 0$ となる．したがって測地線方程式は，

$$\frac{d^2q^1}{dt^2} - 2\tan(q^2)\frac{dq^1}{dt}\frac{dq^2}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2q^2}{dt^2} + \sin(q^2)\cos(q^2)\left(\frac{dq^1}{dt}\right)^2 = 0$$

である．この2つの方程式は，強く絡み合う連立方程式をなしている．関数 q^1 についての方程式は q^2 を含んでおり，関数 q^2 についての方程式は q^1 を含んでいる．どのような解があるかは明らかではない．

この連立微分方程式を解こうとするのはやめて，いくつかのなじみの深い曲線が測地線になっているかどうかを判定するだけにしよう．判定がやさしいのは，座標曲線 $q^1 =$ 定数（経線）と $q^2 =$ 定数（緯線）である．

経線: 曲線を $q^1 = a$, $q^2 = t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$ と表す．ここで a は緯度であり，$0 \leq a < 2\pi$ を満たす．このとき，

$$\frac{d^2q^1}{dt^2} - 2\tan(q^2)\frac{dq^1}{dt}\frac{dq^2}{dt} = 0 - 2\tan(t)\cdot 0\cdot 1 = 0,$$
$$\frac{d^2q^2}{dt^2} + \sin(q^2)\cos(q^2)\left(\frac{dq^1}{dt}\right)^2 = 0 + \sin(t)\cos(t)\cdot 0^2 = 0$$

なので，これらはすべて測地線である．

緯線: 曲線を $q^1 = t$, $q^2 = b$ ただし $0 \leq t \leq 2\pi$ と表す．ここで b は緯度であり，$-\pi/2 < b < \pi/2$ を満たす．このとき，

$$\frac{d^2q^1}{dt^2} - 2\tan(q^2)\frac{dq^1}{dt}\frac{dq^2}{dt} = 0 - 2\tan(b)\cdot 1\cdot 0 = 0,$$
$$\frac{d^2q^2}{dt^2} + \sin(q^2)\cos(q^2)\left(\frac{dq^1}{dt}\right)^2 = 0 + \sin(b)\cos(b)\cdot 1^2 = \tfrac{1}{2}\sin(2b)$$

である．2番目の式は，$2b$ が π の整数倍であるときだけ0になるが，それは，許される b の範囲では，$b = 0$ に限られる．それは赤道にほかならず，緯線のなかでは赤道だけが測地線である．

大円:助変数表示

$$q^1(t) = t, \qquad q^2(t) = \arctan(\alpha\sin t), \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

で定まる大円を5.2節で考えた．ここで，α は任意の実数でよい．球面上の

大円は測地線の典型的な例なので，これらの曲線は，当然，測地線方程式を満たすものと期待したくなる．しかし，これらは，速さ一定の助変数表示にすらなっていない．実際，5.2 節で求めた速さは

$$\sqrt{g_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2\sin^2 t}$$

だった．したがって，これはこのままでは測地線ではない．助変数表示を，例えば弧長によるものに変更した後で初めて，これらが測地線であることを示すことができる．弧長は

$$s = \int_0^t \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2\sin^2 t}\,dt = \arctan\left(\sqrt{1+\alpha^2}\ \tan t\right)$$

(5.2 節参照)であるから，逆に t について解くと，

$$t = \arctan\left(\frac{\tan s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

である．したがって，単位速さの(つまり弧長による)助変数表示は

$$q^1 = \arctan\left(\frac{\tan s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \qquad q^2 = \arctan\left(\frac{\alpha\tan s}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}\right)$$

となる．練習問題 5 で，これらが本当に測地線であることを，詳細な計算で確かめることになる．証明の主要部分は，

$$\tan(q^2) = \frac{\alpha\tan s}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}, \qquad \sin(q^2)\cos(q^2) = \frac{\alpha\tan s\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}{(1+\alpha^2)\sec^2 s},$$

と，そこから導かれる

$$\frac{dq^1}{ds} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}\ \sec^2 s}{\alpha^2+\sec^2 s}, \qquad \frac{dq^2}{ds} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}},$$

$$\frac{d^2q^1}{ds^2} = \frac{2\alpha^2\sqrt{1+\alpha^2}\ \tan s\sec^2 s}{(\alpha^2+\sec^2 s)^2}, \qquad \frac{d^2q^2}{ds^2} = -\frac{\alpha\tan s\sec^2 s}{(\alpha^2+\sec^2 s)^{3/2}}$$

である．このとき，1 番目の測地線方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2q^1}{ds^2} - 2\tan(q^2)\frac{dq^1}{ds}\frac{dq^2}{ds} &= \frac{2\alpha^2\sqrt{1+\alpha^2}\ \tan s\sec^2 s}{(\alpha^2+\sec^2 s)^2}\\ &\quad - 2\frac{\alpha\tan s}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}\cdot\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\ \sec^2 s}{\alpha^2+\sec^2 s}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}} \equiv 0,\end{aligned}$$

2 番目は

$$\begin{aligned}&\frac{d^2q^2}{ds^2} + \sin(q^2)\cos(q^2)\left(\frac{dq^1}{ds}\right)^2\\ &\quad = -\frac{\alpha\tan s\sec^2 s}{(\alpha^2+\sec^2 s)^{3/2}} + \frac{\alpha\tan s\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}{(1+\alpha^2)\sec^2 s}\cdot\frac{(1+\alpha^2)\sec^4 s}{(\alpha^2+\sec^2 s)^2} \equiv 0\end{aligned}$$

となって満たされる．

測地線はどこにでもある

最後に，曲面上の任意の一点と，その点における任意の向きが与えられたときに，その点をその向きに通過する測地線を構成できることを示そう．

定理 6.3 点 P を曲面 S 上の点，$\mathbf{v}$ を接平面 TS_P のベクトルとする．このとき，S の測地線 $\mathbf{q}(t)$ で $\mathbf{q}(0) = P$ と $\mathbf{q}'(0) = \mathbf{v}$ を満たすものが存在する．

証明： まず，定理の主張は省略した形で述べられていることに注意しよう．定理を省略せずに述べるには，曲面 S の具体的な助変数表示 $\mathbf{x} : \mathcal{R} \to \mathbf{R}^3$ を導入する必要がある．そして，このとき

$$P = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2) \qquad \text{および} \qquad \mathbf{v} = v^i \mathbf{x}_i(q_0^1, q_0^2)$$

とすると，定理は，助変数平面の曲線 $\mathbf{q} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathcal{R}$ が存在して，測地線方程式を満たし，さらに

$$\mathbf{q}(0) = (q_0^1, q_0^2) \qquad \text{および} \qquad \mathbf{q}'(0) = \left(\frac{dq^1}{dt}(0), \frac{dq^2}{dt}(0)\right) = (v^1, v^2)$$

が成立することを主張する．証明は，常微分方程式系の一般論の，解の存在と一意性の定理から導かれる．今の場合，関数 $q^1(t)$, $q^2(t)$ についての 2 つの 2 階微分方程式(測地線方程式)があり，$t = 0$ における q^1, q^2, dq^1/dt, dq^2/dt の初期条件が上のように与えられている．測地線方程式に現れる関数 $\Gamma_{ij}^k(q^1, q^2)$ が十分な回数微分可能だという条件のもとで，一般論の，解の存在と一意性の定理から，$t = 0$ を含む区間 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 上で定義され，微分方程式と初期条件を満たす関数の組 $q^1(t)$, $q^2(t)$ が一意的に存在することを保証する．

証明終

練習問題

1. 平面 $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (q^1, q^2, aq^1 + bq^2 + c)$ 上の測地線方程式を求め，そのすべての解を求めよ．

2. (a) 回転面

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = (r(q^2)\cos q^1, r(q^2)\sin q^1, q^2)$$

上の測地線方程式を求めよ．

(b) 回転面の経線 $q^1 =$ 定数 が測地線であることを示せ．そのために，まず，経線の速さ一定の助変数表示を求めよ．

(c) 回転面の緯線 $q^2 =$ 定数 は，$r'(q^2) = 0$ のとき，そしてそのときに限って測地線であることを示せ．この結果を幾何学的に説明せよ．

3. (a) 柱面

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) = (f(q^1), g(q^1), q^2)$$

上の測地線方程式を求めよ．

(b) 助変数 q^1 が，底線である平面曲線 $q^1 \mapsto (f(q^1, g(q^1))$ の弧長だとする．このとき，助変数平面の任意の直線 $(q^1, q^2) = (at+b, ct+d)$ を柱面に写したものは測地線であることを示せ．

(c) こんどは，助変数 q^1 は曲線 $(f(q^1, g(q^1))$ の**弧長ではない**とする．このとき，$s = s(q^1)$ を弧長関数，$q^1 = \varphi(s)$ をその逆関数とする．このときに，逆関数 φ を用いて，測地線方程式のすべての解を書き表せ．

4. トーラス $T_{a,r}$，すなわち，助変数表示で

$$\mathbf{x}(q^1,q^2)=\big((a+r\cos q^2)\cos q^1,(a+r\cos q^2)\sin q^1,r\sin q^2\big)$$

と表される曲面上の測地線方程式を求めよ．経線 $q^1=$ 定数 が測地線であることを示せ．

5. (a) 任意の α に対し，曲線 C_α が助変数表示

$$q^1=\arctan\left(\frac{\tan s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right),\qquad q^2=\arctan\left(\frac{\alpha\tan s}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}\right)$$

で定められるとき，これが単位球面 $\mathbf{x}=(\cos q^1\cos q^2,\sin q^1\cos q^2,\sin q^2)$ 上の測地線であることを示せ．

(b) 曲線 C_α を，$\alpha=-2,0,1,2,25$ に対して (q^1,q^2) 平面に注意深く描け．

(c) 曲線 $C_{\alpha,\beta}$ を，C_α を q^1 について β だけ平行移動して得られる

$$q^1=\beta+\arctan\left(\frac{\tan s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right),\qquad q^2=\arctan\left(\frac{\alpha\tan s}{\sqrt{\alpha^2+\sec^2 s}}\right)$$

とする．すべての $C_{\alpha,\beta}$ が測地線であることを示せ．球面上の，すべての曲線 $C_{\alpha,\beta}$ および C_α の間の幾何学的関係はどのようなものか．すべての $C_{\alpha,\beta}$ が測地線であることが，この関係から直ちにわかるのはなぜか．

(d) 任意の曲線 $\mathbf{q}(t)=(q^1(t),q^2(t))$ が球面上の測地線であるとき，任意の β に対して曲線 $\mathbf{q}_\beta(t)=(\beta+q^1(t),q^2(t))$ もまた測地線であることを示せ．

(e) 常微分方程式系の解の存在と一意性の定理から，球面上の指定された点を，指定された向きに通過する測地線が一意的に存在する．すなわち，条件

$$\mathbf{q}(0)=(a^1,a^2),\qquad \mathbf{q}'(0)=(b^1,b^2)$$

を満たす測地線が一意的に存在する．この測地線 $\mathbf{q}(t)$ の式を，a^1, a^2, b^1, b^2 で具体的に書き表せ．

6. 計量

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\cosh^2(q^1)\end{pmatrix},\qquad -\infty<q^1<\infty,\quad 0\le q^2\le 2\pi$$

で定められる $(1+1)$ 次元ドジッター時空の座標曲線 $\mathbf{q}(t)=(t,k^2)$ および $\mathbf{q}(t)=(k^1,t)$ のうち，測地線になっているものはどれか．

6.3　曲がった時空

この節では，曲がった時空を，$\mathbf{R}^4$ の部分集合で，その微分幾何的性質が計量によって内在的に与えられ，各点における接空間が線型な $(1+3)$ 次元時空であるようなものとして定義する．これをどのように行ったらよいのか知るために，まずは普通の2次元曲面の場合を考えよう．

普通の曲面

今後，曲面の座標系(パッチ(patch))Sとは，(q^1, q^2)平面の開集合$\mathcal{R}$と，その上の関数からなる2×2行列 **幾何が内在的に定義された曲面**

$$G(q^1, q^2) = \left(g_{ij}(q^1, q^2)\right), \qquad i, j = 1, 2,$$

で次の条件を満たすものの組のことを意味する．

1. 各$g_{ij}(q^1, q^2)$は$\mathcal{R}$上で定義された(q^1, q^2)の滑らかな関数である．
2. 各点(q^1, q^2)で，Gは対称行列である．すなわち，$g_{ji} = g_{ij}$．
3. 各点(q^1, q^2)で，Gの2個の正の固有値を持つ．

行列$G = (g_{ij})$を，Sの**計量テンソル**(metric tensor)または**第1基本形式**(first fundamental form)という．上の3つの条件を満たす限り，計量テンソルは任意に選ぶことができる．特に，計量テンソルは埋め込みの写像$\mathbf{x} : \mathcal{R} \to \mathbf{R}^3$から決まるものではない．さらに言えば，そのような写像は，最初からSの定義には含まれていない．曲面Sがその中に横たわる，より大きな空間，というようなものは存在しない．曲面Sの幾何が**内在的に**(intrinsically)定義されているというのは，そういう意味である．曲面Sが，$\mathcal{R}$とg_{ij}だけに依存し，他のものには依存しないことを明確にするために，$S = \{\mathcal{R}, g_{ij}\}$と書く． $S = \{\mathcal{R}, g_{ij}\}$

次のように，計量テンソルから，Sの各点で定義される，添え字のある幾何学的量がすべて導かれる． **Sの幾何**

- $g = \det G$.
- $G^{-1} = \left(g^{jk}\right)$, つまり $g_{ij}g^{jk} = g^{kj}g_{ji} = \delta_i^k$.
- 第1種のクリストッフェルの記号:$\Gamma_{ij,k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)$.
- 第2種のクリストッフェルの記号: $\Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{jk,l}$.
- 混合リーマン曲率テンソル:$R^i_{jkl} = \dfrac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \dfrac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}$.
- 共変リーマン曲率テンソル: $R_{ijkl} = g_{im}R^m_{jkl}$.
- ガウス曲率:$K = R_{1212}/g$.

これらの量があれば，Sについていま必要とするすべての幾何学的情報を得られる．例えば，$\mathbf{q}(t) = \left(q^1(t), q^2(t)\right)$ ただし$a \le t \le b$がS上の道であるとしよう．このとき，

$$\mathbf{q}\text{の長さ} = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\left(q^1(t), q^2(t)\right)\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}}\, dt$$

であり，また，$\mathbf{q}(t)$が測地線であるための必要十分条件は

$$\frac{d^2q^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\left(q^1, q^2\right)\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} = 0$$

である．

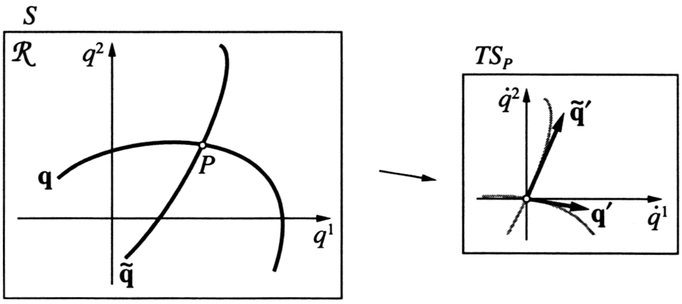
計量g_{ij}は，埋め込みで定義された曲面の場合と同様に，Sの各接平面の **接平面 TS_P**

計量を定める．このことを主張するためには，まず，埋め込みによってではなく，内在的に幾何が定義された曲面の接平面とは何かをはっきりさせておかなくてはならない．

本質的には，接ベクトルとは，曲線のある点における速度ベクトルにすぎない．点 P が，曲面 $S = \{\mathcal{R}, g_{ij}\}$ の点で，その $\mathcal{R}$ における座標が (c^1, c^2) であるとする．滑らかな曲線

$$\begin{aligned} \mathbf{q} : [a,b] &\to \mathcal{R} \\ t &\mapsto \left(q^1(t), q^2(t)\right) \end{aligned}$$

が $\mathbf{q}(c) = (c^1, c^2) = P$ を満たすとしよう．このとき $\mathbf{q}'(c)$ は，P における S の接ベクトルである．曲線 $\mathbf{q}$ として，P を通過するすべての滑らかな曲線を考えることによって，すべての接ベクトルが得られる．点 P におけるすべての接ベクトルからなる集合が接平面 TS_P である．ここで，接ベクトルは $\mathcal{R}$ 上のベクトルと考えるのでなく，このような独自の平面に属するものと考えていることに注意しよう．

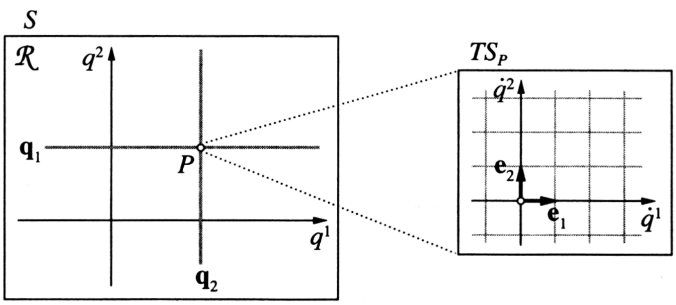


TS_P に誘導される座標

各接平面の座標は，S の座標から自然に誘導された(induced)ものである．接平面のこの座標を $\left(\dot{q}^1, \dot{q}^2\right)$ とする．この記号は，この新しい座標が，S の (q^1, q^2) 座標を“時間”助変数について微分して得られることから来ている(真上についた点(ドット)は，時間微分を表すのに使われることがある)．点 (c^1, c^2) を通り，$\mathcal{R}$ の座標の横軸，縦軸に平行な直線

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_1', &\quad \text{ただし}\quad \mathbf{q}_1(s) = (c^1 + s, c^2) = P + s(1,0), \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_2', &\quad \text{ただし}\quad \mathbf{q}_2(s) = (c^1, c^2 + s) = P + s(0,1) \end{aligned}$$

から基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を定めると，次の命題が主張するように，$\dot{q}^1$ と $\dot{q}^2$ はこの基底に関する座標であることがわかる．



命題 6.1 時間変数 t に関する偏微分係数

$$\dot{q}^1 = \frac{dq^1}{dt}(c), \qquad \dot{q}^2 = \frac{dq^2}{dt}(c)$$

は，接平面の TS_P のベクトル $\mathbf{q}'(c)$ の，基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する座標である．

証明： テイラーの定理から，c に近い t に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= \left(q^1(t), q^2(t)\right) \\ &= \left(c^1 + \dot{q}^1 \cdot (t-c) + O\left((t-c)^2\right), c^2 + \dot{q}^2 \cdot (t-c) + O\left((t-c)^2\right)\right) \\ &= P + (t-c)\left(\dot{q}^1, \dot{q}^2\right) + O\left((t-c)^2\right)\end{aligned}$$

である．一方，曲線 $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_1$ に関して

$$\mathbf{q}_1(t-c) - P = (t-c)(1,0), \qquad \mathbf{q}_2(t-c) - P = (t-c)(0,1)$$

であるから，少なくとも c に近い t に対しては，曲線 $\mathbf{q}$ を，これら $\mathcal{R}$ の “基底” 曲線を用いて

$$\mathbf{q}(t) - P = \dot{q}^1\left(\mathbf{q}_1(t-c) - P\right) + \dot{q}^2\left(\mathbf{q}_2(t-c) - P\right) + O\left((t-c)^2\right)$$

と書き表せる．両辺を t について微分し，$t = c$ とおいて

$$\mathbf{q}'(c) = \dot{q}^1\mathbf{q}_1' + \dot{q}^2\mathbf{q}_2' = \dot{q}^1\mathbf{e}_1 + \dot{q}^2\mathbf{e}_2 = \dot{q}^i\mathbf{e}_i$$

を得る． **証明終**

いろいろな点 P における接平面 TS_P や S そのものの間には，埋め込みで定義された曲面の場合とは異なり，見たところの差異はない．しかし今回は，意識的にこれらの平面がみなは**概念的に**異なるものと考えなければならない．つまり，曲面 S には，点 P を添え字とする，内積のある 2 次元ベクトル空間の族が付随する．ここで，添え字 P は S の点であり，内積は計量 $g_{ij}(P)$ である．特に，異なる点における接ベクトルは，異なるベクトル空間に属すると考える．そして接ベクトルは，同じベクトル空間に属する対についてだけ，その和や内積を考えることができる．

接平面 TS_P は P ごとに別々

内在的に幾何が定義された曲面 S の最も簡単な例は，計量が**定数**の曲面である．クリストッフェルの記号とリーマン曲率テンソルはいたるところゼロとなり，したがってガウス曲率 K も恒等的にゼロとなる．測地線の条件の微分方程式は

$$\frac{d^2q^1}{dt^2} = \frac{d^2q^2}{dt^2} = 0$$

という簡単な形になり，その解は直線

$$q^1(t) = at + b, \qquad q^2(t) = ct + d$$

である．そして，すべての接平面は，同じ内積を持つ．

例: 双曲平面

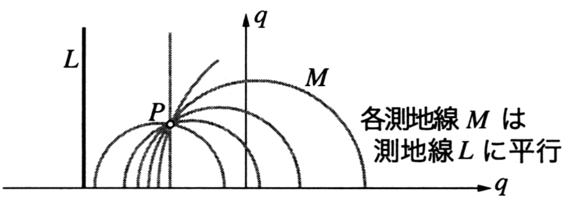
埋め込みよりも内在的に定義されることの多い曲面の例として，双曲平面

非ユークリッド幾何のモデル

H は最もよく知られたものの1つである．双曲平面は，古典的な非ユークリッド幾何の1つとして現れる．非ユークリッド幾何は，ユークリッド幾何の公理のうち，有名な平行線公理を除いてそれ以外をすべて認めることで得られる．平行線公理とは，“任意の直線と，直線上にない任意の1点に対して，1本，そしてちょうど1本だけ，その点を通りその直線に平行な直線が存在する”というものだった．非ユークリッド幾何では，この公理は，2通りのいずれかの変更をうけ，その結果，2つの異なる幾何学が導かれることになる．平行線は**存在**しないと仮定した場合には楕円幾何となり，逆に平行線は**多数**存在すると仮定した場合には双曲幾何となる．

測地線は直線に相当

双曲平面の H の場合，領域 $\mathcal{R}$ は上半平面 $q^2 > 0$ である．このモデル H の幾何学では，測地線が“直線”の役目を果たす．いったん H の計量を定めれば，q^2 軸に平行な，縦方向の(普通の意味での)直線が測地線であることが示せる．また，中心が q^1 軸上にある半円も測地線であることが示せる．下の図は，H が非ユークリッドな双曲幾何のモデルになっている様子を示している．確かに，点 P を通過する(灰色で描かれた)各“直線” M は，どれも直線 L と交わらず，したがって，みな L と平行であることがわかる．



双曲平面 H の計量

双曲平面 H の解析を始めよう．まず，これらの直線と半円が本当に測地線になっていることを示そう．双曲平面 H の計量は

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(q^2)^2}, \qquad g_{12} = g_{21} = 0$$

で与えられる．したがって，$g^{11} = g^{22} = (q^2)^2$, $g^{12} = g^{21} = 0$ となる．また，

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} = \frac{-2}{(q^2)^3}$$

であり，計量のそれ以外のすべての成分の偏導関数はゼロになる．このことから，第1種のクリストッフェルの記号は，添え字が $\{1,1,2\}$ か，その順序を適当に入れ替えたものか，$2,2,2$ であるかのいずれかでない限りはゼロになる．逆に言うと，ゼロにならないのは

$$\Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = -\frac{1}{(q^2)^3}, \qquad \Gamma_{11,2} = \frac{1}{(q^2)^3}, \qquad \Gamma_{22,2} = -\frac{1}{(q^2)^3}$$

だけである．第2種のクリストッフェルの記号のすべての成分の計算結果は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= g^{11}\Gamma_{11,1} + g^{12}\Gamma_{11,2} = 0,\\
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= g^{11}\Gamma_{12,1} + g^{12}\Gamma_{12,2} = (q^2)^2 \cdot \frac{-1}{(q^2)^3} = -\frac{1}{q^2},\\
\Gamma^1_{22} &= g^{11}\Gamma_{22,1} + g^{12}\Gamma_{22,2} = 0,\\
\Gamma^2_{11} &= g^{21}\Gamma_{11,1} + g^{22}\Gamma_{11,2} = (q^2)^2 \cdot \frac{1}{(q^2)^3} = \frac{1}{q^2},\\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= g^{21}\Gamma_{12,1} + g^{22}\Gamma_{12,2} = 0,\\
\Gamma^2_{22} &= g^{21}\Gamma_{22,1} + g^{22}\Gamma_{22,2} = (q^2)^2 \cdot \frac{-1}{(q^2)^3} = -\frac{1}{q^2}.
\end{aligned}$$

測地線方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2q^1}{dt^2} - \frac{2}{q^2}\frac{dq^1}{dt}\frac{dq^2}{dt},\\
0 &= \frac{d^2q^2}{dt^2} + \frac{1}{q^2}\left(\frac{dq^1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{q^2}\left(\frac{dq^2}{dt}\right)^2
\end{aligned}$$

で与えられる．

測地線はつねに速さ一定の助変数表示

道が測地線方程式を満たすためには，速さ一定の助変数表示でなければならない．つまり，助変数は弧長(の定数倍)でなければならない．したがって，縦方向の直線と，q^1 軸上に中心を持つ半円が測地線であることを示すためには，まずこれらの曲線の弧長による助変数表示を求めなければならない．

【縦方向の直線】　縦方向の直線 $q^1 = c$ を考えよう．試しに，$q^1(t) = c$, $q^2(t) = t,\ t > 0$ という助変数表示をとってみる．すると，速さは

$$\|\mathbf{q}'(t)\| = \sqrt{g_{ij}(c,t)\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}} = \sqrt{g_{22}(c,t)\left(\frac{dq^2}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{t^2}\cdot 1} = \frac{1}{t}$$

となる．弧長を $t = a$ から測ることにすると，弧長関数は

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{q}'(t)\|\,dt = \int_a^t \frac{dt}{t} = \ln t - \ln a$$

である．この関係は，$a = 1$ ととると，$s = \ln t$ という簡単な形になり，t について解くと $t = e^s$ となる．したがって，縦方向の直線の弧長による助変数表示は

$$q^1 = c, \qquad q^2 = e^s$$

である．あとは，この助変数表示が測地線方程式を満たすことを示せばよい．これは練習問題 3 で行う．

H の境界は内部から無限に遠い

双曲平面の内部の点と境界の q^1 軸上の点を結ぶ縦方向の線分は，H の計量で測ると，長さが無限大になる．理由を説明しよう．助変数 t は境界上の点で $t = 0$, 内部の点で何らかの正の値，例えば b をとる．したがって，長さは $s(b) - s(0) = \ln b + \infty = \infty$ となる．双曲平面 H の境界(q^1 軸)は，見たところすぐ近くにあるが，実は内部の任意の点から無限に離れている．これが，H が埋め込みでなく内在的に定義される理由の 1 つである．

【半円】　半径 r で $(q^1, q^2) = (c, 0)$ を中心とする半円の，時計回りの助変数表示を作ることにしよう．最も普通なものは，正弦，余弦関数を用いた

$$q^1 = c - r\cos t, \quad q^2 = r\sin t, \qquad 0 < t < \pi$$

だろう．しかし，これは H 上では速さ一定の助変数表示ではない．練習問題2参照．

弧長による助変数表示

円を助変数表示するのに，上のように正弦，余弦関数を使った動機は，$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ という恒等式があるということである．しかし，双曲線関数にも，類似した恒等式

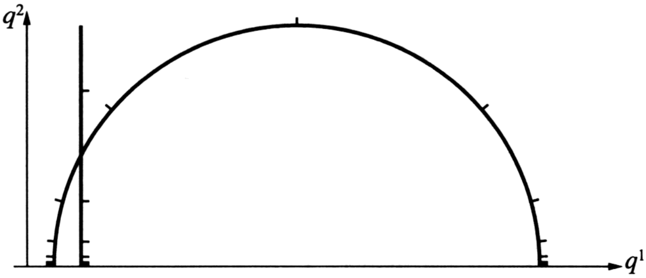
$$\tanh^2 s + \operatorname{sech}^2 s = 1$$

があるので，これらをこの目的に使うということも考えられる．実際，練習問題3で，

$$q^1 = c + r\tanh s, \quad q^2 = r\operatorname{sech} s, \qquad -\infty < s < \infty$$

が弧長による助変数表示であり，さらに H の測地線方程式を満たすことを示す．特に，この道の長さは無限大であり，助変数の値 $s = \pm\infty$ が境界 $q^2 = 0$ 上の点 $q^1 = c \pm r$ を与えることがわかる．

なお，これらの道は，ユークリッド的観点からのみ，“半円” なのであり，H を支配する双曲幾何の観点からは**直線**である．下の図には，2種類の測地線が，弧長で測った目盛とともに描かれている．



H では $K \equiv -1$

双曲平面 H をユークリッド空間に埋め込まれた曲面として表現しにくいもう1つの要因は，そのガウス曲率にある．練習問題6で H に対して $K = R_{1212}/g \equiv -1$ を示す．

TH_P とユークリッド平面との比較

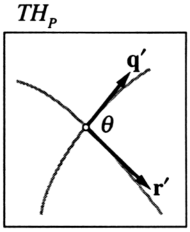
双曲平面 H をユークリッド平面と比べて独特のものにしているのは，その測地線の性質と，いたるところ負であるその曲率である．しかし，次の命題が示すように，各接平面 TH_P はユークリッド平面と非常に似ている．

命題 6.2 双曲平面の H の計量で測った角の大きさは，ユークリッド計量で測ったものと一致する．

証明：同じ点 $P = (c^1, c^2)$ における H の2つの接ベクトル $\mathbf{q}' = (\dot{q}^1, \dot{q}^2)$ と $\mathbf{r}' = (\dot{r}^1, \dot{r}^2)$ を考える．この2つのベクトルの間の角を θ とする．双曲平面の計量では，角 θ は

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}'}{\|\mathbf{q}'\|\|\mathbf{r}'\|} = \arccos \frac{\dfrac{\dot{q}^1\dot{r}^1 + \dot{q}^2\dot{r}^2}{(c^2)^2}}{\sqrt{\dfrac{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2}{(c^2)^2}}\sqrt{\dfrac{(\dot{r}^1)^2 + (\dot{r}^2)^2}{(c^2)^2}}}$$

$$= \arccos \frac{\dot{q}^1\dot{r}^1 + \dot{q}^2\dot{r}^2}{\sqrt{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2}\sqrt{(\dot{r}^1)^2 + (\dot{r}^2)^2}}$$



で与えられる．最後の表式はユークリッド計量で測った θ の式にほかならない．

証明終

ユークリッド平面と双曲平面の，接平面の間のこの類似性の理由は，計量を行列の形に書くと明白になる．ユークリッド計量は単位行列 I で与えられるのに対して，双曲平面の計量は，I のスカラー倍

$$G = \frac{1}{(q^2)^2} I$$

である．このスカラーは，H 上の各点で異なる値をとるが，一点上ではある定まった値になる．したがって，各点の接平面上では，距離はユークリッド平面の距離の定数倍になり，各 TH_P は，ユークリッド幾何の意味で，ユークリッド平面と相似になる．

時空

重力は距離を歪める

第4章では，加速している観測者の座標系では事象の間の距離が歪められてしまうことを見た．さらに，アインシュタインの等価原理から，少なくとも局所的には，重力場の中で静止している観測者と，慣性座標系に対して加速している観測者との間には区別はない．したがって，重力場中の観測者にとっても事象の間の距離が歪められる．

時空の座標系と計量

ここまでで，時空の任意の座標系，特に，重力場のある場合を扱う用意ができた．そのような座標系[注4] S は，$\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3, q^4)$ 空間の開集合 $\mathcal{R}$ と，その上の関数からなる 4×4 行列

$$G(\mathbf{q}) = (g_{ij}(\mathbf{q})), \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

で次の条件を満たすものからなる．

1. 各 $g_{ij}(\mathbf{q})$ は $\mathcal{R}$ 上で定義された $\mathbf{q}$ の滑らかな関数である．
2. 各点 $\mathbf{q}$ で，G は対称行列である．すなわち，$g_{ji} = g_{ij}$.
3. 各点 $\mathbf{q}$ で，G は1個の正の固有値と，3個の負の固有値を持つ

行列 $G = (g_{ij})$ を，S の**計量テンソル**(metric tensor)または**第1基本形式**(first fundamental form)という．行列 G は対称なので，g_{ij} の16成分のうち10成分だけを指定すれば定まる．第4章の考察から，座標 q^i は，観測者が定規や時計を用いて測った空間，時間の長さとは見なせない．座標 (q^1, q^2, q^3, q^4) は時空の事象を区別するためのラベル(名前)にすぎない．しかし，接空間で

[注4] 訳注：2次元曲面の場合にはパッチとも呼んでいた

は座標にもっと深い意味を持たせることができることがわかる．

接空間

座標系 S の点 P に対して，点 P における S の**接空間**(tangent space of S at P) を，P を通る S 上のすべての曲線の，P における速度ベクトルの集合と定義する．座標系 S の座標から，接空間 TS_P の“点つき”の座標 $(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3, \dot{q}^4)$ が，通常の曲面の場合と同様に自然に誘導される．この座標は，座標軸に平行な直線の接ベクトルからなる基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ に関してのものである．

見てわかるように次元を減らす

4次元空間をそのまま目で見ることは不可能なので，描図の際，そしてほとんどの議論の際に，4次元空間を2次元空間で置き換える．これは第1章で時空の“断面”を考えたのとまったく同様である．そこで，時空座標系 S の定義に，次の2点で変更を加える．

- 時空 S の領域 $\mathcal{R}$ は，$\mathbf{R}^4$ でなく $\mathbf{R}^2$ の開集合である．
- 計量テンソル $G(P) = g_{ij}(P)$ は，2×2 対称行列で，1個の正の固有値と，1個の負の固有値を持つ．

これまでと同様に，もともとの4次元時空で考えるのが重要であるようなときにはそうすることにする．

各 TS_P は $(1+1)$ 次元ミンコフスキ平面

このような変更を加えると，各接空間 TS_P は2次元となり，その座標 $(\dot{q}^1, \dot{q}^2)$ は S の座標 (q^1, q^2) から誘導される．座標系 S の点 P における接ベクトル $\mathbf{q}'$ が，TS_P に誘導された座標を用いて $\mathbf{q}' = (\dot{q}^1, \dot{q}^2)$ であるとすると，定義から

$$\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}' = g_{ij}(P)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

である．

定理 6.4 接空間 TS_P の適当な基底 $\mathcal{B} = \{\mathbf{T}, \mathbf{X}\}$ を選ぶと，接空間の任意のベクトル $\mathbf{q}' = t\mathbf{T} + x\mathbf{X}$ (すなわち，(t, x) は，基底 $\mathcal{B}$ に関する $\mathbf{q}'$ の成分)に対して

$$\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}' = t^2 - x^2$$

が成立するようにできる．

証明： 基底 $\mathcal{B}$ は，$G(P)$ の固有ベクトルを規格化したものから作ればよいはずである．いま，正の固有値に対応する固有ベクトルを $\mathbf{T}^*$, 負の固有値に対応する固有ベクトルを $\mathbf{X}^*$ とする．それぞれの固有値を $\lambda_{\mathbf{T}}$, $\lambda_{\mathbf{X}}$ とする．

ここで，$\mathbf{T}^*$ と $\mathbf{X}^*$ が G-直交する，すなわち計量 G のもとで直交することを示そう．まず，

$$\mathbf{T}^* = \dot{q}^i_{\mathbf{T}}\mathbf{e}_i, \quad T^* = \begin{pmatrix} \dot{q}^1_{\mathbf{T}} \\ \dot{q}^2_{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}^* = \dot{q}^i_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i, \quad X^* = \begin{pmatrix} \dot{q}^1_{\mathbf{X}} \\ \dot{q}^2_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}$$

と書く．すなわち，抽象的なベクトル $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{X}^*$ と，実数を成分とする列ベクトル T^*,X^* とを記号で意識的に区別することにする．これは面倒なようだが，以下の計算で，抽象的な内積を行列の積に帰着させているということを明確にしてくれる．ここで，内積 $\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{X}^*$ を2つの方法で計算する．

$$(1)\quad \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{X}^* = T^{*t}GX^* = T^{*t}(\lambda_{\mathbf{X}}X^*) = \lambda_{\mathbf{X}}T^{*t}X^*;$$

$$(2)\quad \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{X}^* = (T^{*t}G)^{tt}X^* = (G^tT^*)^tX^* = (GT^*)^tX^* = (\lambda_{\mathbf{T}}T^*)^tX^* = \lambda_{\mathbf{T}}T^{*t}X^*.$$

したがって $(\lambda_{\mathbf{X}}-\lambda_{\mathbf{T}})T^{*t}X^*=0$ であるが，$\lambda_{\mathbf{X}}-\lambda_{\mathbf{T}}\neq 0$ なので，$T^{*t}X^*=0$ が導かれ，$\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{X}^*=0$ が結論される．

次に，$\mathbf{X}^*\cdot\mathbf{X}^* = X^{*t}GX^* = \lambda_{\mathbf{X}}X^{*t}X^*$ を考える．ここで，$\lambda_{\mathbf{X}}$ は負，$X^{*t}X^*=(\dot q^1_{\mathbf{X}})^2+(\dot q^2_{\mathbf{X}})^2$ は正なので，$\mathbf{X}^*$ を定数倍した

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\mathbf{X}}}\sqrt{X^{*t}X^*}}\ \mathbf{X}^*$$

に対して $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}=-1$ が成立する．同様に，$\mathbf{T}^*$ を定数倍した

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\mathbf{T}}}\sqrt{T^{*t}T^*}}\ \mathbf{T}^*$$

に対して $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=1$ が成立する．ベクトル $\mathbf{T}$ と $\mathbf{X}$ はそれぞれ，$\mathbf{T}^*$ と $\mathbf{X}^*$ のスカラー倍なので，$\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}=0$ である．したがって，ベクトル $\mathbf{q}'=t\mathbf{T}+x\mathbf{X}$ に対して，

$$\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}' = (t\mathbf{T}+x\mathbf{X})\cdot(t\mathbf{T}+x\mathbf{X}) = t^2\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}+2tx\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}+x^2\,\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = t^2-x^2$$

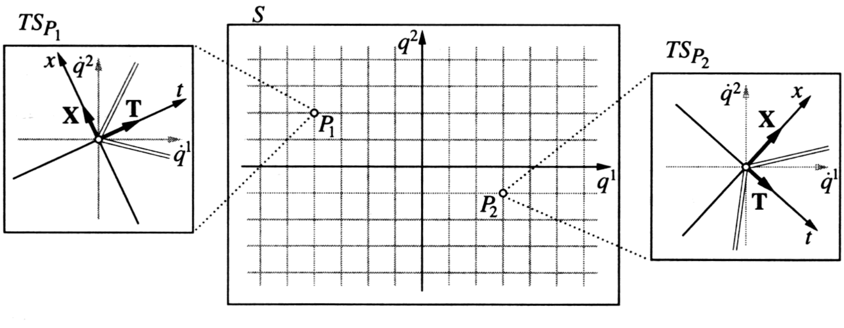
が成立する． **証明終**

TS_P におけるミンコフスキノルム

第2章でもしたように，TS_P のベクトル $\mathbf{q}'$ に対して，時間的，空間的，光的ベクトルの区別と，ベクトルのミンコフスキノルムを

$\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'>0$	$\mathbf{q}'$ は時間的	$\Vert\mathbf{q}'\Vert=\sqrt{\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'}$
$\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'<0$	$\mathbf{q}'$ は空間的	$\Vert\mathbf{q}'\Vert=\sqrt{-\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'}$
$\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'=0$	$\mathbf{q}'$ は光的	$\Vert\mathbf{q}'\Vert=0$

で導入する．



各接平面の新しい基底

上の図は，基底 $\{\mathbf{T},\mathbf{X}\}$ と未来光円錐が，接平面に依存してどのように変わるかを示している．ベクトル $\mathbf{T}$ と $\mathbf{X}$ は，計量 G で測ると単位ベクトルであるが，(ユークリッド的な見方では)長さがそれぞれ $1/\sqrt{\lambda_{\mathbf{T}}}$ と $1/\sqrt{-\lambda_{\mathbf{X}}}$ であるように見える．この違いは，光円錐の広がり方(つまり光の速さ)にも影

響する．広がりの傾きは，$\pm\|\mathbf{X}\|/\|\mathbf{T}\|$ であり，計量 G から計算される真の値は ±1 であるが，見た目では，$\pm\sqrt{-\lambda_{\mathbf{T}}/\lambda_{\mathbf{X}}}$ であるかのように見える．(これが，光円錐が，t 軸，x 軸からユークリッド的に測って 45° に見えない理由である．)

各接平面に慣性座標系がある

各接平面ごとに，時計で測る通常の時間，定規で測る通常の長さと値が一致するような座標をとることができる．したがって，各接平面には慣性座標系が導入できる．接平面 TS_P は，おおざっぱに言って，P のごく局所的な状況を拡大して見た平面であるから，S 自身にも，少なくとも P の十分に小さな近傍には，近似的に時計と定規に一致するような座標を導入することができる．この意味で，S には物理的に意味のある座標がある．

例: ドジッター時空

以前に調べたドジッター時空は，この定理のよい例である．ドジッター計量は

$$G(q^1,q^2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\cosh^2 q^1\end{pmatrix}$$

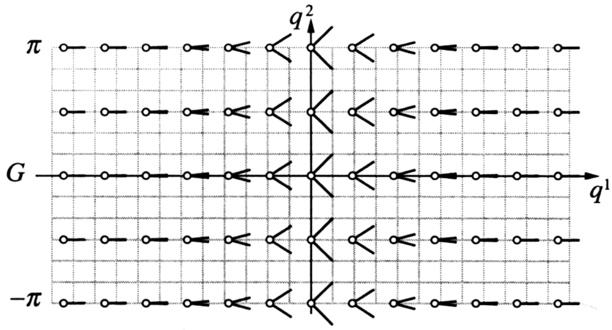
であり，その固有値は $\lambda_{\mathbf{T}}=1$ と $\lambda_{\mathbf{X}}=-\cosh^2 q^1$ である．行列 G は最初から (誘導された $(\dot{q}^1,\dot{q}^2)$ で) 対角であるので，固有ベクトルはこれらの座標軸の方向を向いている．この座標を用いると，基底となる固有ベクトルは，

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \text{および}\qquad \mathbf{X}=\frac{1}{\cosh q^1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

となる．誘導された座標では，光円錐の広がりの傾きは

$$\pm\sqrt{-\frac{\lambda_{\mathbf{T}}}{\lambda_{\mathbf{X}}}}=\frac{\pm1}{\cosh q^1}=\pm\operatorname{sech} q^1$$

であるが，これは 5.3 節で得た結果と一致する．



4 次元時空

4 次元時空 S についても，定理 6.4 に対応する定理が成立する．つまり，各接空間 TS_P において，適当な座標 (t,x,y,z) をとると，

$$\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'=t^2-x^2-y^2-z^2$$

となる．これは主軸定理の帰結である．主軸定理とは，$\mathbf{R}^n$ 上の任意の 2 次形式 $Q(\mathbf{y})$ について，適当な座標 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ を選ぶと，Q の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ を用いて (固有方程式の重根はその重複度だけ数える)，

$$Q(\mathbf{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

と書けることを主張するものだった．ここで，$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を適当に定数倍したものを $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ とすると，

$$Q(\mathbf{y}) = \pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm \cdots \pm z_n^2$$

となる．ここで，z_i^2 の前の符号は，λ_i の符号と一致する．主軸定理の証明は，代数または線型代数の教科書の中に見つかるだろう．

練習問題

1. 双曲平面 H で，直線 $q^1 = c,\ q^2 = e^s$ は測地線方程式を満たすが，おなじ直線の素朴な助変数表示 $q^1 = c,\ q^2 = t$ は満たさないことを示せ．
2. 双曲平面 H における助変数表示された曲線 $\mathbf{q}(t) = (c - r\sin t, r\cos t)$ の速さ $\|\mathbf{q}'\|$ を計算し，この助変数表示が測地線ではありえないことを示せ．
3. (a) 双曲平面 H における助変数表示された曲線 $\mathbf{q}(s) = (c + r\tanh s, r\,\mathrm{sech}\, s)$ が，$r > 0$ および任意の c に対して，測地線方程式を満たすことを示せ．
   (b) 曲線 $\mathbf{q}(s)$ の $s = s_1$ から $s = s_2$ までの長さが $|s_2 - s_1|$ であることを示せ．なぜ測地線全体では長さが無限大になるのか説明せよ．
4. 双曲平面 H において，曲線 $\mathbf{q}(t) = (q^1(t), q^2(t))$ が測地線であるとき，任意の β に対し，曲線 $\mathbf{q}_\beta(t) = (\beta + q^1(t), q^2(t))$ もまた測地線であることを示せ．
5. 常微分方程式系の解の存在と一意性の定理から，双曲平面 H 上の指定された点を指定さた向きに通過する測地線が一意的に存在する．すなわち，条件

   $$\mathbf{q}(0) = (a^1, a^2), \qquad \mathbf{q}'(0) = (b^1, b^2).$$

   を満たす測地線が一意的に存在する．この測地線 $\mathbf{q}(t)$ の式を，a^1, a^2, b^1, b^2 で具体的に書き表せ．
6. (a) 混合リーマン曲率テンソル

   $$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}$$

   を双曲平面 H について計算し，さらに $R_{hjkl} = g_{ih} R^i_{jkl}$ を計算せよ．
   (b) 双曲平面 H 上でガウス曲率 $K = R_{1212}/g$ が恒等的に -1 であることを示せ．
7. この問では，定理 6.4 を，4 次元時空 $\mathbf{R}^4$ の場合に拡張したものを，もとの定理の証明の議論を自然に拡張することにより，証明する．行列 G を 4×4 の実対称行列で，1 個の正の固有値 λ_0 と 3 個の互いに異なる負の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を持つとする．これらの固有値に対応する固有ベクトルを，それぞれ $\mathbf{T}^*(= \mathbf{X}_0^*)$, $\mathbf{X}_1^*$, $\mathbf{X}_2^*$, $\mathbf{X}_3^*$ とする．これらの固有ベクトルを，次のように定数倍したものを考える．

$$\mathbf{X}_0=\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}\sqrt{(X_0^*)^t X_0^*}}\mathbf{X}_0^*,\quad \mathbf{X}_\alpha=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_\alpha}\sqrt{(X_\alpha^*)^t X_\alpha^*}}\mathbf{X}_\alpha^*,\quad \alpha=1,2,3.$$

ここで，X_j^* は，$\mathbf{X}_j^*$ の成分をとってきて，$\mathbf{R}^4$ の標準的基底に関する成分とみなして得られる列ベクトルである.

(a) 定数倍した後の4個の固有ベクトルが，互いに，定理6.4の証明の意味で G-直交する，すなわち，$i,j=0,1,2,3$ $(i\neq j)$ に対して $\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{X}_j=(X_i^*)^t GX_j=0$ であることを示せ.

(b) 固有ベクトルに対して，$\mathbf{X}_0\cdot\mathbf{X}_0=1$ および，$\alpha=1,2,3$ に対して $\mathbf{X}_\alpha\cdot\mathbf{X}_\alpha=-1$ であることを示せ.

(c) 組 $\mathcal{B}=\{\mathbf{X}_0,\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3\}$ が $\mathbf{R}^4$ の基底をなすことを示せ.

(d) 任意の $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{Y}$ の，基底 $\mathcal{B}$ のもとでの成分を (y^0,y^1,y^2,y^3) とする．このとき，

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{Y}=(y^0)^2-(y^1)^2-(y^2)^2-(y^3)^2.$$

であることを示せ.

6.4　写像

2人の観測者

ここまでで，一人一人の観測者が，それぞれ任意の座標系を使って，どのように時空の事象を記述し分析するかを見てきた．しかし，相対論とは多数の観測者が，事象に対してそれぞれ**異なる**見方をするときに，それらを統合して矛盾のない客観的真実を得るためのものである．そこで，ここでもう一度，時空の同じ部分を観測する2人の観測者 G と R を考えることにしよう．しかし，今後は，この2人が，慣性座標系を持つガリレイ的観測者であるとは仮定しないことにしよう．単に，2人は，任意の(曲率を持つかもしれない)座標系

領域	座標	計量
G	$\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)$	$\gamma_{ij}(\boldsymbol{\xi})$
R	$\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3,x^4)$	$g_{ij}(\mathbf{x})$

を用いて事象をラベルしていると仮定しよう.

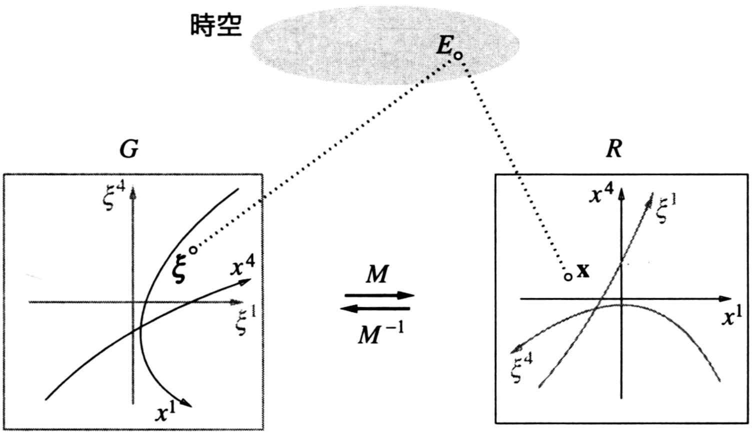
写像 $M:G\to R$ と $M^{-1}:R\to G$

第1章で，座標系 G, R は，時空の事象を記述する2つの言語であるという比喩を使った．座標系 G, R は同じ事象を記述するので，一方の言語を他方に翻訳する辞書の役割を果たす，対をなす2つの写像

$$M:G\to R,\qquad M^{-1}:R\to G$$

が存在するはずである．座標系 G の点 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^i)$ は，時空のある事象 E を表す．座標系 R で同じ事象を表す点を $\mathbf{x}=(x^k)$ としよう．すると，双方向に

それぞれ $\mathbf{x} = M(\boldsymbol{\xi})$,$\boldsymbol{\xi} = M^{-1}(\mathbf{x})$ と翻訳できる．



座標系 G と R は本当は 4 次元なのだが，写像 M をわかりやすく表示するために，上の図では平面として描いた．図に示したように，2 つの座標系の間の関係は任意で，特に，非線型であってもよい．

座標関数は滑らか

写像 M を考えたとき，値域の座標の各成分 x^k は定義域の座標 $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ の実数値関数である．同様に，写像 M^{-1} を考えたとき，各成分 ξ^i は (x^1, x^2, x^3, x^4) の関数である．すなわち，

$$M : \begin{cases} x^1 = f^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \\ x^2 = f^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \\ x^3 = f^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \\ x^4 = f^4(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \end{cases} \qquad M^{-1} : \begin{cases} \xi^1 = \varphi^1(x^1, x^2, x^3, x^4), \\ \xi^2 = \varphi^2(x^1, x^2, x^3, x^4), \\ \xi^3 = \varphi^3(x^1, x^2, x^3, x^4), \\ \xi^4 = \varphi^4(x^1, x^2, x^3, x^4). \end{cases}$$

である．これらをまとめて，

$$x^k = f^k(\xi^i), \qquad \xi^i = \varphi^i(x^k)$$

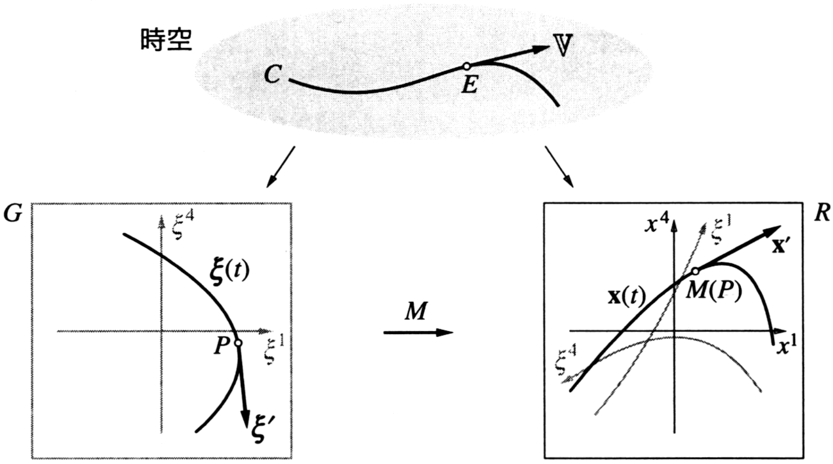
と表す．ここで，写像 M と M^{-1} は滑らかな写像であると仮定する．つまり，各 f^k は ξ^i の滑らかな関数であり，各 φ^i は x^k の滑らかな関数である．

接ベクトルと微分

接ベクトルの座標を翻訳する

観測者 G は，事象をラベルするためには座標 ξ^i を使い，各接空間のベクトルをラベルするためには誘導された座標 $\dot{\xi}^i$ を使う．同様に，座標 x^k から誘導された座標 $\dot{x}^k$ が，R の各接空間で使われる．それでは，もとの座標が $M : G \to R$ で翻訳されるときに，誘導された座標はどのように翻訳される

のだろうか?



この問題を考えるために，まず，観測者 G, R が，時空の中の曲線 C の同じ接ベクトル $\mathbb{V}$ を，それぞれどのように記述するかを考えることから始めてみよう．曲線 C が G の座標系で

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \xi^i(t)$$

と記述されるなら，ラテン文字の座標系 R のほうでは，

$$\mathbf{x}(t) = M(\boldsymbol{\xi}(t)) = f^k(\xi^i(t)) = x^k(t)$$

と表される．観測者 G の座標系では，接ベクトルは，

$$\boldsymbol{\xi}' = \left(\frac{d\xi^i}{dt}\right)$$

であるのに対し，R では，

$$\mathbf{x}' = \left(\frac{dx^k}{dt}\right) = \left(\frac{\partial f^k}{\partial \xi^1}\frac{d\xi^1}{dt} + \frac{\partial f^k}{\partial \xi^2}\frac{d\xi^2}{dt} + \frac{\partial f^k}{\partial \xi^3}\frac{d\xi^3}{dt} + \frac{\partial f^k}{\partial \xi^4}\frac{d\xi^4}{dt}\right)$$

である．ここで，関数 $x^k = f^k(\xi^i(t))$ を t で微分するのに，多変数の合成関数の微分法を用いた．これは，$k = 1, 2, 3, 4$ の 4 個の等式を含んでいるが，行列の積を使うと，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx^1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx^4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial f^1}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial f^1}{\partial \xi^4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^4}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial f^4}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial f^4}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial f^4}{\partial \xi^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d\xi^1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d\xi^4}{dt} \end{pmatrix}$$

と，ただ1つの式にまとめられる．

M の微分は誘導された座標の写像

この式が，一方の接空間に誘導された座標から他方に誘導された座標への翻訳の問題の答えである．つまり，翻訳は線型写像

$$dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$$

によって行われる．この線型写像を定める行列は

$$dM_P = \left(\frac{\partial f^k}{\partial \xi^i}\right)_P$$

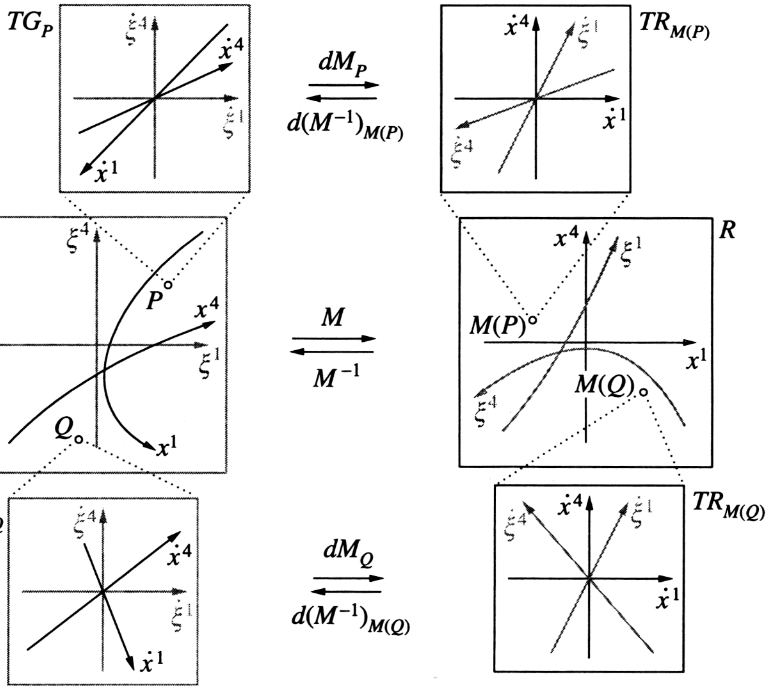
である．この行列は明らかにもとの写像 M から決まっている．実際，M を決める座標関数を偏微分したものが行列の成分である．各成分は $\boldsymbol{\xi}$，の関数であるが，接空間 TG_P のベクトルにかけるべき行列を得るには，関数の $\boldsymbol{\xi} = P$ における値をとる必要がある．下付き文字 P がこのことを表している．この行列および行列の定める線型写像を，**M の P における微分** (differential of M at P) という．

以下に，これまでに明らかになったことをまとめよう． まとめ

- 座標系 G があったとき，G の各点 P に対して，接ベクトル空間 TG_P を考えることができる．
- 座標系 G の座標 ξ^i は，新しい座標 $\dot{\xi}^i$ を各接空間 TG_P に誘導する．
- 座標の翻訳を行う任意の写像 $M: G \to R$ に対して，**線型写像の族**

$$dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$$

が誘導され，これが接空間に誘導された座標の間の翻訳を行う写像 dM_P は，G の点 P を添え字とする族をなす．



上の図は，まとめと次の命題を図解している．写像 M の各点における微分は正則であり，微分の逆写像は，もとの写像 M の逆写像の微分である．

命題 6.3 $(dM_P)^{-1} = d(M^{-1})_{M(P)}$.

証明： 恒等式 $M^{-1}(M(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\xi}$ を用いる．座標を用いると，この恒等式は

$$\varphi^j(f^k(\xi^i)) = \xi^j$$

である．この等式の両辺を ξ^i について偏微分すると，

$$\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^1}\frac{\partial f^1}{\partial\xi^i} + \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^2}\frac{\partial f^2}{\partial\xi^i} + \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^3}\frac{\partial f^3}{\partial\xi^i} + \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^4}\frac{\partial f^4}{\partial\xi^i} = \frac{\partial\xi^j}{\partial\xi^i} = \delta^j_i$$

となる．右辺が δ^j_i (i と j が等しければ 1, そうでなければ 0) となるのは，変数 $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ が独立だからである．この式は，和の規約を用いると，

$$\left(\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^k}\right)_{M(P)}\left(\frac{\partial f^k}{\partial\xi^i}\right)_P = \delta^j_i$$

となる．ここで，$\partial f^k/\partial\xi^i$ は点 $(\xi^i) = P$ における値 $\partial\varphi^j/\partial x^k$ は点 $(x^k) = M(P)$ における値をとっている．左辺の形は普通の行列の積の形になっており，右辺の δ^j_i は単位行列 I の成分表示なので，行列についての等式

$$d(M^{-1})_{M(P)} \cdot dM_P = I$$

が得られる．　**証明終**

写像 M, M^{-1} を座標で書いた式を，関数の名前 (f^k と φ^i) を値域の座標 (それぞれ x^k と ξ^i) に置き換えて書くと，

$$x^k = x^k(\xi^i), \qquad \xi^j = \xi^i(x^l)$$

である．このとき微分は

$$dM_P = \left(\frac{\partial x^k}{\partial\xi^i}\right), \qquad d(M^{-1})_{M(P)} = \left(\frac{\partial\xi^j}{\partial x^l}\right)$$

となる．上の命題から，この2つの行列は (対応する点で値をとったとき) 互いに逆となるので，

$$\frac{\partial x^k}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l} = \delta^k_l, \qquad \frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\xi^i} = \delta^j_i$$

が成立する．この線型写像の間の逆写像の関係は，このように書くと視覚的に非常にわかりやすいので，(混乱を生じさせる可能性もあるが) 今後は，関数の名前として，その値域の座標と同じ名前を使うことにする．このような記法には前例がある．これらの式は，一変数関数の逆関数 (例えば，$x = \ln y$, $y = e^x$) についての見慣れた式

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1$$

を多変数に拡張したものにほかならない．

計量

特殊相対性は接空間で成立

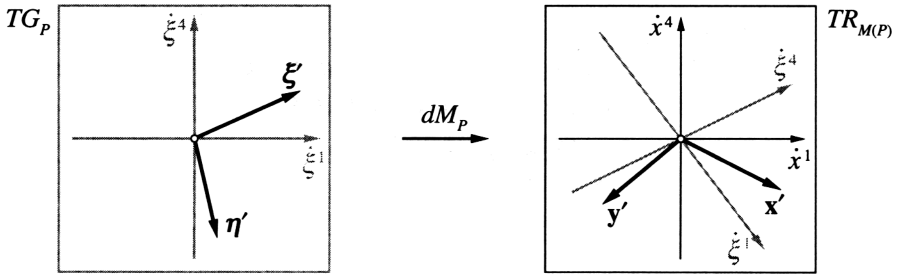
いつもと同じように，写像 $M : G \to R$ が，事象の G での座標を R の座標に翻訳するとする．座標系 G の各点 P において，微分 dM_P は，接ベクトルの座標の G から R への翻訳を行う．前節の定理によれば，任意の G や R に

対しても，その接空間には，特殊相対論にでてくるような**慣性**座標系が導入される．そこで，次のような仮定をおく．

基本的な仮定: 慣性座標系 $TG_P, TR_{M(P)}$ が線型写像

$$dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$$

で結びついているとき，特殊相対論のすべての変換法則は，慣性座標系 TG_P, $TR_{M(P)}$ の間で成立する．



しかし，特殊相対論のすべての法則は，ただ1つの事実から導かれる帰結である．その事実とは，写像 dM_P が内積を保存する，つまり，$\boldsymbol{\xi}'$, $\boldsymbol{\eta}'$ を TG_P に属する接ベクトル，$\mathbf{x}' = dM_P\boldsymbol{\xi}'$, $\mathbf{y}' = dM_P\boldsymbol{\eta}'$ を $TR_{M(P)}$ における対応するベクトルとしたとき，

$$\underset{TG_P \text{ の内積}}{\boldsymbol{\xi}' \cdot \boldsymbol{\eta}'} = \underset{TR_{M(P)} \text{ の内積}}{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'}$$

ということである．

接空間 TG_P の内積は G の計量 $\Gamma_P = (\gamma_{ij}(P))$ から，接空間 $TR_{M(P)}$ の内積は R の計量 $G_{M(P)} = (g_{kl}(M(P)))$ から定まる．（そう，ここで記号の衝突が発生した．文字 G が，ラテン文字の座標系での計量と，ギリシャ文字の座標系そのものの両方を表すことになってしまった．しかし，文脈からどちらを意味するかは明らかだろう．）したがって，内積の間の等式は，行列の積を用いて

計量の間の関係を行列の式で書く

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\xi}')^t\,\Gamma_P\,\boldsymbol{\eta}' &= (\mathbf{x}')^t\,G_{M(P)}\,\mathbf{y}' \\ &= (dM_P\,\boldsymbol{\xi}')^t\,G_{M(P)}\,dM_P\,\boldsymbol{\eta}' \\ &= (\boldsymbol{\xi}')^t(dM_P)^t\,G_{M(P)}\,dM_P\,\boldsymbol{\eta}'\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$(\boldsymbol{\xi}')^t\left[\Gamma_P - (dM_P)^t\,G_{M(P)}\,dM_P\right]\boldsymbol{\eta}' = 0$$

であるが，ベクトル $\boldsymbol{\xi}'$ と $\boldsymbol{\eta}'$ は任意なので，角括弧の中の式がゼロになるしかない．つまり，

$$\Gamma_P = (dM_P)^t\,G_{M(P)}\,dM_P$$

が成立する．これが，変換 $M : G \to R$ から誘導される，計量の間の関係である．これを，G, R そのものが，ともにミンコフスキ計量

$$J_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を持つ慣性座標系である場合と比べよう．座標系の間の翻訳であるローレンツ変換 $L : G \to R$ に対して，

$$J_{1,3} = L^t\, J_{1,3}\, L$$

となる．

上で導いた式 $\Gamma_P = (dM_P)^t\, G_{M(P)}\, dM_P$ は，TG_P の計量を $TR_{M(P)}$ の計量で表すものである．これは，写像 $dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$ とは逆向きであるが，もし $TR_{M(P)}$ の計量を TG_P の計量で表したいなら，上の式を逆に解くだけでよい．結果は

$$G_{M(P)} = \left(dM_P^{-1}\right)^t\, \Gamma_P\, dM_P^{-1}$$

となる．（ここで，行列の逆の転置は転置の逆に等しいということを用いた．）

計量の間の関係を座標の式で書く

ここで，計量 Γ_P と $G_{M(P)}$ 間の関係を，座標を用いて書くとどうなるかを見てみよう．まず，接空間 TG_P の2つの接ベクトルを

$$\boldsymbol{\xi}' = \frac{d\xi^i}{dt}, \qquad \boldsymbol{\eta}' = \frac{d\eta^j}{dt},$$

対応する $TR_{M(P)}$ の接ベクトルを

$$\mathbf{x}' = \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{d\xi^i}{dt}, \qquad \mathbf{y}' = \frac{dy^l}{dt} = \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\frac{d\eta^j}{dt}$$

とする．（このベクトル $\mathbf{y}'$ の式は，式 $\mathbf{y}(t) = (x^l(\eta^j(t)))$ に多変数の合成関数の微分法を適用して得られる．）内積が等しいという基本的な仮定を，これらを使って座標で表すと，

$$\gamma_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\eta^j}{dt} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\frac{d\eta^j}{dt}$$

である．共通因数を取り出して整理すると，

$$\left[\gamma_{ij} - g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\right]\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\eta^j}{dt} = 0$$

を得る．ここでも，ベクトル $d\xi^i/dt,\, d\eta^j/dt$ が任意であることから，角括弧の中の式がゼロであることが結論できる．つまり，

$$\gamma_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}$$

である．これが，式 $\Gamma = dM^t\, G\, dM$ を座標で書いたものである．確かに，行列 $dM = (\partial x/\partial \xi)$ が現れている．逆向きの関係は，逆行列 $dM^{-1} = (\partial \xi/\partial x)$ を用いて

$$g_{kl} = \gamma_{ij}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}$$

となる．

共変性と反変性

共変的な量

ここで，いったん立ち止まって，特殊相対性の1つの要素として3.1節で導入した**共変性の原理**を思い出すことにしよう．この原理は，意味のある物理的法則は，共変的な量で記述されるということを主張する．共変的な量の，具体的な値は，どのような座標系で測られるかによって決まり，座標系を変更すると，その値は，座標そのものと同じ変換を受ける．(おおざっぱに言って，**共変的**とは "座標と同じ変化をする" という意味だと考えてよい.)

一般共変的な量

この原理は，任意の座標系を用いることが許される一般相対論において，より重要になる．しかし，その場合の座標変換は一般には非線型なので，"座標と同じ変化をする" というのがどういう意味かをはっきりさせておかなければならない．実は，今後考える物理量のほとんどは，接空間 $TG_P, TR_{M(P)}$ 上で定義される．2つの接空間の座標は**線型**変換 $dM_P : TG_P \rightarrow TR_{M(P)}$ で関係づけられているが，一般共変性はこのことに対応して定義される．**一般**共変的な量とは，その変換の法則が dM_P で書き表せるような量のことをいう．

一般共変的な量について十分に議論するためには，テンソルを考えないわけにはいかない．しかし，テンソルについては次節で考察することにして，とりあえずは，すでに出てきた1つの例，すなわち，ベクトルと計量の変換のしかたの違いだけに注目することにしよう．前者の変換には dM_P を使い，後者には dM_P^{-1} を使う．このことを

$$\text{ベクトルの変換:}\quad \frac{d\xi^i}{dt} \xrightarrow{\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\right)} \frac{dx^k}{dt},$$

$$\text{計量の変換:}\quad \gamma_{ij} \xrightarrow{\left(\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right)} g_{kl}$$

と表そう．この式は，γ_{ij} **がどのように** g_{kl} に変換されるかについては何も言っていない．単に，変換に $dM_P^{-1} = (\partial\xi^i/\partial x^k)$ が出てくるということを言っているだけである．

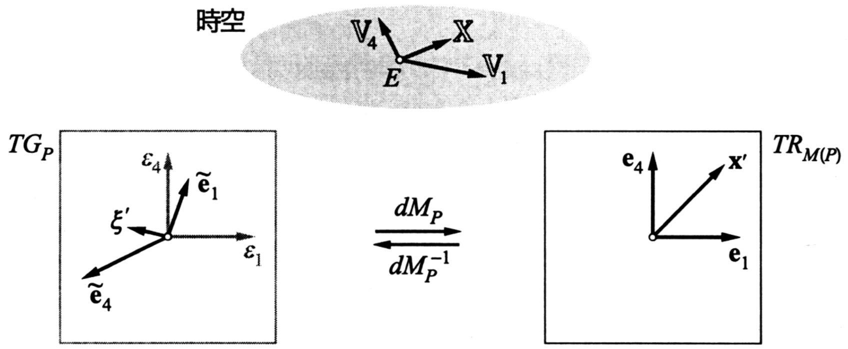
基底はどう変換するか？

接空間 $TG_P, TR_{M(P)}$ 上に誘導された座標で書かれたすべての量は，結局，これらの空間の，誘導された基底を用いて書くことができる．したがって，最も基本的な変換は，誘導された基底の間の変換だと考えられる．そこで，**基底をなすベクトルはどのように変換するか**, を問うことにしよう．

まず，この問いの意味をはっきりさせなければならない．それぞれの接空間の基底を

$$TG_P : \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}, \qquad TR_{M(P)} : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$$

としよう．



この2組は，異なるベクトル空間の基底なので，行列で直接に関係づけることはできない．しかし，各 $\mathbf{e}_k$ は時空上のベクトル $\mathbb{V}_k$ を表しており，この時空上のベクトルは，接空間 TG_P では，$\widetilde{\mathbf{e}}_k = dM_P^{-1}(\mathbf{e}_k)$ で表されている．ベクトルの組 $\{\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3, \widetilde{\mathbf{e}}_4\}$ は，TG_P のもう1つの基底である．これが基底であることは，写像 dM_P^{-1} に逆があることから保証される．この新しい基底のほうは，同じ空間の最初の基底 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ と直接に比べることができる．つまり，ある行列 α_k^i によって，

$$\widetilde{\mathbf{e}}_k = \alpha_k^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

のように，もともとの基底から新しい基底を作ることができる．これが，まさに求めていた変換である．

$\dot{\xi}^i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \dot{x}^k \widetilde{\mathbf{e}}_k$

準備として，まず，TG_P の任意のベクトル $\boldsymbol{\xi}'$ の，2つの基底での座標を求めよう．ベクトル $\boldsymbol{\xi}'$ の $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ に関する座標を $(\dot{\xi}^i)$ とする．またベクトル $\mathbf{x}'$ をいつものように $\mathbf{x}' = dM_P(\boldsymbol{\xi}')$ と定義し，その $\mathbf{e}_k$ に関する座標を $\dot{x}^k$ とする．すると，

$$\dot{\xi}^i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\xi}' = dM_P^{-1}(\mathbf{x}') = dM_P^{-1}(\dot{x}^k \mathbf{e}_k) = \dot{x}^k dM_P^{-1}(\mathbf{e}_k) = \dot{x}^k \widetilde{\mathbf{e}}_k$$

という関係が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{\xi}'$ の $\widetilde{\mathbf{e}}_k$ に関する座標は，$\mathbf{x}' = dM_P(\boldsymbol{\xi}')$ の $\mathbf{e}_k$ に関する座標に等しい．これは特に驚くべきことではない．なぜなら，$\boldsymbol{\xi}'$ と $\mathbf{x}'$ は，時空上の1つのベクトル $\mathbb{X}$ を，それぞれ TG_P と $TR_{M(P)}$ の中で表現したものだからである．

命題 6.4　$\widetilde{\mathbf{e}}_k = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \boldsymbol{\varepsilon}_i.$

証明：式 $\dot{\xi}^i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \dot{x}^k \widetilde{\mathbf{e}}_k$ の左辺で，dM_P^{-1} を用いて $\dot{\xi}^i$ を $\dot{x}^k$ で表すと，

$$\dot{x}^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \boldsymbol{\varepsilon}_i = \dot{x}^k \widetilde{\mathbf{e}}_k$$

となる．ここで座標 $\dot{x}^k$ は任意なので，結論が導かれる．　**証明終**

共変的な量，反変的な量

基底 $\widetilde{\mathbf{e}}_k$ と基底 $\mathbf{e}_k$ とをあえて区別しないことにすると，変換の3番目の例が得られる．すべてを挙げると次のようになる．

$$\text{基底:}\quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \xrightarrow{\left(\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right)} \mathbf{e}_k,$$

$$\text{ベクトル:}\quad \frac{d\xi^i}{dt} \xrightarrow{\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\right)} \frac{dx^k}{dt},$$

$$\text{計量:}\quad \gamma_{ij} \xrightarrow{\left(\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right)} g_{kl}.$$

計量は，基底と同様に(つまり，同じ行列で)変換するので共変的(covariant)であるという．逆に，接ベクトルは，基底と反対に(つまり，逆行列で)変換するので，反変的(contravariant)であるという．つまり，ここでは基底の変換が標準的な変換であると考えることにした．基底と同様に変換するすべての量を**共変的**であるといい，反対に変換するすべての量を**反変的**であるという．

共変，反変を示す添え字

ここで，共変的な量には下付き添え字があり，反変的な量には上付き添え字があることに注意しよう．この対応はつねに成り立っており．そして，2つのことに起因している．第一に，基準となるもの，つまり基底ベクトル $\mathbf{e}_k$ に下付き添え字をつけたことであり，第二に，和の規約から，$\mathbf{x}' = x^k \mathbf{e}_k$ のように，ベクトル(反変的な量の典型的な例)の座標が上付き添え字を持たざるを得なくなったことである．

練習問題

1. 写像 $M : G \to R$ が線型写像であり，$x^k = a^k_i \xi^i$ であるとする．このとき，G の各点 P での微分が $dM_P = M$ であることを示せ．
2. 次の写像 $M : G \to R$ について，以下の作業を行え．1番目は，平面の極座標を定める写像 $M : (r, \theta) \to (x, y)$,2 番目は，3 次元空間の球座標を定める写像 $M : (r, \varphi, \theta) \to (x, y, z)$ である．

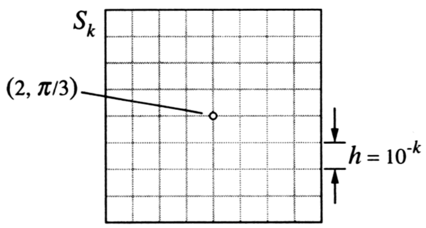
$$M : \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta; \end{cases} \qquad M : \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

(a) 写像 M の逆写像 $M^{-1} : R \to G$ を具体的に求めよ．1番目の写像では，2つの関数 $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$ を，2番目の写像では，3つの関数 $r = r(x, y, z)$, $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\theta = \theta(x, y, z)$ を求めればよい．

(b) 写像 M の微分 dM_P を求め，その結果から，逆行列 $(dM_P)^{-1}$ を直接計算せよ．行列式 $\det dM_P$ を求めよ．

(c) 写像 M^{-1} の微分 dM_Q^{-1} を求め，dM_Q^{-1} が，$Q = M(P)$ のときには，問(b)で逆行列として求めた $(dM_P)^{-1}$ に等しいことを示せ．(これは自明なことではない．なぜなら，2つの行列は異なる変数の組で書かれているからである．写像 M または M^{-1} の便利な方を用いて，一方の組の変数を他方に書き換えなければならない)

3. 写像 $M : G \to R$ を練習問題3で定義した極座標の写像とし，点 $P = (r, \theta) = (2, \pi/3)$ を考える．
   (a) 微分 dM_P を計算し，$(\dot{r}, \dot{\theta})$ の空間の格子を微分 $dM_P : (\dot{r}, \dot{\theta}) \to (\dot{x}, \dot{y})$ で写した像を描け．この絵から，写像 dM_P が，$(\dot{r}, \dot{\theta})$ 平面を，$\dot{\theta}$ 方向に2倍に拡大し，$\pi/3$ ラジアンだけ回転していることがわかるはずである．



微分は写像の微視的な図を与える

   (b) ここで (r, θ) 平面の点 $(r, \theta) = (2, \pi/3)$ を中心とする，正方形の列 S_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ を考えよう．正方形 S_k の一辺の長さを $8h$ ただし $h = 10^{-k}$ である．この正方形を，一辺の長さが h の小正方形で格子状に分割する．この格子の，(x, y) 空間における像 $M(S_k)$ を描け．ただし，各 S_k ごとに適当に拡大縮小して，すべての S_k の大きさが同じになるようにせよ．この図を，点 $P = (2, \pi/3)$ の近くでの写像 M の作用の，拡大率 $1/h = 10^k$ での**微視的な図**(microscopic view)という．この微視的な図を，微分 dM_P の像と比較せよ．描いた図から，拡大率が増加するにつれて，微分の図が微視的な図に近づいていくことがわかるはずである．

4. 写像 $M : G \to R$ を，上で定義した極座標を定める写像とし，任意の点 $P = (r, \theta)$ を考える．このとき，微分 $dM_P : (\dot{r}, \dot{\theta}) \to (\dot{x}, \dot{y})$ は，$(\dot{r}, \dot{\theta})$-平面を，$\dot{\theta}$ 方向に r 倍に拡大し，θ ラジアン回転することを証明せよ．

観測者 G が R の z 軸の方向に等加速度直線運動しているときに，G と R を関係づける写像 $M : G \to R$, $M^{-1} : R \to G$ は

$$M : \begin{cases} t = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha} \sinh \alpha\tau, \\[2ex] z = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha} \cosh \alpha\tau; \end{cases} \qquad M^{-1} : \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\alpha} \tanh^{-1}\left(\dfrac{t}{z}\right), \\[2ex] \zeta = \dfrac{1}{2\alpha} \ln\left(\alpha^2(z^2 - t^2)\right). \end{cases}$$

で与えられる(4.2節参照)．以下の練習問題は，これらの写像に関するものである．

5. (a) 任意の点 P において，$dM_P = e^{\alpha\zeta} H_{\alpha\tau}$ であることを示せ．ここで H_u は，ミンコフスキ空間の，双曲角 u の双曲回転である．
   (b) 行列式 $\det dM_P$ と微分の逆写像 $(dM_P)^{-1}$ を計算せよ．
   (c) 任意の点 $Q = (t, z)$ で，逆写像の微分 dM_Q^{-1} とその行列式 $\det dM_Q^{-1}$ を計算せよ．関係 $Q = M(P)$ が成り立つとき $dM_Q^{-1} = (dM_P)^{-1}$ であることを示せ．

6. (a) 加速度が $\alpha = 1$ の場合に，点 $P = (\tau, \zeta) = (-2, 1)$ における微分

$dM_P : (\dot{\tau}, \dot{\zeta}) \to (\dot{t}, \dot{z})$ による，$(\dot{\tau}, \dot{\zeta})$ 空間の格子の像を描け．

(b) 練習問題 3(b)のように，細かい格子 S_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を考える．ただし，S_k の中心は点 $(\tau, \zeta) = (-2, 1)$ とする．この格子の，(t, z) 空間における像 $M(S_k)$ を描け．ただし，各 S_k ごとに適当に拡大縮小して，すべての S_k の大きさが同じになるようにせよ．点 $P = (-2, 1)$ の近くでの写像 M の作用の，拡大率 $1/h = 10^k$ でのこの微視的な図を，微分 dM_P の像と比較せよ．

7. 座標系 R を，標準的な内積 $J_{1,1}$ つまり，$g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = -1$ を持つ慣性座標系とする．写像 M を用いて，座標系 G に計量 γ_{ij} を定めよ．つまり，$\Gamma = (\gamma_{ij})$ に対して，$\Gamma_P = dM_P^t J_{1,1} dM_P$ とすればよい．(注:: 座標軸に対応する添え字を，$x^1 = t$, $x^2 = z$,$\xi^1 = \tau$, $\xi^2 = \zeta$ とせよ.)

8. (a) 接空間 TG_P のベクトル $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\eta}$ のなす双曲角の大きさが，誘導された計量 Γ_P を用いても，通常のミンコフスキ計量 $J_{1,1}$ を用いても，同じ値になることを示せ．この点では，座標系 G は双曲平面(命題6.2)に似ており，この性質を持つ原因もまた同じで，すなわち，誘導された計量が，$\Gamma_P = \lambda J_{1,1}$ のようにミンコフスキ計量の定数倍になっていることである．ただし，$\lambda = \lambda(\tau, \zeta)$ は点 $P = (\tau, \zeta)$ に依存する関数である．いまの場合に，この関数 λ を求めよ．

(b) 問(a)の結果を用いて，接空間 TG_P の光的ベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\dot{\tau}, \dot{\zeta})$ が，ミンコフスキ計量から定まる光的ベクトルと同じであること，つまり $\dot{\zeta} = \pm\dot{\tau}$ を示せ．

9. 前の練習問題 8 で座標系 G に誘導された計量 γ_{ij} に関して，逆行列 γ^{kl}, クリストッフェルの記号 $\Gamma_{ij,h}$, Γ_{ij}^k, リーマンテンソル R_{ijk}^l, R_{hijk}, ガウス曲率 $K = R_{1212}/\gamma$ を求めよ．

10. (a) 座標系 G での測地線方程式は

$$\frac{d^2\tau}{du^2} + 2\alpha \frac{d\tau}{du}\frac{d\zeta}{du} = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{du^2} + \alpha\left(\frac{d\tau}{du}\right)^2 + \alpha\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 = 0$$

となることを示せ．

(b) 測地線を，座標系の縦方向，横方向に移動したものもまた測地線であることを示せ．すなわち，曲線 $\boldsymbol{\xi}(u) = (\tau(u), \zeta(u))$ が測地線であるとき，任意の p,q に対して

$$\boldsymbol{\xi}_{p,q}(u) = (p + \tau(u), q + \zeta(u))$$

もまた測地線であることを示せ．

(c) なぜ，G の任意の測地線 $\boldsymbol{\xi}(u)$ の像 $M(\boldsymbol{\xi}(u))$ は，R の測地線になっているのか．説明せよ．

11. (a) 次の曲線が G の測地線であることを示せ．これらの測地線と，それを座標軸の縦横方向に移動した測地線を描け．

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{ti}}(u) = \left(\frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\alpha u, \frac{1}{2\alpha}\ln(1-\alpha^2u^2)\right),$$

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{sp}}(u) = \left(\frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\frac{1}{\alpha u}, \frac{1}{2\alpha}\ln(\alpha^2u^2-1)\right).$$

(b) 曲線 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{ti}}$ と $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{sp}}$ は，それぞれ時間的，空間的であることを示せ．曲線 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{ti}}$ に沿った固有時間を求めよ．

(c) 測地線 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{ti}}$, $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{sp}}$ と，これを座標軸の縦横方向に移動させたものは，R のどのような測地線に対応しているか．

12. (a) 座標曲線 $\tau = k$ の弧長による助変数表示を求めよ．つまり，G の曲線 $\boldsymbol{\eta}(s) = (k, s(u))$ が $\|\boldsymbol{\eta}'\| \equiv 1$ を満たすような関数 $s(u)$

(b) この曲線 $\boldsymbol{\eta}(s)$ が G の測地線であることを示せ．

(c) 座標曲線 $\zeta =$ 定数 の適当な助変数表示をとって，これを測地線にすることができるか？ 考えを述べよ．

6.5 テンソル

テンソルは一般共変的な量

ここで，もともとの問題に戻ろう．どのようにすれば，多数の観測者が事象に対してそれぞれ**異なる**見方をするときに，それらを統合して矛盾のない物理の理論を作り出すことができるだろうか？ アインシュタインは，そのためには，観測者は一般共変的な量で事象を記述しなければならない，と主張した．アインシュタインにとって，一般共変的な量とは**テンソル**(tensor)のことだった．彼は，一般相対論の基礎を築いた論文に“一般共変的な方程式の定式化のための数学的準備”という章を設け，論文全体の半分近くを，テンソルを定義し性質を調べることに費やした [10, p. 120–142].[注5]

本質的には，テンソルとは，何個かの添え字を持つ量で，各座標系で定義され，ある座標系から別の座標系に移るときは，反変的または共変的な線型変換を受けるようなものである．これをもう少し厳密にするために，今までと同じように，時空の同じ部分を記述する 2 つの座標系

$$G \underset{M^{-1}}{\overset{M}{\rightleftarrows}} R, \qquad \xi^i = \xi^i(x^k), \quad x^k = x^k(\xi^i),$$

$$TG_P \underset{dM_P^{-1}}{\overset{dM_P}{\rightleftarrows}} TR_{M(P)}, \qquad \dot{\xi}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\dot{x}^k, \quad \dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\dot{\xi}^i$$

を考える．

定義 6.2 式

$$\overset{G}{T}{}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \longleftrightarrow \overset{R}{T}{}^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q},$$

で表される (p,q) **型のテンソル**とは，各座標系で定義される添え字のある量で，規則

$$\overset{R}{T}{}^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} = \overset{G}{T}{}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial \xi^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_p}}{\partial \xi^{i_p}}\frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^{l_1}}\cdots\frac{\partial \xi^{j_q}}{\partial x^{l_q}}$$

注5 訳注：和訳については訳者のノート参照．

に従って変換されるものである．このテンソルは，p **階反変**(contravariant of rank p) q **階共変**(covariant of rank q) である．(1,0) 型および (0,1) 型のテンソルはベクトルと呼ばれる．

添え字のある量が，この規則に従って変換するとき，その量は**テンソル的**(tensorial) であるという．この規則は実は簡単なものである．各共変添え字について，基底を変換するのと同じ行列をかけ，各反変添え字について，その行列の逆をかければよい．なお，正の反変階数を持つものも含め，**すべてのテンソルは "一般共変的"** である．ここでの共変的という言葉は，共変，反変を包含する広い意味で使われている．

言語と記号

テンソルがある開集合上で定義されていて，その値が点によって変わる，ということを強調したいときには，**テンソル場**(tensor field) という言葉を使うことにする．これからは，2 つの座標系があるときに，1 つのテンソルの 2 つの座標系での名前として，ϕ と f, γ と g のように，対応するギリシャ文字とラテン文字を使う場合がある．また，上の例のように，両方の座標系で同じ文字を使い，そのかわりに，文字の上に座標系を表す小さな文字をつけることもある．また，記号を簡明にするために，複数の添え字をまとめて，1 個の大文字で表してもよいことにする．つまり，$I = \{i_1 \cdots i_p\}$ とおき，同様に J, K, L を導入すると，

$$\overset{G}{T}{}^I_J \longleftrightarrow \overset{R}{T}{}^K_L \quad \text{がテンソルである条件は} \quad \overset{R}{T}{}^K_L = \overset{G}{T}{}^I_J \frac{\partial x^K}{\partial \xi^I} \frac{\partial \xi^J}{\partial x^L}$$

のように表現できる．ここで，$\partial x^K/\partial \xi^I$ は p 個の行列の積であり，各行列には，K と I に属するそれぞれ p 個の添え字のうちの 1 個ずつが含まれている．

例

これまでに出会った量のうち，テンソルの例になっているものを 2 つ挙げよう．

- 曲線の**接ベクトル** $\dfrac{d\xi^i}{dt} \longleftrightarrow \dfrac{dx^k}{dt}$ は反変ベクトルである．
- **計量** $\gamma_{ij} \longleftrightarrow g_{kl}$ は 2 階共変テンソルである．

これまでに曲面を調べる際に出会った，添え字のある量の多くがテンソル的であることを，以下のいくつかの命題で確かめる．一方，テンソル的でないという例外もいくつかあり，これらについても以下で調べる．

命題 6.5 2 つの座標系で矛盾なく定義された関数 $\varphi \longleftrightarrow f$ は，(0,0) 型テンソルである．

証明：

まず最初に，f は x^k の関数であり，φ は ξ^i の関数である．これらが，"矛盾なく定義された" ものであるとは，$f(x^k(\xi^i)) = \varphi(\xi^i)$ ということである．これは，テンソルの定義の規定する変換規則である．関数 f, φ には添え字がないので，かける行列もない． **証明終**

命題 6.6 関数 $\varphi \longleftrightarrow f$ の勾配は共変ベクトル $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \longleftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ である．

証明：2つの関数は $f(x^k(\xi^i)) = \varphi(\xi^i)$ を満たすので，両辺を ξ^i で微分すると，

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}$$

であり，共変ベクトルの変換規則と一致する．　**証明終**

命題 6.7 任意の (p,q) 型テンソル $\overset{G}{T}{}^I_J \longleftrightarrow \overset{R}{T}{}^K_L$ を縮約したものは，別の $(p-1,q-1)$ 型のテンソルである．

証明：第 m 番目の上付き添え字と第 n 番目の下付き添え字を縮約するとしよう．簡単のため，$i = i_m$ と略記し，I を改めて $\{i_1 \cdots \widehat{i_m} \cdots i_p\}$ とおく．ここで，カレット^は，この下の i_m が取り除かれたものであることを示し，この I は $p-1$ 個の要素を持つ．取り除かれた $i = i_m$ は，以下の計算では I の後ろに置かれる．記号 J, K, L, j, k, l も同様に定める．すると，テンソルの変換規則は

$$\overset{R}{T}{}^{K,k}_{L,l} = \overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,j}\frac{\partial x^K}{\partial \xi^I}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial \xi^J}{\partial x^L}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}$$

である．縮約を行うために，$k = l = \alpha$ と置き，α について和をとると，

$$\overset{R}{T}{}^K_L = \overset{R}{T}{}^{K,\alpha}_{L,\alpha} = \overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,j}\frac{\partial x^K}{\partial \xi^I}\underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}}\frac{\partial \xi^J}{\partial x^L}\underbrace{\frac{\partial \xi^j}{\partial x^\alpha}}$$

を得る．下に中括弧のついた2つの行列は互いに逆行列であり，その積は δ^j_i となる．そこで，この積を δ^j_i で置き換えると，規則は

$$\overset{R}{T}{}^K_L = \overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,j}\,\delta^j_i\frac{\partial x^K}{\partial \xi^I}\frac{\partial \xi^J}{\partial x^L} = \overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,i}\frac{\partial x^K}{\partial \xi^I}\frac{\partial \xi^J}{\partial x^L} = \overset{G}{T}{}^I_J\frac{\partial x^K}{\partial \xi^I}\frac{\partial \xi^J}{\partial x^L}$$

となり $\overset{R}{T}{}^K_L \longleftrightarrow \overset{G}{T}{}^I_J$ がテンソルであることが示される．　**証明終**

命題 6.8 計量の逆行列 $\Gamma^{-1} = (\gamma^{jm}) \longleftrightarrow (g^{kl}) = G^{-1}$ は，2階反変テンソルである．

証明：練習問題5では，これを成分 γ^{ij}, g^{kl} を用いた計算で直接に示す．ここでは，行列の演算を用いた，別の方法をとろう．行列記法を用いると，計量テンソル $\Gamma \longleftrightarrow G$ の変換規則は

$$G = (dM_P^{-1})^t\,\Gamma\,dM_P^{-1}$$

である．したがって，

$$G^{-1} = dM_P\,\Gamma^{-1}\,dM_P^t$$

であるが，これは $\Gamma^{-1} \longleftrightarrow G^{-1}$ が2階反変テンソルであることにほかならない．これを成分で表示するとどうなるか見てみると理解が深まるかもしれない．それは，

$$\begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{14} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{41} & \cdots & g^{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^4} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^4}{\partial \xi^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^4}{\partial \xi^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{11} & \cdots & \gamma^{14} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^{41} & \cdots & \gamma^{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^4}{\partial \xi^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^4} & \cdots & \dfrac{\partial x^4}{\partial \xi^4} \end{pmatrix}$$

であり，したがって $g^{kl}=\gamma^{ij}\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\dfrac{\partial x^l}{\partial \xi^j}$ である． **証明終**

この逆行列 $G^{-1} \longleftrightarrow \Gamma^{-1}$ を反変計量テンソル(contravariant metric tensor)と呼ぶ．2 種類の計量テンソルの使いみちの 1 つは，他のテンソルの添え字の上げ下げである．次の 2 つの命題は，この操作を行っても，テンソルはテンソルのままであることを主張する．最初の命題は特に簡単なで，2 番目が一般的な場合である．

命題 6.9 反変ベクトル $\alpha^i \longleftrightarrow a^k$ を考える．このとき，添え字を $\alpha_j=\gamma_{ij}\alpha^i, a_l=g_{kl}a^k$，によって下げた $\alpha_j \longleftrightarrow a_l$ は共変ベクトルである．

証明： 反変ベクトルの変換規則から $a^k=\alpha^i\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^i}$ である．したがって，

$$\alpha_j=\gamma_{ij}\alpha^i=g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\alpha^i=g_{kl}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}a^k=a_l\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}.$$ **証明終**

命題 6.10 (p,q) 型テンソル $\overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,j} \longleftrightarrow \overset{R}{T}{}^{K,k}_{L,l}$ を考える．このとき，添え字を上げ下げして得られる添え字のある量

$$\overset{G}{T}{}^{I,ih}_{J}=\gamma^{jh}\overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,j} \longleftrightarrow g^{lm}\overset{R}{T}{}^{K,k}_{L,l}=\overset{R}{T}{}^{K,km}_{L},$$
$$\overset{G}{T}{}^{I}_{J,jh}=\gamma_{ih}\overset{G}{T}{}^{I,i}_{J,j} \longleftrightarrow g_{km}\overset{R}{T}{}^{K,k}_{L,l}=\overset{R}{T}{}^{K}_{L,lm}$$

は，それぞれ $(p+1,q-1)$ 型，$(p-1,q+1)$ 型のテンソルである．

証明： 練習問題 1 で行う．

テンソル性は微分によって保たれない

ここで，添え字のある量だがテンソルの変換規則を満たさない例を見てみることにする．これまでに出てきたテンソルの多くは，他の量の微分を含んでいる．共変添え字は，しばしば座標変数による微分に起源を持っている．したがって，次のように問うのは自然だろう．**テンソルの微分はまたテンソルか？** 答えは否定的である．このことは，反変ベクトル $\alpha^i \longleftrightarrow a^k$ という簡単な例に見ることができる．変換規則は，

$$a^k(x^l(\xi^j))=\alpha^i(\xi^j)\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}$$

である．ここで，両辺を ξ^j で微分すると，

$$\frac{\partial a^k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}=\frac{\partial \alpha^i}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}+\alpha^i\frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^j\partial \xi^i}$$

となる．これを解くと，

$$\frac{\partial a^k}{\partial x^l}=\underbrace{\frac{\partial \alpha^i}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}}_{\text{テンソル的}}+\underbrace{\alpha^i\frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^j\partial \xi^i}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}}_{\text{非テンソル的}},$$

となり，積 $\alpha^i\cdot\partial x^k/\partial \xi^i$ の微分から出てきた“非テンソル的”な 2 階微分の項が変換規則に含まれることがわかる．

もちろん，仮に座標変換 $x^k = x^k(\xi^i)$ が**線型**であったなら，すべての2階微分の項はゼロになり，非テンソル的な項はなくなる．したがって，座標系の間の変換として，線型変換だけしか考えないことにしていれば，$\partial a^k/\partial x^l \longleftrightarrow \partial \alpha^i/\partial \xi^j$ はテンソルだったはずである．しかし，一般相対論では，重力を扱うために，非線型な座標変換は不可欠である．したがって，テンソル性は微分によって保存されないということにならざるを得ない．

計量テンソルを微分する

一般に，テンソルを微分すると，非テンソル的な2階微分の項が各添え字から発生して，変換規則に付け加わる．このことを，計量テンソル $\gamma_{ij} \longleftrightarrow g_{kl}$ を例に見てみよう．ギリシャ文字の座標系のほうを基本的なものと考えているので，ギリシャ文字の量をラテン文字の量で表すようにするのが見通しがよいだろう．すると，

$$\gamma_{ij}(\xi^k) = g_{pq}(x^r(\xi^k))\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}$$

であり，両辺を微分して

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} + \underbrace{g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^k \partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}}_{\text{非テンソル的}} + \underbrace{g_{pq}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \xi^k \partial \xi^j}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}}_{\text{非テンソル的}}$$

クリストッフェルの記号

を得る．このことから，第1種のクリストッフェルの記号は，計量テンソルの微分の和なので，テンソルではないことがわかる．クリストッフェルの記号は，3個の微分の和なので，合計6個の非テンソル的な項が変換規則に現れると予測できる．しかし，次の命題の主張する通り，非テンソル的な項は1個だけである．

命題 6.11　$\overset{G}{\Gamma}_{ij,k} = \overset{R}{\Gamma}_{pq,r}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} + g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^k}.$

証明：この計算では大量の“添え字管理”が必要だが，どのように非テンソル的な項の相殺がどのように起こるかは，詳細に見てみる価値がある．

$$\begin{aligned}
2\overset{G}{\Gamma}_{ij,k} &= \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi^k} \\
&= \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} + \underbrace{g_{pr}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^j \partial \xi^i}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k}}_{\text{A}} + \underbrace{g_{pr}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \xi^k \partial \xi^j}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}}_{\text{B}} \\
&\quad + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} + \underbrace{g_{qr}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k}}_{\text{A}} + \underbrace{g_{qr}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \xi^i \partial \xi^k}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}}_{\text{C}} \\
&\quad - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} - \underbrace{g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^k \partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}}_{\text{C}} - \underbrace{g_{pq}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \xi^k \partial \xi^j}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}}_{\text{B}} \\
&= \left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} + 2g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^k} \\
&= 2\overset{R}{\Gamma}_{pq,r}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} + 2g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^k}.
\end{aligned}$$

印Bのついた2項は相殺する．最初の項で，和をとっている添え字 r を q に置き換えればよい．印Cのついた2項も相殺する．まずテンソルの対称性 $g_{qr}=g_{rq}$ を使い，次に添え字の名前の変更 $r\mapsto p$ を行えばよい．同様の変更によって，印Aのついた2項が実は互いに等しいことがわかる．最後の2行ではこれをまとめて書いた． **証明終**

系 6.2 $\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}=\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\dfrac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\dfrac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\dfrac{\partial \xi^h}{\partial x^r}+\dfrac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i\partial \xi^j}\dfrac{\partial \xi^h}{\partial x^p}.$

次の定理と系は，測地線方程式には非テンソル的なクリストッフェルの記号が現れるにも関わらず，測地線そのものは共変的に定義されていることを主張する．

測地線の定義は共変的

定理 6.5 曲線 $x^r(t)=x^r(\xi^h(t))$ に対して，

$$\frac{d^2\xi^h}{dt^2}+\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}\longleftrightarrow\frac{d^2x^r}{dt^2}+\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$$

は，曲線上で定義されたテンソル(反変ベクトル)である．

証明：最初に，2階微分の項がどのように変換するかを求めよう．まず，

$$\frac{dx^r}{dt}=\frac{\partial x^r}{\partial \xi^h}\frac{d\xi^h}{dt}\quad\text{より}\quad\frac{d^2x^r}{dt^2}=\frac{\partial x^r}{\partial \xi^h}\frac{d^2\xi^h}{dt^2}+\frac{\partial^2 x^r}{\partial \xi^h\partial \xi^j}\frac{d\xi^h}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}$$

である．ここで，右辺の $d^2\xi^h/dt^2$ について解いて(さらに，最後の項で和をとっている添え字の名前の変更 $h\mapsto i$ をして)

$$\frac{d^2\xi^h}{dt^2}=\frac{d^2x^r}{dt^2}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}-\frac{\partial^2 x^r}{\partial \xi^i\partial \xi^j}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}$$

を得る．ここには非テンソル的な項が負の符号で現れた．したがって，クリストッフェルの記号の項と加えると，その変換規則に現れた同じ形の非テンソル的な項と，次のように相殺する．

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi^h}{dt^2}+\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}&=\frac{d^2x^r}{dt^2}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}-\frac{\partial^2 x^r}{\partial \xi^i\partial \xi^j}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}\\&\quad+\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^p}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}\\&=\frac{d^2x^r}{dt^2}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}+\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}\\&=\left(\frac{d^2x^r}{dt^2}+\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}\right)\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}.\end{aligned}$$

ここで，2行目から3行目への変形で，クリストッフェルの記号を含む項を簡単化するのには

$$\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{d\xi^i}{dt}=\frac{dx^p}{dt},\qquad\qquad\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\frac{d\xi^j}{dt}=\frac{dx^q}{dt}$$

を用いた． **証明終**

系 6.3 曲線 $\xi^i(t)$ が座標系 G の測地線なら，曲線 $x^r(t)=x^r(\xi^i(t))$ は座標系 R の測地線である．

証明： 曲線 $\xi^i(t)$ が座標系 G の測地線だとすると，曲線が定義される範囲の任意の t に対して，

$$\frac{d^2\xi^h}{dt^2}+\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}\equiv 0$$

である．しかし，

$$\frac{d^2x^r}{dt^2}+\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}=\left(\frac{d^2\xi^h}{dt^2}+\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}\right)\frac{\partial x^r}{\partial\xi^h}\equiv 0$$

も任意の t に対して成立するので，曲線 $x^r(t)$ は座標系 R の測地線である．
証明終

クリストッフェルの記号は補正項

測地線方程式の形は，普通の2階微分に，テンソル性を回復するための "補正項" を付け加えたもの

$$d^2\xi^h/dt^2+\text{補正項}\longleftrightarrow d^2x^r/dt^2+\text{補正項}$$

と見なすことができる．それでは，任意のテンソルの微分について，同じように(クリストッフェルの記号を加えるなどして)テンソル性を回復することができるだろうか？ まず，反変ベクトル $\alpha^j\longleftrightarrow a^r$（したがって $a^r=\alpha^j\cdot\partial x^r/\partial\xi^j$）の微分を考えよう．変換規則は

$$\frac{\partial a^r}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}=\frac{\partial\alpha^j}{\partial\xi^i}\frac{\partial x^r}{\partial\xi^j}+\alpha^j\frac{\partial^2x^r}{\partial\xi^i\partial\xi^j}$$

である．これを $\dfrac{\partial\alpha^j}{\partial\xi^i}$ について解きたい．まず両辺に $\dfrac{\partial\xi^k}{\partial x^r}$ をかけて

$$\frac{\partial a^r}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^r}=\frac{\partial\alpha^j}{\partial\xi^i}\delta^k_j+\alpha^j\frac{\partial^2x^r}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^r}=\frac{\partial\alpha^k}{\partial\xi^i}+\alpha^j\frac{\partial^2x^r}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^r}.$$

したがって，

$$\frac{\partial\alpha^k}{\partial\xi^i}=\frac{\partial a^r}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^r}-\alpha^j\frac{\partial^2x^r}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^r}$$

であるが，一方，

$$\alpha^j\overset{G}{\Gamma}{}^k_{ij}=\underbrace{\alpha^j}\,\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}\underbrace{\frac{\partial x^q}{\partial\xi^j}}\frac{\partial\xi^h}{\partial x^r}+\alpha^j\frac{\partial^2x^p}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\frac{\partial\xi^h}{\partial x^p}$$

であることを知っているので，これら2つの方程式の両辺の和をとると，右辺第2項どうしが相殺する．さらに，下に中括弧をつけた部分の積は，$\alpha^j\longleftrightarrow a^q$ の変換規則から単に a^q に等しい．よって，

$$\frac{\partial\alpha^k}{\partial\xi^i}+\alpha^j\overset{G}{\Gamma}{}^k_{ij}=\left(\frac{\partial a^r}{\partial x^p}+a^q\overset{R}{\Gamma}{}^r_{pq}\right)\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^r}$$

を得る．

共変微分

定義 6.3 反変ベクトル α^k の**共変微分**(covariant derivative)とは

$$\alpha^k_{;i}=\frac{\partial\alpha^k}{\partial\xi^i}+\alpha^j\overset{G}{\Gamma}{}^k_{ij}$$

のことをいう．

今後は，上の例のように，共変微分の添え字を区別するためにセミコロン；を使うことにする．定義の前の議論から，$\alpha^k \longleftrightarrow a^r$ の共変微分 $\alpha^k_{;i} \longleftrightarrow a^r_{;p}$ は $(1,1)$ 型テンソルであることがわかる．共変ベクトルにも共変微分ができるが，補正項の符号は逆にとる必要がある．

定義 6.4 共変ベクトル α_i の**共変微分**とは

$$\alpha_{i;j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi^j} - \alpha_k \overset{G}{\Gamma}{}^k_{ij}$$

のことをいう．

命題 6.12 共変ベクトル $\alpha_i \longleftrightarrow a_p$ の共変微分 $\alpha_{i;j} \longleftrightarrow a_{p;q}$ は，2 階共変テンソルである．

証明：練習問題 7 で行う．

定義 6.5 (p,q) 型テンソル T^I_J の **共変微分**とは

$$T^I_{J;h} = \frac{\partial T^I_J}{\partial \xi^h} + T^{mi_2\cdots i_p}_J \Gamma^{i_1}_{mh} + \cdots + T^{i_1\cdots i_{p-1}m}_J \Gamma^{i_p}_{mh} - T^I_{kj_2\cdots j_q}\Gamma^k_{j_1h} - \cdots - T^I_{j_1\cdots j_{q-1}k}\Gamma^k_{j_qh}$$

のことをいう．

1 個の添え字に対して 1 個の補正項が付け加えられる．反変添え字に対する補正項は正の符号，共変添え字に対する補正項は負の符号である．

命題 6.13 (p,q) 型のテンソル $\overset{G}{T}{}^I_J \longleftrightarrow \overset{R}{T}{}^P_Q$ に対して，共変微分 $\overset{G}{T}{}^I_{J;h} \longleftrightarrow \overset{R}{T}{}^P_{Q;r}$ は $(p,q+1)$ 型テンソルである．

証明：命題 6.12 と同様に証明できる．

次の定理は，特筆に値するものである．これは，共変微分の立場からは，計量テンソルは定数であることを主張する．

定理 6.6 計量テンソルの共変微分は恒等的にゼロである．すなわち $g_{kl;m} \equiv 0$.

証明：練習問題 9 で行う．

今後のために，次の結果を挙げておく．これらは練習問題 2 で証明する．

命題 6.14 混合リーマン曲率テンソル

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}$$

は $(1,3)$ 型テンソルである．

系 6.4 共変リーマン曲率テンソル $R_{hjkl} = g_{ih}R^i_{jkl}$ は 4 階共変テンソル，リッチテンソル $R_{ij} = R^h_{ihj}$ は，2 階共変テンソルである．

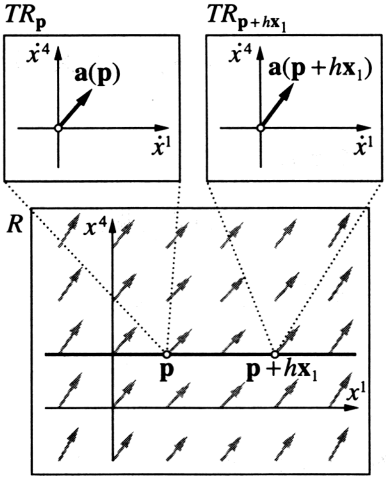
平行移動

微分の定義にまつわる問題

テンソルの微分を，もう1つの立場で見てみると，共変微分の定義になぜ補正項を含めることが必要かがよくわかる．具体的に考えるために，反変ベクトル場 $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = a^l(x^k)$ と，点 $\mathbf{p} = (p^k)$ における x^1 に関するその偏導関数を取り上げよう．通常は，微分は，差分商の極限として

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1}(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} + h\mathbf{x}_1) - \mathbf{a}(\mathbf{p})}{h}, \qquad \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, 0)$$

と定義される．



差分商には，ベクトル $\mathbf{a}(\mathbf{p} + h\mathbf{x}_1)$ と $\mathbf{a}(\mathbf{p})$ との差が含まれている．しかし，これら2つのベクトルは，異なる接空間に属しており，直接の関係はない．特に，**和や差を計算することはできない！**

通常の $\mathbf{R}^n$ の関数やベクトルの微積分でこの問題が起こらなかったのは，ある点におけるベクトルと，別の点におけるベクトルとを同一視する自然な方法があったからである．それは，座標の値が同じベクトルを同一視する，という方法だった．しかし，今度の場合は，任意の座標系をとることを許しているので，この方法ではうまく行かない．もし，1つの座標系で，ベクトルの成分ごとの値が2点で一致したとしても，別の座標系をとったときにそうなるという保証はない．このことを見るために，座標系 R の2点で，

$$a^l(x^1, x^2, x^3, x^4) = a^l(y^1, y^2, y^3, y^4)$$

のように成分 $l = 1, 2, 3, 4$ がそれぞれ一致しているとしよう．いつものように，写像 $M : G \ni \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x} \in R$ で関係づけられている座標系 G を導入し，

$$\begin{aligned} \xi^i &\longleftrightarrow x^k, \qquad & \alpha^j(\xi^i) &\longleftrightarrow a^l(x^k), \\ \eta^i &\longleftrightarrow y^k, \qquad & \alpha^j(\eta^i) &\longleftrightarrow a^l(y^k) \end{aligned}$$

という対応関係があるとしよう．この2点で，ベクトルのラテン文字の座標は一致している，つまり $a^l(x^k) = a^l(y^k)$ なので，一般共変性の原理から，ギリシャ文字の座標も同様に一致している，つまり $\alpha^i(\xi^j) = \alpha^i(\eta^j)$ となっているはずである．さて，ベクトルの座標をラテン語からギリシャ語に翻訳す

る辞書は行列 $\partial\xi^i/\partial x^l = dM^{-1}$ である．つまり，2 点について，

$$\alpha^i(\xi^j) = a^l(x^k)\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}(x^k), \qquad \alpha^i(\eta^j) = a^l(y^k)\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}(y^k).$$

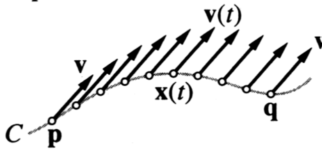
ここで，翻訳前の $a^l(x^k)$ と $a^l(y^k)$ は等しいが，翻訳後の $\alpha^i(\xi^j)$ と $\alpha^i(\eta^j)$ が等しいとはかぎらない．なぜなら，2 つの行列

$$dM^{-1}_{(x^k)} = \frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}(x^k), \qquad dM^{-1}_{(y^k)} = \frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}(y^k)$$

は，別の点での値であり，一般には等しくないからである．したがって，時空の異なる点における接ベクトルで，座標の値が等しいようなものを同一視するというやり方は，一般共変的ではないということがわかる．

$\mathbf{R}^2$ のベクトルの平行移動

別の，もっとうまい方法がある．この方法を，$\mathbf{R}^2$ を例にとって説明しよう．2 点 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ と，一方の点 $\mathbf{p}$ におけるベクトル $\mathbf{v}$ とを考えよう．他方の点 $\mathbf{q}$ におけるどのようなベクトルを，$\mathbf{v}$ と同一視するべきだろうか？ まず，2 点 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ を結ぶ曲線 C を考え，ベクトル $\mathbf{v}$ を C に沿って，もとのベクトルと平行を保ったままで滑らせていく．その結果，$\mathbf{q}$ まで動いたときのベクトル $\mathbf{w}$ が，$\mathbf{v}$ と同一視するべきベクトルである．このとき，ベクトル $\mathbf{w}$ は $\mathbf{v}$ を C に沿って**平行移動**(parallel transport)して得られるベクトルであるという．



曲線 C の助変数表示を $\mathbf{x}(t)$ とし，点 $\mathbf{x}(t)$ まで平行移動して得られたベクトルを $\mathbf{v}(t)$ とする．この作り方から，すべての t に対して $\mathbf{v}(t)$ は等しく，微分 $\mathbf{v}'(t)$ は恒等的にゼロである．

曲線に沿った微分

あるベクトルの族を曲線に沿って微分するとゼロになるというこの考えは，曲がった時空の上でも意味を持つ．しかし，一般共変的な微分を定義する際には注意が必要である．曲線 C の助変数表示を $\xi^i(t) \longleftrightarrow x^k(t)$ とし，

$$\Phi^j(t) = \varphi^j(\xi^i(t)) \longleftrightarrow f^l(x^k(t)) = F^l(t)$$

を，2 つの座標系 G,R をそれぞれ用いて C 上に定義された反変ベクトル場とする(ここでは，2 つの座標系の座標表示で計算を行い，結果を比較して一般共変的になっているかどうかを調べる)．変換規則は

$$F^l(t) = f^l(x^k(t)) = \varphi^j(\xi^i(t))\frac{\partial x^l}{\partial\xi^j} = \Phi^j(t)\frac{\partial x^l}{\partial\xi^j}$$

である．ここでの最終的な目標は，$F^l(t)$ と $\Phi^j(t)$ の微分が同じ変換をするように，つまり，微分が再び C 上の反変ベクトル場になるように，微分を定義するということである．普通の合成関数の微分法を用いて，

$$\frac{dF^l}{dt} = \frac{\partial f^l}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\Phi^j(t)\frac{\partial x^l}{\partial\xi^j}\right) = \frac{d\Phi^j}{dt}\frac{\partial x^l}{\partial\xi^j} + \Phi^j\frac{\partial^2 x^l}{\partial\xi^h\partial\xi^j}\frac{d\xi^h}{dt}$$

であるが，この右辺には 2 階微分の項が含まれ，テンソル的でない．そこで，合成関数の微分法で出てくる通常の微分を**共変微分**に置き換えたものを考え，

この形で F^l の新しい微分

$$\frac{DF^l}{dt} = f^l_{;k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial f^l}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \Gamma^l_{jk} f^j \frac{dx^k}{dt}$$

を定義する．この第1項を，通常の合成関数の微分法を用いて簡単化し，次に第2項を $f^j = f^j(x^k(t)) = F^j(t)$ を用いて書き換える．すると，得られた式は，F^l だけを含み f^l を含まない．この形を用いて次のように定義する．

定義 6.6 $F^l(t)$ の $x^k(t)$ に沿った**共変微分**(covariant derivative of $F^l(t)$ along $x^k(t)$)を

$$\frac{DF^l}{dt} = \frac{dF^l}{dt} + \Gamma^l_{jk} F^j \frac{dx^k}{dt}$$

と定義する．

命題 6.15 共変微分 $D\Phi^j/dt \longleftrightarrow DF^l/dt$ は，C 上の反変ベクトル場である．

証明： 共変微分 $\varphi^j_{;i} \longleftrightarrow f^l_{;k}$ は $(1,1)$ 型のテンソルなので，

$$f^l_{;k} = \varphi^j_{;i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}$$

と変換する．したがって，

$$\frac{DF^l}{dt} = f^l_{;k}\frac{dx^k}{dt} = \varphi^j_{;i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \varphi^j_{;i}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} = \frac{D\Phi^j}{dt}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}$$

であり，確かに $D\Phi^j/dt \longleftrightarrow DF^l/dt$ は反変ベクトルとして変換している．
証明終

任意のテンソル

曲線 $x^k(t)$ 上で定義された任意のテンソル $F^I_J(t)$ に対して，$x^k(t)$ に沿った共変微分が同様に定義できる．例えば，$(1,1)$ 型テンソル $F^i_j(t)$ の $x^k(t)$ に沿った共変微分は

$$\frac{DF^i_j}{dt} = \frac{dF^i_j}{dt} + \left(\Gamma^i_{hk}F^h_j - \Gamma^h_{jk}F^i_h\right)\frac{dx^k}{dt}$$

である．この右辺がテンソル的であることは，上の命題と同様にして証明できる．普通の共変微分は，共変階数を1だけ増やすのに対して，**曲線に沿った共変微分はテンソルの型を変えない**ことに注意しよう．

時空上の平行移動

ここまでの準備の上で，時空の上のベクトル，テンソルの平行の概念を一般共変的に定義できる．

定義 6.7 テンソル場 $T^I_J(t)$ が曲線 $x^k(t)$ に沿って**平行**(parallel)であるとは，その曲線に沿った共変微分がその曲線上で恒等的にゼロとなることをいう．

接空間 $TR_{\mathbf{p}}$ の任意のベクトル $\mathbf{v} = v^l$ と，点 $\mathbf{p}$ を端点する曲線 C を考え，C の助変数表示を $x^k(t)$ とする(つまり，$x^k(0) = \mathbf{p}$ とする)．このとき，$\mathbf{v}$ の C に沿った**平行移動**(parallel transport)とは，ベクトル場 $V^l(t)$ で，初期値問題

$$\frac{DV^l}{dt} = \frac{dV^l}{dt} + \Gamma^l_{jk}V^j\frac{dx^k}{dt} = 0, \qquad V^l(0) = v^l$$

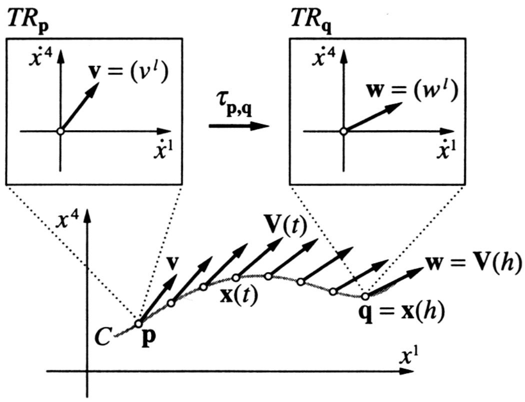
を満たすようなもののことである．この微分方程式は**線型**常微分方程式であり，解は $x^k(t)$ 全体の上で存在し一意的である．

平行移動写像 $\tau_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$

点 $\mathbf{q}$ を C 上の別の点とする．すると，適当な $h \neq 0$ で $x^k(h) = \mathbf{q}$ と書ける．このとき，**平行移動写像**(parallel transport map)

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbf{p},\mathbf{q}} : TR_{\mathbf{p}} &\to TR_{\mathbf{q}} \\ v^l &\mapsto w^l = V^l(h)\end{aligned}$$

が定義される．



初期値問題の解の存在と一意性から，$\tau_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ には逆写像が存在し，また，$\tau_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-1} = \tau_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ であることがわかる．この関係は曲線 C 上の任意の 2 点 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ に対して成立する．しかし，写像 τ は明らかに曲線 C に依存して決まっている．ベクトル $\mathbf{v}$ の $\mathbf{p}$ から $\mathbf{q}$ への，異なる曲線に沿った平行移動が，同じ結果になることを保証するものは何もない．

差分商の極限としての微分

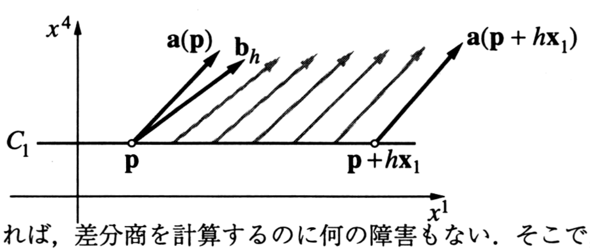
平行移動写像を利用すると，ベクトル場 $a^l(x^k) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ の微分を差分商の極限として定義する際の困難が克服できる．安直な定義

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1}(\mathbf{p}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} + h\mathbf{x}_1) - \mathbf{a}(\mathbf{p})}{h}, \qquad \mathbf{x}_1 = (1,0,0,0),$$

は，ベクトル $\mathbf{a}(\mathbf{p} + h\mathbf{x}_1)$ と $\mathbf{a}(\mathbf{p})$ とが異なる接空間に属しているため，意味をなさなかった．しかし，ベクトル $\mathbf{a}(\mathbf{p}+h\mathbf{x}_1)$ を，直線 $C_1 : \mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{x}_1$ に沿って平行移動して，もとの接空間 $TR_{\mathbf{p}}$ に持ってきたもの

$$\mathbf{b}_h = \tau^{-1}_{\mathbf{p},\mathbf{p}+h\mathbf{x}_1}\left(\mathbf{a}(\mathbf{p} + h\mathbf{x}_1)\right)$$

を考えたらどうだろうか．



このベクトルを用いれば，差分商を計算するのに何の障害もない．そこで，$\mathbf{a}$ の x^1 に関する偏導関数を，次の式によって**定義**する．

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1}(\mathbf{p}) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{b}_h - \mathbf{b}_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tau^{-1}_{\mathbf{p},\mathbf{p}+h\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}(\mathbf{p}+h\mathbf{x}_1)) - \mathbf{a}(\mathbf{p})}{h}.$$

ベクトル $\mathbf{a}$ の x^2, x^3, x^4 に関する偏導関数も同様に定義できる．このときには，x^k 軸に平行な直線 C_k に沿った平行移動を考える．直線 C_k の式は $y_k^m(t) = p^m + \delta_k^m t$ であり，座標で表すと，

$$\begin{aligned} C_1 &: \mathbf{y}_1(t) = (p^1 + t, p^2, p^3, p^4), \\ C_2 &: \mathbf{y}_2(t) = (p^1, p^2 + t, p^3, p^4), \\ C_3 &: \mathbf{y}_3(t) = (p^1, p^2, p^3 + t, p^4), \\ C_4 &: \mathbf{y}_4(t) = (p^1, p^2, p^3, p^4 + t) \end{aligned}$$

となる．直線 C_k に沿って平行移動されたベクトルは

$$\mathbf{b}_h = \tau^{-1}_{\mathbf{p},\mathbf{y}_k(h)}(\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h)))$$

である．次の定理は，反変ベクトルの，上のように差分商の極限として定義された偏導関数の各成分が，通常の共変微分の各成分に等しいことを主張する．

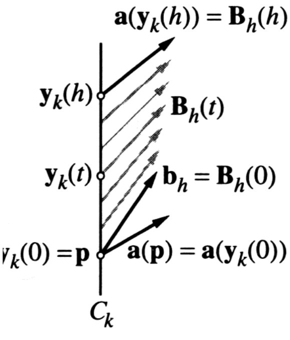
定理 6.7 座標系 R のベクトル場 $\mathbf{a} = a^l$ を考える．偏導関数

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}(\mathbf{p}) = \lim_{h\to 0}\frac{\tau^{-1}_{\mathbf{p},\mathbf{y}_k(h)}(\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h))) - \mathbf{a}(\mathbf{y}_k(0))}{h}$$

の第 l 成分は

$$a^l_{;k} = \frac{\partial a^l}{\partial x^k} + a^j \Gamma^l_{jk}$$

である．



証明：平行移動写像

$$\tau^{-1}_{\mathbf{p},\mathbf{y}_k(h)}(\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h))) = \tau_{\mathbf{y}_k(h),\mathbf{p}}(\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h))) = \mathbf{b}_h = \left(b_h^l\right)$$

を定める C_k 上のベクトル場 $\mathbf{B}_h(t) = \left(B_h^l(t)\right)$ は，初期値問題

$$\frac{dB_h^l}{dt} + \Gamma^l_{jm} B^j \frac{dy_k^m}{dt} = 0, \qquad B_h^l(h) = a^l(y_k^m(h))$$

の解である．この初期値問題の初期条件が上のように点 $y_k^m(h)$ で与えられるのは，b_k^l を決定する平行移動写像 $\tau_{\mathbf{y}_k(h),\mathbf{p}}$ の定義域が，この点の接空間だからである．このとき，$b_h^l = B_h^l(0)$ であり，差分商

$$\frac{B_h^l(0) - a^l(y_k^m(0))}{h}$$

の極限 $h \to 0$ を評価したい．テイラーの定理から，

$$\begin{aligned} B_h^l(h) &= B_h^l(0) + h\frac{dB_h^l}{dt}(0) + O(h^2) \\ &= B_h^l(0) - h\,\Gamma^l_{jm} B_h^j(0)\frac{dy_k^m}{dt} + O(h^2) \end{aligned}$$

が成立する．ここでは，B_h^l に対する微分方程式を使って dB_h^l/dt を消去した．

(注: この計算には，ベクトル $\mathbf{B}_h$ の成分の，異なる点 ($\mathbf{y}_k(0)$ と $\mathbf{y}_k(h)$) における値が含まれている．しかし，ベクトルの成分はベクトルではなく，関数に過ぎない．成分は R の領域全体で定義されており，和や差をとってもかまわない.) ここで，上の式を $B_h^l(0)$ について解くと，

異なる点で評価された関数の値は比較できる

$$B_h^l(0) = B_h^l(h) + h\,\Gamma^l_{jm} B_h^j(0) \frac{dy_k^m}{dt} + O(h^2)$$
$$= a^l(y_k^m(h)) + h\,\Gamma^l_{jk} b_h^j + O(h^2)$$

となる．ここでは，関係 $B_h^l(0) = b_h^l$, $dy_k^m/dt = \delta_k^m$ と初期条件 $B_h^l(h) = a^l(y_k^m(h))$ とを用いた．この $B_h^l(0)$ の表式を差分商に代入すると，

$$\frac{a^l(y_k^m(h)) - a^l(y_k^m(0))}{h} + \Gamma^l_{jk} b_h^j + O(h).$$

となる．極限 $h \to 0$ で，第 1 項は

$$\frac{d}{dt} a^l(y_k^m(0)) = \frac{\partial a^l}{\partial x^m} \frac{dy_k^m}{dt} = \frac{\partial a^l}{\partial x^m} \delta_k^m = \frac{\partial a^l}{\partial x^k}$$

となる．第 2 項では $b_h^l \to a^l$ となるので，最終的に

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}(\mathbf{p}) = \frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \Gamma^l_{jk} a^j = a^l_{;k}$$

を得る． **証明終**

この平行移動の議論は，差 $\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h)) - \mathbf{a}(\mathbf{y}_k(0))$ が，そのままでは意味を持たないという観察がきっかけだった．特に，

平行移動から出てくる補正項

$$\frac{\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h)) - \mathbf{a}(\mathbf{y}_k(0))}{h} = \frac{a^l(y_k^m(h)) - a^l(y_k^m(0))}{h}$$

という式は**正しくない**ということが本質的である．正しい方法は，1 番目のベクトルを，平行移動写像 $\tau^{-1}_{\mathbf{y}_k(0),\mathbf{y}_k(h)}$ を用いて，2 番目のベクトルと同じ接空間に写すことである．上の証明から，これを実行すると，**正しい式**

$$\frac{\mathbf{a}(\mathbf{y}_k(h)) - \mathbf{a}(\mathbf{y}_k(0))}{h} = \frac{a^l(y_k^m(h)) - a^l(y_k^m(0))}{h} + \Gamma^l_{jk} b_h^j + O(h)$$

が得られることを示している．したがって，平行移動の効果は，クリストッフェルの記号を含む補正項を加えることである．ベクトル場を任意の型のテンソル場で置き換えたとしても，各添え字に応じた補正項を加えておけばよい．このことから次の系が導かれる．定理 6.7 と系 6.5 はともに一般共変的な結果である．

系 6.5 座標系 R で定義された (p,q) 型のテンソル場 $\mathbf{T} = T^I_J(x^m)$ に対して，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{y}_k(h)) - \mathbf{T}(\mathbf{y}_k(0))}{h} = T^I_{J;k}$$

が成立する．

練習問題

1. テンソル $T_{J,j}^{I,i}$ が (p,q) 型テンソルであるとする．このとき，添え字を上げ下げして得られる添え字のある量 $T_J^{I,ih}$, $T_{J,jh}^{I}$ は，それぞれ $(p+1,q-1)$ 型，$(p-1,q+1)$ 型のテンソルであることを示せ．
2. 混合リーマン曲率テンソル R_{jkl}^{i} は $(1,3)$ 型テンソルであること，$R_{hjkl} = g_{hi}R_{jkl}^{i}$ は 4 階共変テンソルであること，$R_{jl} = R_{jhl}^{h}$ は 2 階共変テンソルであることを示せ．
3. テンソル $S_{I_1}^{J_1}$, $T_{I_2}^{J_2}$ がそれぞれ (p_1,q_1) 型，(p_2,q_2) 型であるとする．このとき，
$$U_{I_1,I_2}^{J_1,J_2} = S_{I_1}^{J_1}T_{I_2}^{J_2}$$
が，(p_1+p_2, q_1+q_2) 型のテンソル（S と T の**テンソル積**(tensor product) と呼ばれる）であることを示せ．
4. 計量テンソルの行列式は $(0,0)$ 型のテンソルの変換規則に**従わない**ことを示せ．正しい変換規則は，$\Gamma_P = dM_P^t\, G_{M(P)}\, dM_P$ に対して $\gamma = (\det dM_P)^2\, g$ である．
5. この問の目的は，直接の計算で，任意の 2 次元曲面の計量テンソルの逆行列 $\gamma_{ij} \longleftrightarrow g_{pq}$ が，2 階反変テンソルであることをしめすことである．

   (a) 写像 $M : G \to R$ とその微分 $dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$ を考える．また，$m = \det dM_P$ とおく．これまでと同様，$dM_P = (\partial x^p/\partial \xi^i)$ および $d(M^{-1})_{M(P)} = (\partial \xi^j/\partial x^q)$ と成分表示される．このとき，
$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = \frac{1}{m}\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}, \qquad \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{m}\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2},$$
$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} = -\frac{1}{m}\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}, \qquad \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}$$
を示せ．計量 γ_{ij} と g_{pq} の逆行列に対して，これに対応する式を求めよ．その最初のものは $\gamma^{11} = \gamma_{22}/\gamma$ となるはずである．

   (b) 練習問題 4 で求めた $\gamma \longleftrightarrow g$ の変換規則と，$\gamma_{ij} \longleftrightarrow g_{pq}$ が 2 階共変テンソルであるという事実を用いて，
$$\gamma^{11} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}g^{22} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}g^{12} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}g^{21} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}g^{11}$$
を示せ．また，$\gamma^{12}, \gamma^{21}, \gamma^{22}$ についても同様の式を示せ．このことから，$\gamma^{ij} \longleftrightarrow g^{pq}$ が 2 階の反変テンソルであることを結論せよ．
6. (a) 球面
$$R : \begin{cases} 0 \le q^1 \le 2\pi, \\ -\pi/2 < q^2 < \pi/2, \end{cases} \qquad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 q^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
の上の反変ベクトル場 $\mathbf{a}(q^1,q^2) = (a^1,a^2) = (0,1)$ を考える．共変微分 $a_{;j}^{i}$ を計算せよ．

(b) 同様に，任意の反変ベクトル場 $b^i = f^i(q^1, q^2)$ ただし $i = 1, 2$ に対して，共変微分 $b^i_{;j}$ を計算せよ．

7. 共変ベクトル場 a_p の共変微分

$$a_{p;q} = \frac{\partial a_p}{\partial x^q} - a_r \Gamma^r_{pq}$$

は2階共変テンソルであることを示せ．

8. 任意の $(0,0)$ 型のテンソル $\varphi \longleftrightarrow f$ を考える．このテンソルの共変微分はが勾配に等しいこと，すなわち $\varphi_{;i} = \varphi_i$ を示せ．

9. 任意の曲面の計量テンソル g_{ij} を考える．すべての i, j, k に対して $g_{ij;k} = 0$ かつ $g^{ij}_{;k} = 0$ であることを示せ．

10. 共変微分は，添え字の上げ下げと可換であること，すなわち，$T^I_{J,j;l} = T^{I,i}_{J;l}$ を示せ．

11. 共変微分に関する積の微分法 $\left(T^I_J S^K_L\right)_{;m} = T^I_{J;m} S^K_L + T^I_J S^K_{L;m}$ を示せ．

12. (a) 任意の反変ベクトル場 a^h に対して，

$$a^h_{;j;k} - a^i_{;k;j} = -R^h_{ijk} a^i$$

を示せ．このことから，(異なる方向への)共変微分は一般には互いに可換でないことがわかる．さらに，可換でなくなる原因は，その空間の曲率であると考えられる．

(b) 任意の共変ベクトル場 b_i に対して，$b_{h;k;l} - b_{h;l;k}$ を，b_i とリーマン曲率テンソルで書き表せ．

13. 曲面 $\{R, g_{ij}\}$ の測地線 $x^k(t)$ を考える．測地線 x^k に沿った接ベクトル場を $y^k(t) = dx^k/dt$ とする．測地線 x^k に沿った共変微分 Dy^k/dt を計算し，y^k が x^k に沿って平行であることを示せ．

14. (a) 曲面 $\{R, g_{ij}(q^1, q^2)\}$ を，練習問題6で定義した球面とする．北緯 $30°$ の緯線を $\mathbf{q}(t) = (t, \pi/6)$,$\mathbf{y}(t)$ をその接ベクトルとする．このとき，$\mathbf{y}$ の $\mathbf{q}$ に沿った共変微分を計算せよ．

(b) 点 $\mathbf{y}(0)$ で $\mathbf{q}(0)$ と一致し，緯線 $\mathbf{q}(t)$ に沿って平行なベクトル場 $\mathbf{z}(t)$ を求めよ．この，$\mathbf{x}(t)$ 上のベクトル場 $\mathbf{z}(t)$ を，(q^1, q^2) 平面に描け．緯線を一周したときに，$\mathbf{z}$ はどのくらい変化するか．すなわち，$\mathbf{z}(0)$ と $\mathbf{z}(2\pi)$ のなす角の大きさ Δ はどれだけか．

(c) 任意の緯度 k の緯線を $\mathbf{q}_k(t) = (t, k)$ とする．点 $\mathbf{q}_k(0)$ で $\mathbf{q_k}'(0)$ と一致し，緯線 $\mathbf{q}_k(t)$ に沿って平行なベクトル場 $\mathbf{z}_k(t)$ を求めよ．ベクトル $\mathbf{z}_k(0)$ と $\mathbf{z}_k(2\pi)$ のなす角の大きさ $\Delta(k)$ が $2\pi \sin k$ であることを示せ．

(d) 球面が $\mathbf{R}^3$ に埋め込まれていると考え，これを北極上空から眺める．緯度 k を非常に $\pi/2$ に近く取ったときの $\mathbf{q}_k(t)$ を，極地付近を拡大して，極点を中心とする小さな円として描け．曲線 $\mathbf{q}(t)$ に沿って平行なベクトル場 $\mathbf{z}_k(t)$ が，曲線の接ベクトル $\mathbf{q}(t)$ に対してちょうど1回転している様子を描け．このことは，問(c)の $\lim_{k\to\pi/2} \Delta(k) = 2\pi$ という結果とどう関係しているか．

第6章の内容をより深く知るには

この章の題材は，標準的な微分幾何学の教科書で扱われている．前の章の最後に，そのような教科書をいくつか挙げた([16], [5], [6], [7], [15], [22])．この章での平行移動の扱い方は，McCleary[22] のものに最も近い．

第7章
一般相対論

重力場と電磁場には，前者には質量，後者には電荷という物理的な “源泉” がある．しかし，両者の間には根本的な違いがある．電磁場中では，物体はその電荷の大きさに応じて異なる加速度で運動する．それに対し，重力場中では，すべての物体は同じ加速度で運動する．このため，例えば軌道上の宇宙船内では，他の物体と一緒に “落下する” ことが可能である．このときには，観測者にとっては，重力による加速はなくなったかのように感じられる．逆に，他の物質から遠く離れていて，重力場が検知できない宇宙船においても，宇宙船を加速させることによって，容易に重力場を作り出すことができる．言い換えると，少なくとも時空の小さな領域内では，座標系を変更することによって，重力を作ったり消したりすることができる．

重力の理論と座標系の変更

座標系を変更したときの物理的効果が相対論の本質である．しかし，特殊相対論は，慣性座標系の間の線型変換だけを扱うので，重力を取り扱うことができない．重力を作り出したり消去したりする変換は非線型なものである．重力も取り扱えるようにするためには，相対性を，一般の座標とその間の変換を許すように一般化しなければならない．この章では，一般相対性がどのように重力の理論を導くかを見ていく．

7.1　運動方程式

ニュートンの運動方程式

重力場の影響だけを受けて**自由落下する**テスト粒子の運動を考えよう．ニュートン力学では，場は重力ポテンシャル関数 $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x^1, x^2, x^3)$ で与えられる．質量 m の粒子が受ける重力は，4.3 節で見たように $-m\,\nabla\Phi = -m\,\mathrm{grad}\,\Phi$ である．したがって，時刻 t における粒子の位置を $\mathbf{x}(t)$ とすると，ニュートンの運動の第 2 法則から，$m\mathbf{x}'' = -m\,\nabla\Phi$ となる．両辺を m で割って，重力**加速度**の方程式 $\mathbf{x}'' = -\nabla\Phi$ を得る．成分に分けると，これは 3 個の方程式

運動は質量によらない

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}(x^1(t), x^2(t), x^3(t)), \qquad k = 1, 2, 3$$

になる．これらの方程式は，テスト粒子の質量 m にはよらないので，質量の異なる粒子も同じ加速度で運動するということがわかる．これが，他の力に

はない重力の特徴で，このために，重力は相対論的な取り扱いと相性がよい．

重力場

自由落下する座標系から見た運動

自由落下するテスト粒子の，相対論の立場から見た運動方程式はどのようなものだろうか？ まず，テスト粒子とともに落下する座標系 R（例えば，軌道上にある宇宙船に固定された座標系）から見た運動を考える．時空の十分に小さな領域 $\mathcal{R}$ では，重力場は本質的に消すことができるということを，4.3 節で見た．他にははたらいている力はないと仮定しているので，すべての物体は，等速直線運動をする．実際，R は慣性座標系で，特殊相対論のすべての法則が $\mathcal{R}$ で成立する．座標の線型変換で，適当な座標 $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ に変更すると，R における計量は，$\mathcal{R}$ のすべての点 (x^0, x^1, x^2, x^3) において

$$g_{kl}(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3,$$

という形になる．今後は，添え字の動く範囲を 0, 1, 2, 3 とする．こうすると，時間的座標と空間的座標とを区別しやすい．ラテン文字 i, j などを使ったときは，今までと同様，4 つすべての添え字を意味する．それに対して，空間的な座標にあたる添え字 1, 2, 3 だけを指したいときには，ギリシャ文字を使うことにする．[注1]この記法を用いると，例えば，$g_{00} = +1$, $g_{\alpha\alpha} = -1$ のようになる．

座標系 R では世界線は測地線

成分 g_{kl} はすべて定数なので，その導関数はゼロである．したがって，クリストッフェルの記号も恒等的にゼロであり，測地線方程式は非常に簡単な形

$$\frac{d^2x^m}{dt^2} = 0$$

になる．この方程式の解は直線である．一方，自由落下する粒子の世界線も直線である．したがって，R の立場からは，**自由落下する粒子の世界線は測地線である．**

一般共変性の原理

ここで，一般の座標系 $G : (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ を考えることにしよう．座標系 G は，滑らかな写像 $M : G \to R$ で R と関係づけられているものとする．座標系 G から見ると，この運動はどのように見えるだろうか？ それを解く鍵は，次に引用するアインシュタインの**一般共変性の原理**(principle of general covariance) [10, p. 117] である．[注2]

> 自然の一般的な法則は，すべての座標系で成り立つような方程式に表現されなければならない．すなわち，座標系の，ありうるすべての変更に関して，共変的でなければならない．

反変テンソルと共変テンソルはこの要求の通りに変換することから，アイ

[注1] 訳注：これと逆に，ギリシャ文字で 0, 1, 2, 3，ラテン文字で 1, 2, 3 を指す流儀もある．教科書 [24] には，どの教科書がどの流儀をとっているかという一覧表が載っている．

[注2] 訳注：和訳については訳者のノート参照．

ンシュタインは次のように主張した [10, p. 121].[注 3]

> したがって，もし，自然の法則が，あるテンソルのすべての成分がゼロであるという形に書かれるなら，それは一般共変的である．テンソルの構成をよく検討することによって，法則を一般共変的に定式化する手段が得られる．

座標系 G でも世界線は測地線

自由落下する粒子の運動は客観的な物理法則で記述されるべきものである．また定理 6.5 から測地線方程式はテンソル的なので，一般共変性の原理から，自由落下する粒子の世界線は，G の座標系でも，R の座標系と同様に測地線でなければならない．観測者 G の座標系で粒子の世界線が $\boldsymbol{\xi} = (\xi^h(t))$ で与えられるとすると，その運動方程式は

$$\frac{d^2\xi^h}{dt^2} + \overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt} = 0$$

である．この方程式は，座標系 R の領域 $\mathcal{R}$ に対応する，G の座標系が覆う時空の小さな領域 $M^{-1}(\mathcal{R})$ で成立する．

自由落下する粒子は常に測地線上を運動する

上の議論では，十分に小さい時空領域で考えて，重力の効果を "変換して消す"(transform away) ことを行って，あとは慣性座標系 R で考えるという方法をとった．しかし，これは，相対論が通常適用される天文学的スケールの距離や時間を考えようとするときには厳しい制約になる．例えば，領域 $\mathcal{R}$ が，空間方向には地球を中心とする半径 10,000 キロメートル (幾何単位系では 1 秒にも満たない !) の球で，時間方向には 1 秒であったとしても，その領域で重力場は自明ではない．この場合の重力場を，領域 $\mathcal{R}$ 全体にわたって "変換して消す" ことはできない．このような一般的な状況では，運動方程式はどのような形になるのだろうか？ アインシュタインの答えは，小さな領域の中の状況を参考にしようというものだった [10, p. 143].[注 4]

> ここで，次の非常に自然な仮定をおく．たとえ，特殊相対論が成立するような座標系がとれないような有限の領域でも，測地線方程式が，重力のもとでの質点の運動を定める．

言い換えると，今後は，どのような座標系をとっていようとも，自由落下する粒子の世界線は測地線であると考える．

$-\Gamma^h_{ij}$ が重力場の成分

測地線方程式は，ニュートンの運動方程式と同じように，テスト粒子の加速度を与えるという形の 2 階の微分方程式である．次のように並べて書くと，両者の対応がよくわかる．

$$\frac{d^2\xi^h}{dt^2} = -\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\xi^j}{dt}, \qquad\qquad \frac{d^2x^h}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^h}.$$

どちらの方程式でも，右辺が，重力による加速度を与えている．したがって，**$-\Gamma^h_{ij}$ は，座標系 G における重力場の成分である．**

計量 γ_{ij} が重力ポテンシャル

ニュートンの意味の重力場 $-\partial\Phi/\partial x^h = -\operatorname{grad}\Phi$ は，ただ 1 つの重力ポテンシャル関数 Φ から導かれる．同じ意味で，クリストッフェルの記号 Γ^h_{ij} は計量テンソルの微分を特定の形に組み合せたものであり，計量 γ_{ij}，の "勾

[注 3] 訳注：和訳については訳者のノート参照.

[注 4] 訳注：和訳については訳者のノート参照.

配” のようなものである．したがって，相対論においては計量テンソルが重力ポテンシャルに相当する役割を果たす．ニュートンの重力ポテンシャルはただ 1 個の関数なのに対して，相対論的ポテンシャルは 10 個の関数，すなわち，対称テンソル γ_{ij} のすべての独立な成分からなる．

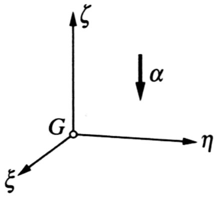
	ニュートン	アインシュタイン
重力場	$-\nabla\Phi$	$-\Gamma^h_{ij}$
重力ポテンシャル	Φ	γ_{ij}

なお，複数の成分を持つポテンシャルというのは，他にも例がないわけではない．例えば，マクスウェルの電磁場もポテンシャルで記述されるが，そのポテンシャルは 4 元ベクトル $\mathbb{A}(t,\mathbf{x}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ である．

幾何学と物理学の融合

計量テンソルは，幾何学と物理学を深い意味で統合する．計量テンソルは，時空がどのように曲がっているか，そして，その上で物体がどのように運動するかを指定する．時空が曲がっているために物体は特定の運動をする．その世界線が，その曲がった時空の幾何においての “直線” である．

一様重力場



時空の中の，重力場が本質的に定数だと考えられるくらい小さな領域の場合に戻って，その中でのテスト粒子の運動を詳細に調べよう．座標系 G : $(\tau, \xi, \eta, \zeta) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ は，重力場に対して静止していて，この座標系から見ると重力場は強さ α で ζ 軸の負の向きだとする．この重力場は，この座標系でどのように表され，またどのような運動を与えるのだろうか？

アインシュタインによれば，まず，自由落下する座標系 $R : (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ でこれらの質問に答え，一般共変性の原理を用いてその結果を G に移せばよい．座標系 R は慣性座標系なので（R から見るとテスト粒子は等速直線運動する），特殊相対論の法則が成立する．特に，R での計量は

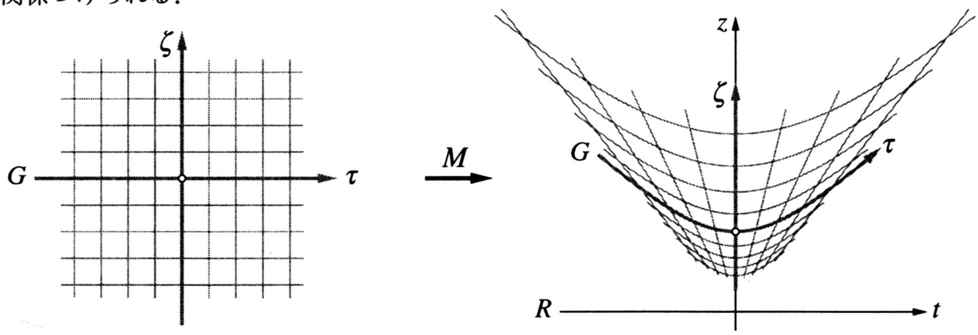
座標系 R における計量

$$g_{kl}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という形になる．座標系 R の原点は ζ 軸に沿って運動するとする．座標系 R と G で，空間方向の対応する座標軸が平行になるように向きを決め，また，時刻の共通の原点 $t = \tau = 0$ を，G が R に対して静止していた瞬間にとる．どの時刻においても $x = \xi, y = \eta$ なので，これらの変数は無視して，残りの 2 個の変数に対応する (t, z) 平面，(τ, ζ) 平面で考える．定理 4.1 から，これらの変数は写像

$$M : \begin{cases} t = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha} \sinh \alpha\tau, \\ z = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha} \cosh \alpha\tau \end{cases}$$

で関係づけられる．



変数 x, y を無視しているので，座標系 G,R での計量は 2×2 行列　**座標系 G における計量**

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{03} \\ \gamma_{30} & \gamma_{33} \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{03} \\ g_{30} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．計量テンソルは共変的なので，γ_{ij} は g_{kl} から求められる．そのために，写像 M の $P = (\tau, \zeta)$ における微分

$$dM_P = \begin{pmatrix} e^{\alpha\zeta} \cosh \alpha\tau & e^{\alpha\zeta} \sinh \alpha\tau \\ e^{\alpha\zeta} \sinh \alpha\tau & e^{\alpha\zeta} \cosh \alpha\tau \end{pmatrix} = e^{\alpha\zeta} H_{\alpha\tau}$$

を使う．ここで，$H_{\alpha\tau}$ は双曲角 $\alpha\tau$ の双曲回転である．双曲回転の性質から

$$\Gamma_P = dM_P^t \, G \, dM_P = e^{2\alpha\zeta} H_{\alpha\tau} \, G \, H_{\alpha\tau} = e^{2\alpha\zeta} G$$

すなわち，

$$\Gamma_P = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{03} \\ \gamma_{30} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\zeta} & 0 \\ 0 & -e^{2\alpha\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\xi^3} & 0 \\ 0 & -e^{2\alpha\xi^3} \end{pmatrix}$$

がわかる．これが，G における計量の式である．また，

$$\Gamma_P^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma^{00} & \gamma^{03} \\ \gamma^{30} & \gamma^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha\zeta} & 0 \\ 0 & -e^{-2\alpha\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha\xi^3} & 0 \\ 0 & -e^{-2\alpha\xi^3} \end{pmatrix}$$

も以下で用いる．

次に重力場の成分 $-\Gamma_{ij}^h$ を求めよう．クリストッフェルの記号のうち，ゼロでないものは　**重力場**

$$\begin{aligned} \Gamma_{30,0} = \Gamma_{03,0} &= \alpha e^{2\alpha\xi^3}, & \Gamma_{30}^0 = \Gamma_{03}^0 &= \alpha, \\ \Gamma_{00,3} &= -\alpha e^{2\alpha\xi^3}, & \Gamma_{00}^3 &= \alpha, \\ \Gamma_{33,3} &= -\alpha e^{2\alpha\xi^3}, & \Gamma_{33}^3 &= \alpha \end{aligned}$$

だけであることが確かめられる．測地線の助変数を t とすると，測地線方程式は，

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi^0}{dt^2} &= -2\alpha \frac{d\xi^0}{dt} \frac{d\xi^3}{dt}, \\ \frac{d^2\xi^3}{dt^2} &= -\alpha \left(\frac{d\xi^0}{dt} \right)^2 - \alpha \left(\frac{d\xi^3}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

で与えられる．これを，重力場 $-\nabla\Phi=(0,0,-\alpha)$ のもとでのニュートンの運動方程式

$$\frac{d^2\xi^1}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2\xi^2}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2\xi^3}{dt^2}=-\alpha$$

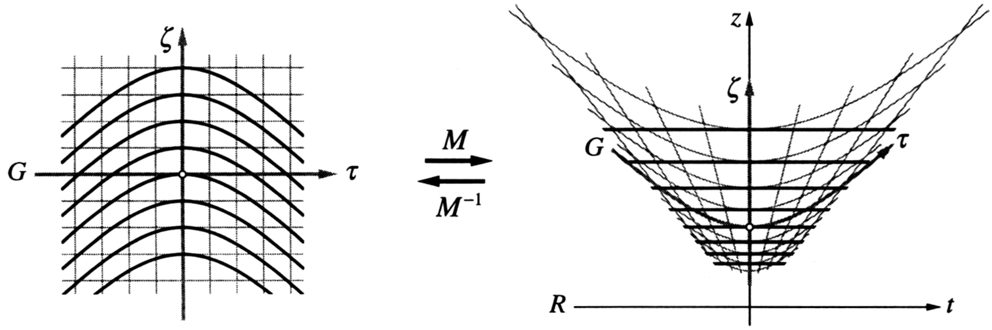
と比較してみるとよい．

重力場中の運動

座標系 G の重力場中での自由落下運動が，この測地線方程式の解である．いつもと同じように，これらの微分方程式から出発して積分によって解析的な解を得るのではなく，解の形の見当をつけて，それが実際に方程式を満たしていることを確かめる，という方法をとろう．いま調べている場合には，R での直線の世界線を，写像 M^{-1} で写したものが G での測地線であると予想できる．(測地線方程式は共変的なので，この予想が正しいことは，実は最初からわかっている．それでも，理論が実証されるのを見るのは意味のあることである．)

座標系 R で静止している物体の世界線

座標系 R の横方向の直線 $z=b$ を考えよう．これは，R で**静止**している物体の世界線である．そのような物体の G での世界線は，t で助変数表示すると



$$\xi^0=\tau=\frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{t}{b}\right),\qquad \xi^3=\zeta=\frac{1}{2\alpha}\ln(\alpha^2(b^2-t^2))$$

であることを 4.2 節で見た．これらの t についての導関数は

$$\frac{d\xi^0}{dt}=\frac{b}{\alpha}\frac{1}{b^2-t^2},\qquad \frac{d\xi^3}{dt}=-\frac{1}{\alpha}\frac{t}{b^2-t^2},$$

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2}=\frac{b}{\alpha}\frac{2t}{(b^2-t^2)^2},\qquad \frac{d^2\xi^3}{dt^2}=-\frac{1}{\alpha}\frac{b^2+t^2}{(b^2-t^2)^2}$$

であり，$\xi^0(t),\xi^3(t)$ が測地線方程式を満たすことを確かめるのは容易である．

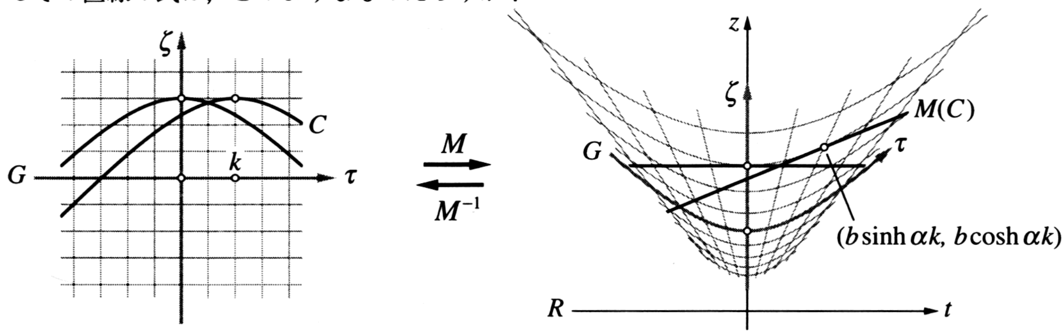
横方向の並進

これらの測地線は，G での縦方向の並進によって互いに重なりあう．一方**横方向**に並進

$$\xi^0\mapsto\xi^0+k,\qquad \xi^3\mapsto\xi^3$$

で写したものもまた測地線であることが，次のように示せる．まず，測地線方程式の係数は横方向の並進で変化しない(係数はもともと定数である)．次に，微分も同様に変化しない．したがって，並進で写した後の曲線もまた，測地線方程式を満たす．共変性の原理から，これら並進で得られた曲線を M で

写したものもまた，R の測地線，すなわち直線である．変数 b, k で指定されるその直線の式は，どのようなものだろうか？



上の図のように，並進で写された曲線 C は，関数

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha b}{\cosh \alpha(\tau - k)} \right)$$

のグラフであり，点 $\tau = k$ に頂点を持つ．（ここでは，もとの変数 τ, ζ をふたたび用いた．そのほうが書き表すのが簡単である．）次に，写像 $M : G \to R$ で曲線 C を R に写す．式

$$\frac{e^{\alpha\zeta}}{\alpha} = \frac{b}{\cosh \alpha(\tau - k)}$$

（これは ζ の式から直ちに導ける）を用い，また平行移動した変数 $\sigma = \tau - k$ をとると，像 $M(C)$ を

$$t = \frac{b}{\cosh \alpha(\tau - k)} \sinh \alpha\tau = \frac{b \sinh \alpha(\sigma + k)}{\cosh \alpha\sigma},$$
$$z = \frac{b}{\cosh \alpha(\tau - k)} \cosh \alpha\tau = \frac{b \cosh \alpha(\sigma + k)}{\cosh \alpha\sigma}$$

と表すことができる．双曲線関数の加法定理から，

$$t = \frac{b(\sinh \alpha\sigma \cosh \alpha k + \cosh \alpha\sigma \sinh \alpha k)}{\cosh \alpha\sigma} = (b \cosh \alpha k) \tanh \alpha\sigma + b \sinh \alpha k,$$
$$z = \frac{b(\cosh \alpha\sigma \cosh \alpha k + \sinh \alpha\sigma \sinh \alpha k)}{\cosh \alpha\sigma} = (b \sinh \alpha k) \tanh \alpha\sigma + b \cosh \alpha k$$

となり，最終的に

$$z - b \cosh \alpha k = \tanh \alpha k \, (t - b \sinh \alpha k)$$

が得られる．これは，点 $(t, z) = (b \sinh \alpha k, b \cosh \alpha k)$ を通る傾き $v = \tanh \alpha k$ の直線である．

重力場中のありうるすべての運動

自由落下している粒子の，R での世界線としてありうるのは上のような直線だけなので，G における対応する曲線

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha b}{\cosh \alpha(\tau - k)} \right)$$

が，重力場 $-\Gamma^h_{ij}$ のもとで可能な運動の世界線のすべてである．ただし，座標 ξ, η は無視してきたことに注意しよう．これらの2個の変数を復活させる

と，計量は，

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\xi^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2\alpha\xi^3} \end{pmatrix}$$

である．これによって，重力場 $-\Gamma^h_{ij}$ に新たなゼロでない成分は現れないので，4 次元時空での運動方程式は

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2} = -2\alpha\frac{d\xi^0}{dt}\frac{d\xi^3}{dt},$$
$$\frac{d^2\xi^1}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2\xi^2}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2\xi^3}{dt^2} = -\alpha\left(\frac{d\xi^0}{dt}\right)^2 - \alpha\left(\frac{d\xi^3}{dt}\right)^2$$

となり，その解は

$$\xi^0(t) = k_1 + \frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{t}{k_2}\right),$$
$$\xi^1(t) = k_3 t + k_4,$$
$$\xi^2(t) = k_5 t + k_6,$$
$$\xi^3(t) = \frac{1}{2\alpha}\ln(\alpha^2(k_2^2 - t^2))$$

である．この解には，6 個の任意定数が含まれている（$k = k_1, b = k_2$ とおいた）．しかし，4 個の 2 階微分方程式を積分すると，積分定数は 6 個でなく **8** 個出てくるはずである．残りの 2 個は，独立変数をアファイン的に $t \mapsto k_7 t + k_8$ と変更すると現れる．

光子の世界線

これで，予想された測地線方程式の解の 8 助変数族を構成できたわけが，それでもまだすべての解を構成したというわけではない．まず，得られた解

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha b}{\cosh\alpha(\tau - k)}\right) \longleftrightarrow z - b\cosh\alpha k = \tanh\alpha k\,(t - b\sinh\alpha k)$$

は時間的曲線であり，座標系 R での速さは $v = \tanh\alpha k$ である．不等式 $|\tanh\alpha k| < 1$ が成立するので，運動している物体は正の質量を持っているということになる．光子をはじめ，質量が 0 の物体は，すべて光の速さ $c = 1$ で運動するが，重力はそのような物体の運動にも影響する．測地線方程式には，それらの運動に対応する解もあるはずである．それに加え，空間的な測地線もあるはずである．

光的な曲線の式を見つけるために，まず慣性座標系 R で考える．この座標系では，光子の世界線は，任意の a に対して $z = a \pm t$ となる．座標系 G では，この光子の世界線は，

$$\xi^0 = \frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{t}{a \pm t}\right), \qquad \xi^3 = \frac{1}{2\alpha}\ln(\alpha^2((a \pm t)^2 - t^2))$$

である．この式は，関係

$$\tanh^{-1} u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

を用いて整理することにより，

$$\xi^0 = \pm\frac{1}{2\alpha}\ln(a \pm 2t) + 定数,$$
$$\xi^3 = \frac{1}{2\alpha}\ln(a \pm 2t) + 定数$$

という形になる．したがって，t を消去すると $\xi^3 = \pm\xi^0 + 定数$ であり，G でも世界線は傾き ± 1 の直線である．さらに，曲線のこの助変数表示は測地線方程式を満たすことが確かめられる．しかし，明らかに，これらの曲線は，上で見つけた 8 個の任意定数を持つ解の族には属していない．これらの解は**特異解**(singular solution) と呼ばれる．

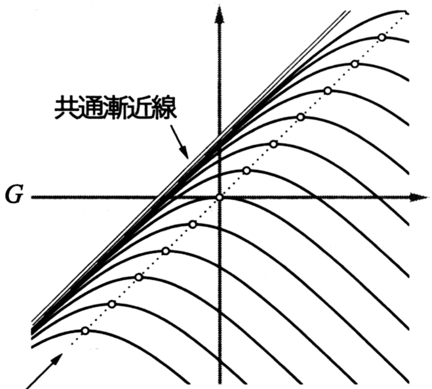
微分方程式の特異解には，いろいろな現れ方がある．いまの場合の特異解は，普通の解の 1 助変数族の共通漸近線になっている．このことを確かめるために，頂点が傾き 1 の同一直線上にあるような解の 1 助変数族を考えよう．解

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha b}{\cosh\alpha(\tau - k)}\right)$$

のグラフの頂点は $(\tau, \zeta) = (k, \ln(b\alpha)/\alpha)$ なので，この点が，例えば直線 $\zeta = \tau$ 上にあるためには，

$$k = \frac{\ln(b\alpha)}{\alpha}, \qquad すなわち \qquad b = \frac{e^{\alpha k}}{\alpha}$$

という 1 助変数族をとればよい．



極大点は直線 $\zeta = \tau$ 上にある

極大点が傾き -1 の同一直線上にあるような，普通の解の 1 助変数族の共通漸近線もまた特異解となる．空間的曲線であるような測地線については練習問題 5,6 で扱う．

練習問題

1. **電磁場のポテンシャル**. この問の目的は，電磁場の成分 $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$（1.4 節

参照)がどのように4元ポテンシャル $\mathbb{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ から得られるかを理解することである．ベクトル場 $\mathbf{A}(t, x, y, z)$ を，空間成分 $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$ からなる3次元ベクトル，(t, x, y, z) を慣性座標系の座標とする．磁場ベクトルを $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ で定義する．

(a) 磁場ベクトル $\mathbf{H}$ がマクスウェル方程式 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ を満たすことを示せ．

(b) マクスウェル方程式 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$ が成立するとき，$\nabla \times (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t) = \mathbf{0}$ が満たされることを示せ．

(c) 多変数の微積分(ベクトル解析)の定理から，$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ が成立するとき，$\mathbf{F} = \nabla \psi$ を満たすスカラー関数 ψ が存在する．このことを用いて，

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0$$

を満たす関数 $A^0 = -\psi$ が存在することを示せ．

(d) マクスウェル方程式の残りの2個(電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{J}$ を含むもの)から，4元ポテンシャル $\mathbb{A} = (A^0, \mathbf{A})$ に対する条件

$$\rho = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}), \qquad \mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla A^0)$$

が与えられることを示せ．

(e) 電荷の保存の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

を導け．

次の5つの練習問題は，本文で扱った，座標系 G における一様重力場の計量 (γ_{ij}) に関するものである．

2. クリストッフェルの記号 $\Gamma_{ij,k}$, Γ^h_{ij} と測地線方程式を求めよ．

3. 時間的測地線

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\alpha k}}{\cosh \alpha(\tau - k)} \right) = k - \frac{\ln \cosh \alpha(\tau - k)}{\alpha}$$

の共通漸近線 $\zeta = \tau + \beta$ の ζ 切片 β を求めよ．

4. 条件

$$\xi^0 = \frac{1}{\alpha} \tanh^{-1} \left(\frac{t}{a \pm t} \right), \qquad \xi^3 = \frac{1}{2\alpha} \ln(\alpha^2((a \pm t)^2 - t^2))$$

から，式

$$\xi^0(t) = \pm \frac{1}{2\alpha} \ln(a \pm 2t) + 定数, \qquad \xi^3(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln(a \pm 2t) + 定数$$

を導き，この式で定義される曲線が，任意の a に対して，時間的測地線であることを示せ．

5. (a) 2つの曲線 $\boldsymbol{\xi}_{\pm}(u)$ は，同一の式

$$\xi^0(u) = k_1 + \frac{1}{\alpha} \tanh^{-1} \left(\frac{k_2}{u} \right), \qquad \xi^3(u) = \frac{1}{2\alpha} \ln(\alpha^2(u^2 - k_2^2))$$

で定義されるが，その助変数のとる値の範囲が異なるものである．曲線 $\boldsymbol{\xi}_-$ の定義域を $u < -k_2$，曲線 $\boldsymbol{\xi}_+$ の定義域を $k_2 < u$ とする．このとき，それぞれの曲線が，任意の k_1 と任意の $k_2 > 0$ に対して空間的測地線であることを示せ．

(b) 本文で扱った時間的測地線の場合と同様に，曲線 $\boldsymbol{\xi}_\pm$ を，適当な関数 $\zeta = f_\pm(\tau)$ のグラフとして表せ．

(c) 時空 G を $(1+3)$ 次元と考えて，積分定数の個数から期待される，空間的測地線の 8 助変数族を求めよ．

6. (a) 練習問題 5 の曲線 $\boldsymbol{\xi}_\pm$ が，縦方向の漸近線 $\xi^0 = k_1$ と，傾きが ∓ 1 のもう 1 つの漸近線を持つことを示せ．

(b) この測地線 $\xi^0 = k_1$ を共通漸近線とする，測地線の 1 助変数族を求めよ．このことから，縦方向の直線 $\xi^0 = k_1$ が測地線の特異解であることが示される．曲線 $\xi^0 = k_1$ を測地線方程式の解とするような助変数表示を求めよ．

以下の演習問題は，慣性座標系 $R : (t, x, y, z)$ に対して，x 軸のまわりに角速度 ω で回転する座標系 $G : (\tau, \xi, \eta, \zeta) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ に関するものである．座標系 G の ξ 軸が x 軸に常に一致しているとすると，座標を変換する写像 $M : G \to R$ は 4.1 節で調べたように，

$$M : \begin{cases} t = \tau, \\ x = \xi, \\ y = \eta \cos \omega\tau - \zeta \sin \omega\tau, \\ z = \eta \sin \omega\tau + \zeta \cos \omega\tau \end{cases}$$

で与えられる．

7. 逆写像 $M^{-1} : R \to G$ と線型写像 dM_P および $(dM_P)^{-1}$ を求めよ．

8. 座標系 R のミンコフスキ計量 $J_{1,3}$ から誘導される，座標系 G の計量 (γ_{ij}) を求め，その逆行列が

$$(\gamma^{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega\zeta & -\omega\eta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \omega\zeta & 0 & -1 + \omega^2\zeta^2 & -\omega^2\eta\zeta \\ -\omega\eta & 0 & -\omega^2\eta\zeta & -1 + \omega^2\eta^2 \end{pmatrix}$$

であることを示せ．

9. 座標系 G での第 1 種のクリストッフェルの記号 $\Gamma_{ij,k}$ を求めよ．第 2 種のクリストッフェルの記号のゼロでない成分は，

$$\Gamma^2_{00} = -\omega^2\eta, \qquad \Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} = -\omega,$$
$$\Gamma^3_{00} = -\omega^2\zeta, \qquad \Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{20} = \omega$$

であることを示せ．

10. (a) 座標系 G における測地線方程式を求めよ．

(b) 座標系 R における任意の直線 $(t,x,y,z)=(a^0t+b^0, a^1t+b^1, a^2t+b^2, a^3t+b^3)$ は測地線である．これはなぜか．この R の直線の M による G での像を求め，それが G における測地線であることを示せ．

11. 座標系 G における 2 つの曲線

$$\boldsymbol{\xi}_1(t)=(t,0,vt\cos\omega t,-vt\sin\omega t),$$
$$\boldsymbol{\xi}_2(t)=(t,0,(1-vt)\cos\omega t,(vt-1)\sin\omega t)$$

を考える．

(a) 曲線 $\boldsymbol{\xi}_1$ および $\boldsymbol{\xi}_2$ が測地線であることを示し，(η,ζ) 平面における道として描け．その際，$v=0.1, \omega=1$ ととり，範囲 $0\le t\le\pi$ を描け．

(b) 曲線 $j=1,2$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{\xi}_j'(t)$ および $\boldsymbol{\xi}_j''(t)$ を求めて，(η,ζ) 平面で点 $t=0,1$ においての曲線に始点を重ねて描け．

(c) 図から，曲線 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ が右に曲がっていることが分かる．ここで，右に曲がるとは，平行 4 辺形 $\boldsymbol{\xi}_j'\wedge\boldsymbol{\xi}_j''$ (5.1 参照)が負の向きづけられた面積を持つということである．曲線 $j=1,2$ に対して，任意の t で $\mathrm{area}\,\boldsymbol{\xi}_j'(t)\wedge\boldsymbol{\xi}_j''(t)<0$ を示せ．

12. 座標系 G の曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$ を，

$$\tau=t,$$
$$\xi=0,$$
$$\eta=(a^2t+b^2)\cos\omega t+(a^3t+b^3)\sin\omega t,$$
$$\zeta=-(a^2t+b^2)\sin\omega t+(a^3t+b^3)\cos\omega t$$

とする．この (η,ζ) 平面の曲線が測地線であることを示し，任意の t で，$\mathrm{area}\,\boldsymbol{\xi}'(t)\wedge\boldsymbol{\xi}''(t)<0$ という意味で右に曲がっていることを示せ．
この計量の定める重力は，すべての測地線を進行方向の右に曲がらせる．この力は**コリオリの力**(Coriolis force)として知られる．

7.2　真空中の重力場の方程式

ニュートンの重力場の方程式

空間の点 $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$ における物質の密度を $\rho(\mathbf{x})$ としたとき，ニュートンの重力場

$$-\nabla\Phi(\mathbf{x})=-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1},\frac{\partial\Phi}{\partial x^2},\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)$$

は，**場の方程式**(field equation)

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x})=\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})=\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^3)^2}=4\pi G\rho(\mathbf{x})$$

を満たす．この方程式は，物質の分布から，どのような重力場が作られるか，そして最終的にはどのように物質が運動するかを規定している．

相対論的な重力場の方程式は曲率を決定する

相対論的な重力理論も，物質の分布から，どのような重力場 $-\Gamma^k_{ij}$ が作られるか，という同じ問に答えられなければならない．しかし，相対論におい

ては，この問はより深い意味を持っている．というのも，場は時空の計量から導かれるものであり，時空の幾何学的構造の反映だからである．物質の存在が時空の幾何に影響を与え，曲率を引き起こす．重力場の方程式は，正しく定式化できたときには，**物質からどのように時空の曲率が決まるか**を規定するはずである．

非相対論的な重力理論

真空中の重力場の方程式

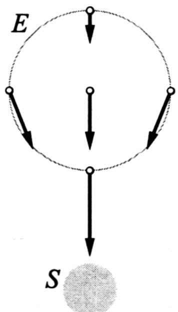
ニュートンの重力場の方程式は，空間の何もない点（“真空”），つまり $\rho(\mathbf{x}) = 0$ であるような点で最も簡単な形

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 0$$

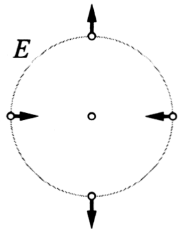
をとる．これが**真空中の重力場の方程式**である．[注5]この節では，一般相対論における，これに対応する方程式を決定することに集中する．まず，この方程式が非相対論的ニュートン力学で果たす役割を思い出そう．

潮汐力

真空中の重力場の方程式は，4.3 節で，重力の潮汐力の議論のところで出てきた．完全に一様な，つまり強さが一定の重力場中では，潮汐力は働かない．潮汐力は，重力場の空間的な変化の現れである．下の図のように，大きな質量を持つ重力源 S の近くに，広がりを持つ物体 E を置き，その各点にはたらく重力を考えよう．重力は，大きさも向きも各点で異なる．各点での差を考えるために，各点にはたらく力から，物体 E の中心にはたらく力を引き去ることにしよう．これは，E の中心とともに落下するような座標系に移って考えることに相当する．この座標系では，潮汐力だけがはたらいているように見える．潮汐力は，ある 2 点に対しては引き寄せあうようにはたらき，ある 2 点に対しては遠ざけあうようにはたらく．



重力源 S に対して固定された座標系



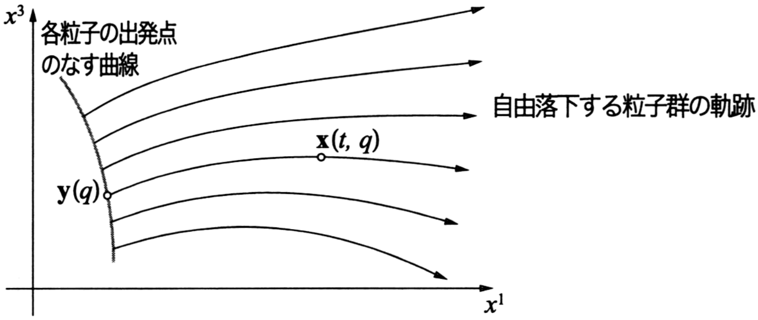
E の中心に対して固定された座標系

軌跡の族

この違いを詳しく調べるために，$\mathbf{R}^3$ の曲線 $y^k(q)$ 上から出発する粒子の集団を考え，重力場 $-\nabla\Phi$ のもとで自由落下させる．点 $y^k(q)$ から出発した

[注5] 訳注：物質の存在する領域の外部で成立する方程式なので，外部場方程式とも呼ばれる．

粒子の軌跡を $x^k(t,q)$ とする．定義より $x^k(0,q)=y^k(q)$ である．



これらの粒子は，ニュートンの運動方程式に従って，重力ポテンシャル Φ だけから決まる加速度で運動する．近接した2点 q と $q+\Delta q$ から出発する2個の粒子について，運動方程式はそれぞれ，

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t,q)=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}(x^j(t,q)),$$
$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t,q+\Delta q)=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}(x^j(t,q+\Delta q))$$

である．(非相対論的力学では，添え字の上下の区別が意味をなさないことに注意しよう．添え字 k は，上の式の左辺では上付き添え字であるのに対し右辺では下付き添え字である．) 両辺それぞれについて，これら2つの式の差をとり，Δq で割ると，

$$\frac{\dfrac{d^2x^k}{dt^2}(t,q+\Delta q)-\dfrac{d^2x^k}{dt^2}(t,q)}{\Delta q}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^k}(x^j(t,q+\Delta q))-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^k}(x^j(t,q))}{\Delta q}$$

である．極限 $\Delta q\to 0$ をとると，

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial x^k}{\partial q}(t,q)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial q\partial x^k}(x^j(t,q))$$

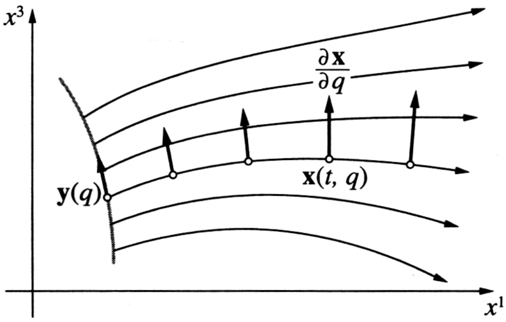
となる．ここで，t についての微分には d,q についての微分には ∂ を用いた．右辺に合成関数の微分法を使うと，$\partial x^j/\partial q$ についての2階の線型微分方程式

潮汐加速度の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial x^k}{\partial q}=-\sum_j\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial q}$$

が得られる．これは，4.3節で導いた**潮汐加速度の方程式**を，ベクトル $\partial\mathbf{x}/\partial q=$

$\partial x^j/\partial q(t,q)$ に適用したものになっている．



偏移率 $\partial \mathbf{x}/\partial q$ が潮汐を表す

なぜ，ベクトル $\partial \mathbf{x}/\partial q = \partial x^j/\partial q$ が潮汐効果を表すのだろうか．ベクトル $\partial \mathbf{x}/\partial q$ が，1 個の粒子の軌跡に沿って時間的にどう変化していくかを考えてみよう．もし，$\partial \mathbf{x}/\partial q$ の大きさが小さくなるなら，近くの粒子は互いに引き寄せあう．逆に大きくなるなら，近くの粒子は互いに遠ざけあう．したがって，$\partial \mathbf{x}/\partial q$ が，まさに測りたかった量である，**近接する軌跡の偏移率**を表している．

潮汐加速度は，偏移ベクトル $\partial \mathbf{x}/\partial q$ の線型な関数なので，行列の積を用いて次のように表せる．

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} = -d^2\Phi_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}, \qquad \text{ただし} \qquad d^2\Phi_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x})}{\partial x^j \partial x^k}\right).$$

真空中の重力場の方程式: $\mathrm{tr}\, d^2\Phi_{\mathbf{x}} = 0$

真空中の重力場の方程式は，この行列 $d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ の対角和がゼロという主張

$$\mathrm{tr}\, d^2\Phi_{\mathbf{x}} = \sum_j \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x})}{\partial x^j \partial x^j} = 0$$

と同値である．

潮汐力の特徴

行列 $d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ は 3×3 の対称行列なので，3 つの実固有値を持ち，対応するベクトルは線型独立である．ベクトル $\partial \mathbf{x}/\partial q$ がこれらのうちの 1 つと一致する場合には，潮汐加速度はこのベクトルの方向に起こる．つまり

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} = -\lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}, \qquad \lambda \text{ は } \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \text{ に対応する固有値}$$

である．固有値 λ が正の場合には，加速度は，原点方向を向き，潮汐力は**引力**である．逆に λ が負の場合には，加速度は原点と逆方向を向き，潮汐力は**斥力**である．すべての固有値の和は対角和に等しく，$d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ の対角和 0 なので，3 つの固有値がすべて同じ符号を持つことはできない．したがって，潮汐力はある方向には引力で別の方向には斥力である．

まとめ: 潮汐加速度は対角和がゼロの 3×3 対称行列

ここで，非相対論的な場合をまとめておく．初期値のずれが q であるような粒子の軌跡の族 $x(t,q)$ を考えたとき，近接する測地線の偏移率 $\partial \mathbf{x}/\partial q$ は潮汐加速度の法則

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} = -d^2\Phi_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}$$

に従う．したがって，潮汐加速度の性質は，すべて行列 $d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ に含まれている．**これは対角和がゼロの 3×3 対称行列である．**

測地線の偏移

潮汐が測地線を偏移させる

重力場中を自由落下する物体が感じる潮汐加速度を，一般相対論はどのように記述するのだろうか？ 簡単に答えると，自由落下は測地線に沿った運動なので，潮汐効果は測地線の偏移率に現れる．

時空座標系 $R:(x^0,x^1,x^2,x^3)$ で，計量 g_{kl} のもとでの自由落下運動について復習しよう．座標軸のうち，x^0 軸が時間的で，残りの 3 つが空間的である．観測者 G は世界線 $x^k=z^k(\tau)$ にしたがって自由落下している．ここで τ は G の固有時間である．自由落下であることから，G は加速度を感じない．速度ベクトル $dz^k/d\tau$ の変化率はゼロである．各点での速度から，世界線上に定義されたベクトル場が 1 つ定まる．このベクトル場の変化率を共変的に計算するには，G の世界線に沿った共変微分を使う必要がある．つまり，

$$G\text{ の加速度:}\qquad \frac{D}{d\tau}\frac{dz^k}{d\tau}=\frac{d^2z^k}{d\tau^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dz^i}{d\tau}\frac{dz^j}{d\tau}$$

である．したがって，加速度がゼロであるという条件は，G の世界線が測地線であるという条件

$$\frac{D}{d\tau}\frac{dz^k}{d\tau}=\frac{d^2z^k}{d\tau^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dz^i}{d\tau}\frac{dz^j}{d\tau}=0$$

そのものである．

測地線の族の中に世界線 G を埋め込む

観測者 G の世界線に近接する測地線の偏移を考えるために，G の世界線を，測地線の族 $x^k=x^k(\tau,q)$ に埋め込もう．このとき，$x^k(\tau,0)=z^k(\tau)$，すなわち族の助変数の値 $q=0$ が G の世界線そのものに対応するとし，助変数 τ を各測地線の固有時間とする．各測地線の偏移率は，ベクトル

$$\frac{\partial x^k}{\partial q}(\tau,q)$$

を，q を固定して τ のみに依存すると考えたものである．測地線の偏移についての最も基本的な結果は次の定理に含まれている．

定理 7.1 計量 g_{kl} に対応するリーマン曲率テンソルを R^h_{ijk} としたとき，測地線の族 $x^h(\tau,q)$ に対して，

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\frac{\partial x^h}{\partial q}+R^h_{ijk}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}=0$$

が成り立つ．

証明：2 つの助変数 τ と q の役割が異なることを強調するために，τ についての微分には記号 d を用いる．変数 q を固定して，$x^h(\tau,q)$ の 1 階，2 階微分を計算する．まず，

$$\frac{D}{d\tau}\frac{\partial x^h}{\partial q}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x^h}{\partial q}\right)+\Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}$$

である．そして次に，

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\frac{\partial x^h}{\partial q} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial^2 x^h}{\partial\tau\partial q} + \Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\right) + \Gamma^h_{mk}\left(\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tau\partial q} + \Gamma^m_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\right)\frac{dx^k}{d\tau}$$
$$= \frac{\partial}{\partial q}\overset{\mathrm{A}}{\frac{d^2x^h}{d\tau^2}} + \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q} + \Gamma^h_{ij}\overset{\mathrm{A}}{\frac{d^2x^i}{d\tau^2}}\frac{\partial x^j}{\partial q} + \Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial^2 x^j}{\partial\tau\partial q}$$
$$+ \Gamma^h_{mk}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tau\partial q}\frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma^h_{mk}\Gamma^m_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}$$

である．ここで，各曲線 x^h が測地線であることを用いて，A と印された 2 個所で，

$$\frac{d^2x^h}{d\tau^2} \quad \text{を} \quad -\Gamma^h_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} \quad \text{で，}$$

置き換える（さらに，2 番目の場所では無効添え字の置き換え $i \mapsto m$ を行う）．すると次のようになる．

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\frac{\partial x^h}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(-\Gamma^h_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right) + \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma^h_{mj}\left(-\Gamma^m_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right)\frac{\partial x^j}{\partial q}$$
$$+ \Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial^2 x^j}{\partial\tau\partial q} + \Gamma^h_{mk}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tau\partial q}\frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma^h_{mk}\Gamma^m_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}$$
$$= -\frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} - 2\Gamma^h_{ik}\frac{\partial^2 x^i}{\partial q\partial\tau}\frac{dx^k}{d\tau} + \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}$$
$$- \Gamma^h_{mj}\Gamma^m_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau} + 2\Gamma^h_{ik}\frac{\partial^2 x^i}{\partial q\partial\tau}\frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma^h_{mk}\Gamma^m_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}$$
$$= \left(\frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{mk}\Gamma^m_{ij} - \Gamma^h_{mj}\Gamma^m_{ik}\right)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}$$
$$= R^h_{ikj}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau} = -R^h_{ijk}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial q}\frac{dx^k}{d\tau}.$$

証明終

系 7.1 (潮汐加速度の方程式) 観測者 G の世界線 $z^k(\tau) = x^k(\tau, 0)$ が，測地線の族 $x^k(\tau, q)$ に埋め込まれているとする．このとき，測地線 $z^k(\tau)$ 上での偏移率は

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\frac{\partial x^h}{\partial q} = -K^h_j\frac{\partial x^j}{\partial q}, \qquad \text{ただし} \qquad K^h_j = R^h_{ijk}\frac{dz^i}{d\tau}\frac{dz^k}{d\tau}$$

を満たす．

フェルミ座標

K^h_j と $d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ の比較

相対論的な潮汐加速度の方程式に現れるテンソル K^h_j は，非相対論的な方程式での行列

$$d^2\Phi_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{x})}{\partial x^j\partial x^k}\right)$$

と同じ役割を果たしている．実際，テンソルの各成分 K^h_j は，$d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ の成分と同様，重力場の 1 階微分を含んでいる．しかし，異なる点もある．テンソル K^h_j は 4×4 行列であり，$d^2\Phi_{\mathbf{x}}$ と違って，3×3 でも対称でもない．しか

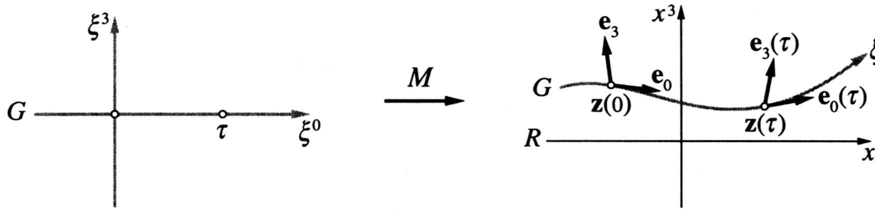
し，物理学者エンリコフェルミ（Enrico Fermi）が1922年に導入した座標系で成分 K^h_j を計算し直すと，非相対論的な場合とすべての面で対応がつくような特別な形をしていることがわかる．

$\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}$ は G の世界線上でゼロ

フェルミ座標系とは，座標系 R の計量 g_{ij} が定める重力場中を自由落下する観測者の座標系 $G:(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ であるということができる．観測者 G には，重力場は感じられない．フェルミ座標は，このことを反映するように構成される．すなわち，座標系 G では，観測者 G の世界線上の重力場 $-\Gamma^h_{ij}$ のすべての成分がゼロになる．このような性質を持つフェルミ座標を具体的に定義するために，フェルミ座標と座標系 R の関係，つまり写像 $M:G\to R$ の与え方を説明する．これはいくつかの段階にわけて行うのがわかりやすい．

ξ^0 軸の像

ステップ1．まず $\xi^0=\tau$ とおき，G の世界線を，座標系 G の ξ^0 軸とする．座標系 R では，G の世界線は $x^k=z^k(\tau)=z^k(\xi^0)$ と表されるので，これで，写像 M が ξ^0 軸をどのように写すか指定したことになる．



G の世界線上の正規直交基底

ステップ2．速度ベクトル $\mathbf{e}_0(\tau)=dz^k/d\tau$ は，R の座標系の，G の世界線上の各点で定義される時間的単位ベクトルである．点 $z^k(0)$ における空間的単位ベクトル $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ を適当にとって，$\{\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ が接空間 $TR_{\mathbf{z}(0)}$ の正規直交基底になるようにする．つまり，$TR_{\mathbf{z}(\tau)}$ における計量 g_{kl} のもとで，

$$\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_0=1,\qquad \mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\alpha=-1,\ \alpha=1,2,3,\qquad \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_l=0,\ k\neq l$$

となるようにする．次に，$i=1,2,3$ に対して，$\mathbf{e}_i(\tau)$ を，R における G の世界線に沿っての $\mathbf{e}_i$ の**平行移動**として定義する．内積は平行移動によって保たれるので，

$$\{\mathbf{e}_0(\tau),\mathbf{e}_1(\tau),\mathbf{e}_2(\tau),\mathbf{e}_3(\tau)\}$$

は，各 τ について，接空間 $TR_{\mathbf{z}(\tau)}$ の正規直交基底である．

ξ^0 軸から外れた点の表示

ステップ3．次に，ξ^0 軸上にない G の点

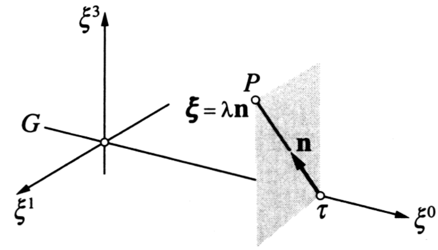
$$P=(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)=(\tau,\boldsymbol{\xi})$$

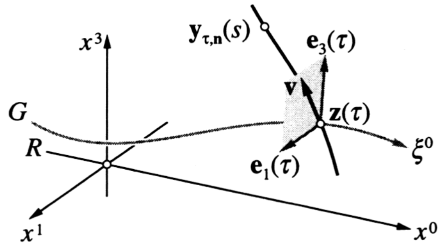
を考える．この場合，座標の空間成分 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ はゼロでない．ここで，$\boldsymbol{\xi}$ を $TG_{(\tau,\mathbf{0})}$ のベクトルであるかのように考えて，ベクトル $\mathbf{n}$ を $\boldsymbol{\xi}$ 方向の単位ベクトルにとる．単位ベクトルを定めるための長さは，通常のユークリッド計量

$$\lambda=\|\boldsymbol{\xi}\|=\sqrt{(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2}$$

で定める．すると，$\mathbf{n}=\boldsymbol{\xi}/\lambda=\left(\xi^1/\lambda,\xi^2/\lambda,\xi^3/\lambda\right)=(n^1,n^2,n^3)$ となり，

$P=(\tau,\lambda\mathbf{n})=(\tau,\lambda n^1,\lambda n^2,\lambda n^3)$ と書ける.





ステップ 4. 次に座標系 R に移って考える.接空間 $TR_{\mathbf{z}(\tau)}$ のベクトル $\mathbf{v}$ を, **測地線 $\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}$**
条件

$$\mathbf{v}=n^1\mathbf{e}_1(\tau)+n^2\mathbf{e}_2(\tau)+n^3\mathbf{e}_3(\tau)=n^\alpha\mathbf{e}_\alpha(\tau)$$

から定める.(空間の添え字 1, 2, 3 にはギリシャ文字を使うことにしたのだった.)構成から,$\mathbf{v}$ には $\mathbf{e}_0(\tau)$ 方向の成分はない.接空間の $TR_{\mathbf{z}(\tau)}$ の計量 g_{kl} で内積を計算すると,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}&=n^\alpha n^\beta\ \mathbf{e}_\alpha(\tau)\cdot\mathbf{e}_\beta(\tau)\\&=-n^\alpha n^\beta\delta_{\alpha\beta}=-(n^1)^2-(n^2)^2-(n^3)^2=-\|\mathbf{n}\|^2=-1\end{aligned}$$

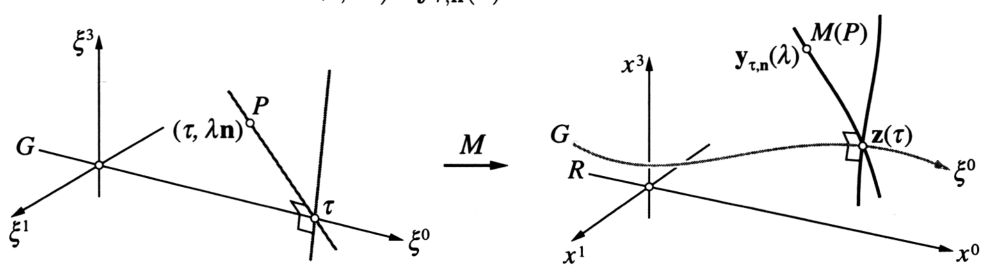
となって,$\mathbf{v}$ は空間的ベクトルである.ここで,R の曲線 $\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}(s)$ を,初期条件

$$\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}(0)=\mathbf{z}(\tau),\qquad \mathbf{y}'_{\tau,\mathbf{n}}(0)=\mathbf{v}$$

から一意的に定まる測地線とする.ベクトル $\mathbf{v}$ は,R の(空間的)単位ベクトルなので,$\mathbf{y}'_{\tau,\mathbf{n}}(s)$ は $s=0$ において単位速さを持つベクトルである.曲線 $\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}$ は測地線なので,$\mathbf{y}'_{\tau,\mathbf{n}}(s)$ はすべての s について単位速さである.したがって,s は $\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}$ の弧長助変数である.

ステップ 5. 座標系 G の点 $P=(\tau,\lambda\mathbf{n})$ の像を,R の点 $\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}(\lambda)$ と定義す **写像 $M:G\to R$ の完成**
る.すなわち,

$$\begin{aligned}M:G\quad&\to R\\(\tau,\lambda\mathbf{n})&\mapsto\mathbf{y}_{\tau,\mathbf{n}}(\lambda).\end{aligned}$$



この写像は,次のように幾何学的に記述できる.まず,ξ^0 軸上の点 τ を通り,ξ^0 軸に垂直な直線を考える.ここで,垂直というのはユークリッド的な意味である.上の図には,例としてそのような 2 つの直線が灰色で描かれている.,このような各直線は,R に写されたときには,対応する点 $\mathbf{z}(\tau)$ で G

の世界線と垂直に(R の計量で測って！) 交わる測地線になる．一直線上の各点は直線から測地線へ等長的に写される．言い換えると，ξ^0 軸から距離 λ だけ離れた点は，G の世界線から，対応する測地線の弧長で λ だけ離れた点に写される．

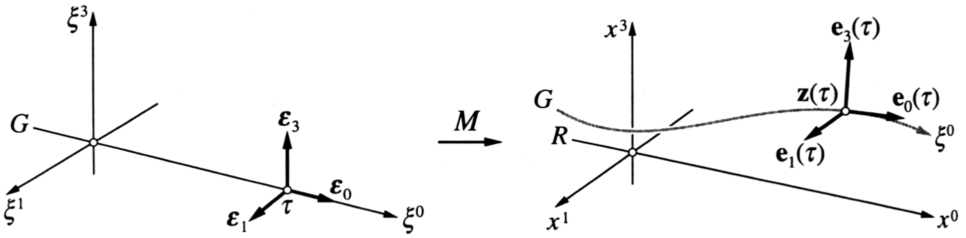
命題 7.1 写像 $M : G \to R$ は，ξ^0 軸の近傍で逆写像を持つ．

証明： 逆関数定理により，写像 $M : G \to R$ は，その微分 $dM_P : TG_P \to TR_{M(P)}$ が正則であるような点 P の近傍では逆を持つ．したがって，命題を証明するには，ξ^0 軸上の各点 $P = (\tau, 0, 0, 0)$ で dM_P が正則であることを示せばよい．

微分 dM_P が正則であることを示すには，$TG_P = TG_{(\tau,0,0,0)}$ の基底の像が，値域 $TR_{M(P)} = TR_{\mathbf{z}(\tau)}$ で線型独立であることを示せばよい．基底として，$TG_{(\tau,0,0,0)}$ の標準的な基底

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

をとる．



ここで，写像 M は ξ^0 軸を R における G の世界線に写すので，

$$M(\tau, 0, 0, 0) = \mathbf{z}(\tau)$$

である．したがって，$dM_P(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{z}'(\tau) = \mathbf{e}_0(\tau)$ である．さらに，写像 M の構成から，ベクトル $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ はベクトル $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\alpha(\tau)$ に写される．つまり，

$$dM_{(\tau,0,0,0)} : \{\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\} \mapsto \{\mathbf{e}_0(\tau), \mathbf{e}_1(\tau), \mathbf{e}_2(\tau), \mathbf{e}_3(\tau)\}$$

であり，$dM_{(\tau,0,0,0)}$ は正則である．　**証明終**

G の計量を定義する

この写像 $M : G \to R$ を，計量を，R から G に，一般共変的に“引き戻す”(“pull back”)のに用いることにする．接空間 TG_P の2つのベクトル $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ を考えよう．ベクトル $\mathbf{x} = dM_P(\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{y} = dM_P(\boldsymbol{\eta})$ を，微分で $TR_{M(P)}$ に写された像とする．このとき，TG_P の内積を

$$\underbrace{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}}_{TG_P\text{ の内積}} = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}_{TR_{M(P)}\text{ の内積}}$$

と**定義する**. 座標系 G の計量 γ_{ij} の成分をこの式から決めようとするとどうなるかを見てみよう. 任意のベクトル

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{d\xi^i}{dt}, \qquad \mathbf{x} = \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{d\xi^i}{dt},$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{d\eta^j}{dt}, \qquad \mathbf{y} = \frac{dy^l}{dt} = \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\frac{d\eta^j}{dt},$$

に対して,

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta} = \underbrace{\gamma_{ij}}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\eta^j}{dt}, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = g_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dy^l}{dt} = \underbrace{g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}}\frac{d\xi^i}{dt}\frac{d\eta^j}{dt}$$

であるが, この 2 つの量は, 任意のベクトル $d\xi^i/dt$, $d\eta^j/dt$ に対して等しくならなければならないので, 下に中括弧のついた部分が等しくなければならない. このことから, 見慣れた座標変換の式

$$\gamma_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}$$

が得られ, これを γ_{ij} の定義とすることができる.

系 7.2 フェルミ座標系 G における次の曲線は測地線である. **G の特別な測地線**

- ξ^0 軸.
- ξ^0 軸上の各点 τ で ξ^0 軸と垂直に交わる直線 $\boldsymbol{\zeta}(s) = (\tau, s\mathbf{n})$.

証明：構成から, 写像 $M : G \to R$ は上の各直線を R の測地線に写す. 一般共変性から, これらは G においても測地線である. **証明終**

系 7.3 任意の τ に対して, フェルミ座標系 G の点 $P = (\tau, 0, 0, 0)$ における計量は標準的ミンコフスキ計量である.

$$\gamma_{ij}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

証明：計量の成分 $\gamma_{ij}(P)$ の値は, 接空間 TG_P で計算された内積 $\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j$ の値に等しい. 座標系 G における計量の定義から,

$$\underset{TG_P \text{ の内積}}{\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j} = \underset{TR_{M(P)} \text{ の内積}}{dM_P(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \cdot dM_P(\boldsymbol{\varepsilon}_j)} = \mathbf{e}_i(\tau) \cdot \mathbf{e}_j(\tau)$$

である. 構成から, $\{\mathbf{e}_i(\tau)\}$ は $TR_{M(P)}$ の正規直交基底なので, 結論が導かれる. **証明終**

定理 7.2 (フェルミ条件) 重力場 $\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}(P)$ は, フェルミ座標系 G の世界線上の各点 $P = (\tau, 0, 0, 0)$ でゼロである. **フェルミ条件**

証明： 各直線 $\boldsymbol{\zeta}(s)=(\tau,s\mathbf{n})=(\tau,sn^{\alpha})$ は測地線なので，その成分 $\zeta^h(s)$ は，各点 s で測地線方程式

$$\frac{d^2\zeta^h}{ds^2}+\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}(\tau,s\mathbf{n})\frac{d\zeta^i}{ds}\frac{d\zeta^j}{ds}=0$$

を満たす．ここで，

$$\frac{d\zeta^0}{ds}=0,\qquad \frac{d\zeta^\alpha}{ds}=n^\alpha,\qquad \frac{d^2\zeta^h}{ds^2}=0$$

なので（記法の約束から $\alpha,\beta=1,2,3$, $h=0,1,2,3$ である），上の測地線方程式は，

$$\overset{G}{\Gamma}{}^h_{\alpha\beta}(\tau,sn^1,sn^2,sn^3)n^\alpha n^\beta=0$$

と変形される．これは，任意の s と任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{n}=n^\alpha$ に対して成立するので，特に $s=0$ とおいて，

$$\overset{G}{\Gamma}{}^h_{\alpha\beta}(\tau,0,0,0)n^\alpha n^\beta=0$$

を得る．上の式で現れているのはクリストッフェルの記号の ξ^0 軸上での値であり，$\mathbf{n}$ には依存しないので，任意の τ と $h=0,1,2,3,$ および $\alpha,\beta=1,2,3$ に対して

$$\overset{G}{\Gamma}{}^h_{\alpha\beta}(\tau,0,0,0)=0$$

が導ける．

上のものと異なるパターンの添え字を持つクリストッフェルの記号 $\overset{G}{\Gamma}{}^h_{k0}=\overset{G}{\Gamma}{}^h_{0k}$ については，R のベクトル $\mathbf{e}_k(\tau)$ が G の世界線に沿った平行移動で定義されているという事実を用いる．このことから，$\mathbf{e}_k(\tau)$ の M に関する逆像である，ξ^0 軸上のベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ もまた，ξ^0 軸上の平行移動になっている．このベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ は，成分表示すると

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k=\left(\delta^h_k\right)$$

なので，G における平行移動の方程式は

$$\frac{D}{d\tau}\delta^h_k+\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}(\tau,0,0,0)\delta^i_k\frac{d\zeta^j}{d\tau}=0$$

である．ここで，ξ^0 軸を $\boldsymbol{\zeta}(\tau)=(\tau,0,0,0)$ と助変数表示すると，$d\zeta^0/d\tau=1$, $d\zeta^\alpha/d\tau=0$ であり，

$$\overset{G}{\Gamma}{}^h_{i0}(\tau,0,0,0)\delta^i_k=\overset{G}{\Gamma}{}^h_{k0}(\tau,0,0,0)=0$$

が導かれる．　**証明終**

系 7.4 座標系 G の ξ^0 軸上の各点 $P=(\tau,0,0,0)$ で，

$$\overset{G}{\Gamma}_{ij,k}(P)=0,\qquad \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\xi^k}(P)=0,\qquad \frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial\xi^0\partial\xi^k}(P)=0$$

が成り立つ．

証明： 第1種のクリストッフェルの記号は，第2種のクリストッフェルの記号の線型結合として，

$$\overset{G}{\Gamma}_{ij,k}(P) = \gamma_{kh}(P)\overset{G}{\Gamma}{}^h_{ij}(P) = 0$$

と表せる．同様に，$\dfrac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\xi^k}(P) = \overset{G}{\Gamma}_{ik,j}(P) + \overset{G}{\Gamma}_{jk,i}(P) = 0$ であり，このことから，

$$\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial\xi^0\partial\xi^k}(P) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\xi^k}(\tau+\theta,0,0,0) - \dfrac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\xi^k}(\tau,0,0,0)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{0-0}{\theta} = 0.$$

証明終

真空中の相対論的な重力場の方程式

G の座標系での K^h_j

潮汐加速度の方程式を，今度は自由落下する観測者 G のフェルミ座標を用いて表示しよう．観測者 G の世界線は，

$$\zeta^h(\tau) = (\tau,0,0,0)$$

という簡単な形になる．この曲線が，測地線の族 $\xi^h(\tau,q)$ の中に $\xi^h(\tau,0) = \zeta^h(\tau)$ として埋め込まれていると考える．座標系 G での潮汐加速度の方程式は，

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\frac{\partial\xi^h}{\partial q} = -\overset{G}{K}{}^h_j\frac{\partial\xi^j}{\partial q}$$

であるが，$\zeta^h(\tau)$ の形が簡単なので，$\overset{G}{K}{}^h_j$ はただ1項

$$\overset{G}{K}{}^h_j = \overset{G}{R}{}^h_{ijk}\frac{d\zeta^i}{d\tau}\frac{d\zeta^k}{d\tau} = \overset{G}{R}{}^h_{0j0}$$

からなる．

では，ξ^0 軸上の各点 $P=(\tau,0,0,0)$ で，$\overset{G}{K}{}^h_j(P)$ を具体的に計量 γ_{ij} で表そう．以下のすべての計算は G の座標系で行うので，添え字のある量の上につけるべき G の文字を省略する．まず，$R^h_{0j0}(P)$ は，ξ^0 軸上ですべてのクリストッフェルの記号がゼロであることから，

$$R^h_{0j0}(P) = \frac{\partial\Gamma^h_{00}}{\partial\xi^j}(P) - \frac{\partial\Gamma^h_{0j}}{\partial\xi^0}(P)$$

とただ2項の和になる．次に，任意の τ に対して

$$\Gamma^h_{0j}(\tau,0,0,0) = 0$$

であることから，

$$\frac{\partial\Gamma^h_{0j}}{\partial\xi^0}(P) = \frac{\partial\Gamma^h_{0j}}{\partial\tau}(\tau,0,0,0) = 0$$

が導かれる．したがって，

$$K_j^h(P) = R_{0j0}^h(P) = \frac{\partial\Gamma_{00}^h}{\partial\xi^j}(P)$$

である．

定理 7.3 $\dfrac{\partial\Gamma_{00}^h}{\partial\xi^j}(P) = \pm\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^j\partial\xi^h}(P)$. ただし，符号は $h=0$ に対して $-$，$h=1,2,3$ に対して $+$ をとる．

証明：ξ^0 軸近傍の任意の点で

$$\Gamma_{00}^h = \gamma^{hm}\Gamma_{00,m} = \frac{\gamma^{hm}}{2}\left(2\frac{\partial\gamma_{0m}}{\partial\xi^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial\xi^m}\right)$$

が成立する．したがって，

$$\frac{\partial\Gamma_{00}^h}{\partial\xi^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma^{hm}}{\partial\xi^j}\left(2\underbrace{\frac{\partial\gamma_{0m}}{\partial\xi^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial\xi^m}}\right) + \frac{\gamma^{hm}}{2}\left(2\underbrace{\frac{\partial^2\gamma_{0m}}{\partial\xi^0\partial\xi^j}} - \frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^j\partial\xi^m}\right)$$

である．ここで，下に中括弧をつけた項は，系 7.4 より，ξ^0 軸上の点 $P=(\tau,0,0,0)$ でゼロになる．よって，

$$\frac{\partial\Gamma_{00}^h}{\partial\xi^j}(P) = -\frac{\gamma^{hm}(P)}{2}\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^j\partial\xi^m}(P)$$

である．さらに，$\gamma^{00}(P)=1$, $\gamma^{\alpha\alpha}(P)=-1$, また $m\neq h$ のとき $\gamma^{hm}(P)=0$ を用いると，

$$\frac{\partial\Gamma_{00}^h}{\partial\xi^j}(P) = -\frac{\pm1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^j\partial\xi^h}(P).$$

証明終

系 7.5 測地線偏移の行列は，$K_0^h(P) = K_j^0(P) = 0$ であり，また，$\alpha,\beta = 1,2,3$ に対して $K_\alpha^\beta(P) = K_\beta^\alpha(P)$ である．

証明：系 7.4 より，

$$K_0^h(P) = \frac{\partial\Gamma_{00}^h}{\partial\xi^0}(P) = \pm\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^0\partial\xi^h}(P) = 0$$

である．同様に $K_j^0(P)=0$ が得られる．後半の主張を導くには，添え字が 1, 2, 3 の範囲にあるときには ± 符号は常に正の符号になることに注意すれば十分で，

$$K_\alpha^\beta(P) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta}(P) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^\beta\partial\xi^\alpha}(P) = K_\beta^\alpha(P)$$

のように示せる．

証明終

したがって，観測者 G が，フェルミ座標系という特別な座標系をとると，潮汐加速度の方程式は，G の世界線上で定義された行列

K は 2 階微分からなる行列

$$\overset{G}{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^1\partial\xi^1} & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^2\partial\xi^1} & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^3\partial\xi^1} \\ 0 & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^1\partial\xi^2} & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^2\partial\xi^2} & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^3\partial\xi^2} \\ 0 & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^1\partial\xi^3} & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^2\partial\xi^3} & \dfrac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial\xi^3\partial\xi^3} \end{pmatrix}$$

で表される．したがって，相対論的な重力理論でも，非相対論的な重力理論でも，潮汐加速度の情報は，2 階微分からなる 3×3 対称行列に含まれることになる．微分される関数の間の対応は，

$$\frac{1}{2}\gamma_{00}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \longleftrightarrow \Phi(x^1, x^2, x^3)$$

である．言い換えると，G の座標系での計量の 10 個の成分のうち，$\gamma_{00}/2$ が，ニュートン理論におけるスカラーポテンシャルに最もよく対応している．しかし，両者が等しいということはできない．この対応については，7.3 節と 8.1 節でより詳しく調べる．

真空中の重力場の方程式: $R_{ij} = 0$

非相対論的な重力理論では，潮汐加速度の行列の対角和はゼロだった．**非相対論的な場合との対応から，相対論的な場合にも同じ条件**

$$\overset{G}{K}{}^h_h = 0$$

を課すことにする． テンソルの上に記号 G をつけたのは，この対応関係が，(この段階では)G の中に限って示される K の特別な性質に基づいていることを強調するためである．しかし，一般共変性から，G の座標系で正しいことは，他の任意の座標系 R でも正しいはずなので，

$$\overset{R}{K}{}^h_h = \overset{R}{R}{}^h_{ihk}\frac{dz^i}{d\tau}\frac{dz^k}{d\tau} = 0$$

が成立しなければならない．ここで，$z^i(\tau)$ は R における G の世界線である．これは測地線であり，G は任意の測地線を世界線とすることができるので，導関数 $dz^i/d\tau$, $dz^k/d\tau$ は任意の時間的ベクトルと考えてよい．したがって，

$$\overset{R}{R}{}^h_{ihk} = 0$$

となる．この仕方でリーマン曲率テンソルを縮約したものは明らかに重要である．これはリッチテンソルにほかならない．

リッチテンソル: $R_{ik} = R^h_{ihk}$.

相対論的な，真空中の重力場の方程式は，リッチテンソルを用いて，

真空中の重力場の方程式: $R_{ik} = 0$

となる．非相対論的な方程式と同様に，これは，重力ポテンシャルすなわち計量について 2 階の微分方程式である．しかし，相対論的な方程式は幾何学的に重要な意味を持っている．この方程式は，曲率テンソルの成分のある組

み合せがゼロになることを要請している．これは，真空中の点の曲率に，ある制約を課しているが，曲率のすべての成分がゼロであることを要求しているわけではない．

“人生最高の着想”

真空中の重力場の方程式を定式化するのに，上では，注目している世界線上で重力場が消えるような特別な座標系を用いたことが本質的だった．アインシュタインは，1907 年に，一般相対論の初期の考察で，重力場の効果を消すために自由落下する観測者の座標系をとることがいかに重要かに気づいたときの喜びについて，次のように述べている(パイスによる引用 [26, p. 178][注6])．

> そのとき，人生最高の着想が，次のような形で浮かんだ．重力場は，電磁誘導で生成される電場のように，相対的な存在にすぎない．
>
> なぜなら，**部屋から自由落下する観測者にとっては**—すくなくとも彼のすぐ周りには—**重力場は存在しないからである**．実際，自由落下している観測者が何かの物体を放したときには，その化学的，物理的性質に関わらず(ここではもちろん空気抵抗は無視している)，物体は静止しているか，等速直線運動をする．観測者には，自分が “静止” 状態にあると解釈する権利がある．

練習問題

最初の 3 つの練習問題は，球面上の普通の計量

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 q^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le q^1 \le 2\pi, \quad -\pi/2 < q^2 < \pi/2$$

についてのものである．

1. 測地線の 1 助変数族 $x^1(t,q) = q$, $x^2(t,q) = t$ を考える．この測地線 $x^h(t,q)$ が測地線偏移の式

$$\frac{D^2}{dt^2}\frac{\partial x^h}{\partial q} + R^h_{ijk}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial x^j}{\partial q} = 0$$

を満たすことを，直接代入して左辺を計算することにより示せ．

2. 座標 (q^1, q^2) は赤道 $(q^1, q^2) = (t, 0)$ のフェルミ座標か？ また，グリニッジ子午線 $(q^1, q^2) = (0, t)$ のフェルミ座標か？

3. (a) 赤道の弧長による助変数表示 $z^1(s) = s/r$, $z^2(s) = 0$ について，測地線偏移の行列 $K^h_j = R^h_{ijk}\dfrac{dz^i}{ds}\dfrac{dz^k}{ds}$ を求めよ．

   (b) 方程式

$$\frac{D^2 w^h}{ds^2} = -K^h_j w^j$$

の一般解が

$$w^1 = As + B, \qquad w^2 = C\sin\left(\frac{s}{r}\right) + D\cos\left(\frac{s}{r}\right)$$

で与えられることを示せ．

注6 訳注：和訳については訳者のノート参照．

4. 計量

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cosh^2(q^1) \end{pmatrix}, \qquad -\infty < q^1 \leq \infty, \quad 0 < q^2 < 2\pi$$

で与えられる $(1+1)$ 次元ドジッター時空における測地線の 1 助変数族 $x^1(\tau, q) = \tau$, $x^2(\tau, q) = q$ を考える．

(a) 測地線偏移の行列 $K^h_j = R^h_{ijk}\dfrac{dx^i}{d\tau}\dfrac{dx^k}{d\tau}$ を求めよ．

(b) 測地線 $x^h(\tau, q)$ が測地線偏移の式

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\frac{\partial x^h}{\partial q} + K^h_j\frac{\partial x^j}{\partial q} = 0$$

を満たすことを示せ．

5. 双曲平面 H とは，上半平面 $0 < q^2$ に計量

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(q^2)^2}, \qquad g_{12} = g_{21} = 0$$

を与えたものである (6.3 節参照)．双曲平面 H における測地線の 2 助変数族 $\mathbf{q}(s, c, r)$ を

$$q^1(s, c, r) = c + r\tanh s, \qquad q^2(s, c, r) = r\,\mathrm{sech}\, s$$

で定める．

(a) 共変ベクトル場 w^h の，測地線 $\mathbf{q}$ に沿った共変 2 階微分は

$$\frac{D^2w^1}{ds^2} = \frac{d^2w^1}{ds^2} + 2\frac{dw^1}{ds}\tanh s - 2\frac{dw^2}{ds}\mathrm{sech}\, s + w^1\tanh^2 s - w^2\tanh s\,\mathrm{sech}\, s,$$
$$\frac{D^2w^2}{ds^2} = \frac{d^2w^2}{ds^2} + 2\frac{dw^1}{ds}\mathrm{sech}\, s + 2\frac{dw^2}{ds}\tanh s + w^1\tanh s\,\mathrm{sech}\, s + w^2\tanh^2 s$$

であることを示せ．

(b) 測地線偏移の行列 $K^h_j = R^h_{ijk}\dfrac{dq^i}{ds}\dfrac{dq^k}{ds}$ を求めよ．

(c) 助変数 r を固定して得られる，測地線の 1 助変数族を $x^k(s, c) = q^k(s, c, r)$ とする．測地線偏移の式

$$\frac{D^2w^h}{ds^2} + K^h_j w^j = 0$$

が $w^h = \partial x^h/\partial c$ に対して成り立っていることを確かめよ．

(d) 今度は，助変数 c を固定して得られる，測地線の 1 助変数族を $x^k(s, r) = q^k(s, c, r)$ とする．測地線偏移の式が，$w^h = \partial x^h/\partial r$ に対して成り立つことを示せ．

6. 任意のベクトル v^i, w^j に対して $A_{ij}v^iw^j = B_{ij}v^iw^j$ であるとする．このとき，$A_{ij} = B_{ij}$ であることを示せ．この議論は，テンソルが等しいことを示すのにしばしば用いられる．例えばこの節では，γ_{ij} が，g_{kl} の，写像 $M : G \to R : \xi^i = \xi^i(x^k)$ による“引き戻し”によって定義されるとき，その成分が

$$\gamma_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}$$

であることを示すのに用いられた．

7. (a) リッチテンソル R_{ik} を，半径 r の球面，および双曲平面 H について計算せよ．それぞれの場合にリッチテンソルがゼロでないことは真空中の重力場の方程式に反するか？
   (b) 球面のスカラー曲率 $R = R^i_i$ が $2/r^2$ であること，および，双曲平面のスカラー曲率が -2 であることを示せ．
8. 同様に，$(1+1)$ 次元ドジッター時空のリッチテンソル R_{ik} とスカラー曲率 $R = R^i_i$ を計算せよ．
9. (a) 7.1節の練習問題7～12と同様に，座標系 G:$(\tau,\xi,\eta,\zeta)=(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ を，慣性座標系 $R:(t,x,y,z)$ に対して，x 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転しているものとする．座標系 G のリッチテンソル R_{ik} を，G の計量 (γ_{ij}) が R のミンコフスキ計量から誘導されることを用いて計算せよ．
   (b) 座標軸の1つ τ 軸が G の測地線であることを示し，この測地線上で座標系 G がフェルミ座標であるかどうかを判定せよ．
10. この練習問題の目的は，座標系 $G:(\tau,\zeta)=(\xi^0,\xi^3)$ の計量

$$\begin{pmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{03}\\ \gamma_{30} & \gamma_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{2\alpha\zeta} & 0\\ 0 & -e^{2\alpha\zeta}\end{pmatrix} = e^{2\alpha\zeta}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

の定める重力場中を自由落下する観測者 C のフェルミ座標を構成することである．原点の小さな近傍では，物体は ζ 軸の負の向きの一定の大きさ α の重力加速度を受ける．観測者 C の世界線を

$$\boldsymbol{\zeta}(T) = (\tau(T),\zeta(T)) = \left(\frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}(\alpha T), \frac{1}{2\alpha}\ln(1-\alpha^2T^2)\right)$$

とする．

   (a) 曲線 $\boldsymbol{\zeta}$ が測地線であり，助変数 T が C の固有時間であることを示せ．変数 $\alpha = 1$ の場合に曲線 $\boldsymbol{\zeta}(T)$ を描け．
   (b) 接空間 $TG_{\boldsymbol{\zeta}(0)} = TG_{(0,0)}$ のベクトル $\mathbf{e}_0 = (1,0)$ と $\mathbf{e}_3 = (0,1)$ を考える．この2つベクトルがともに単位ベクトルであることを示せ．また，世界線 C に沿った平行移動で定まる $TG_{\boldsymbol{\zeta}(T)}$ のベクトル $\mathbf{e}_0(T)$, $\mathbf{e}_3(T)$ を求めよ．
   (c) 助変数 T を固定してベクトル $\mathbf{v} = \mathbf{e}_3(T)$ を考える．曲線

$$\boldsymbol{\eta}_{T,\mathbf{n}}(s) = \left(\frac{1}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{T}{s+1/\alpha}\right), \frac{1}{2\alpha}\ln(\alpha^2((s+1/\alpha)^2-T^2))\right)$$

   が，初期条件

$$\boldsymbol{\eta}_{T,\mathbf{n}}(0) = \boldsymbol{\zeta}(T), \qquad \boldsymbol{\eta}'_{T,\mathbf{n}}(0) = \mathbf{v}$$

   を満たす G の測地線であることを示せ．（少なくとも，与えられた曲線が測地線であることを確かめよ．できれば，曲線の式を使わずに，測地線方程式を積分することによって示せ．）
   (d) 座標系 (T,S) が C のフェルミ座標であることを示せ．曲線 $S =$ 定数が，G の座標系においてグラフ $\zeta = -\ln(\cosh\alpha\tau)/\alpha$ を縦方向に

並進させて得られること，曲線 $T=$ 定数 が，グラフ

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}\left(\frac{\alpha T}{e^{\alpha\zeta}}\right)$$

であることを示せ．また，座標系 G に，(T,S) 座標の格子を描け．

7.3 物質中の重力場の方程式

相対論的方程式の性質

物質が存在する場合の重力場の方程式を考えよう．[注7]点 (x^1,x^2,x^3) における質量密度を ρ とするとき，ニュートンの重力場の方程式は

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^3)^2}=4\pi G\rho$$

である．前の節 7.2 では，Φ に対応するのはフェルミ座標系における $\gamma_{00}/2$ であることを見た．このことは，相対論的な場合の重力場の方程式が何らかの物理定数 κ によって，

$$\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial(\xi^1)^2}+\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial(\xi^2)^2}+\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial(\xi^3)^2}=\kappa\rho$$

となることを示唆しているようにも思える．

この方程式候補は，発見的に作られたものであるとはいえ，少し調べるとすぐ，いくつかの困難が表面化してくる．まず，左辺は一般共変的な形に書き直されなければならない．そのためには，リッチテンソルを使う必要がある．しかし，単に $R_{ij}=\kappa\rho$ と書き換えるだけでは，質量密度 ρ は一般共変的でないので，不十分である．この質量密度を，方程式が意味をなすように，適当な相対論的な式，つまり，R_{ij} のような 2 階共変テンソルに置き換えなければならない．そして最後に，定数 κ を決定しなければならない．

エネルギー–運動量テンソル

相対論では質量も体積も一定でない

相対論では，質量密度は，物体が動いているときには，2 つの理由で増加する．まず，物体の静止質量（慣性座標系 G で測った質量）を μ とすると，速度 v で運動する慣性座標系 R での質量は $m=\mu/\sqrt{1-v^2}$ に従って増加することがわかっている．また，運動と平行な方向には，因子 $\sqrt{1-v^2}$ でフィッツジェラルド収縮し，運動に垂直な方向には変化しない．したがって，G で測った “静止体積” が Σ なら，R で測った体積は $S=\Sigma\sqrt{1-v^2}$ になる．結局，2 つの座標系での質量密度の値は

$$\rho_R=\frac{m}{S}=\frac{1}{1-v^2}\frac{\mu}{\Sigma}=\frac{1}{1-v^2}\rho_G>\rho_G$$

となる．

4 元運動量

物体の相対論的質量 m を共変的に正しく扱うには，それを 4 元運動量

[注7] 訳注：物質の存在する領域の内部で成立する方程式なので，内部場方程式とも呼ばれる．

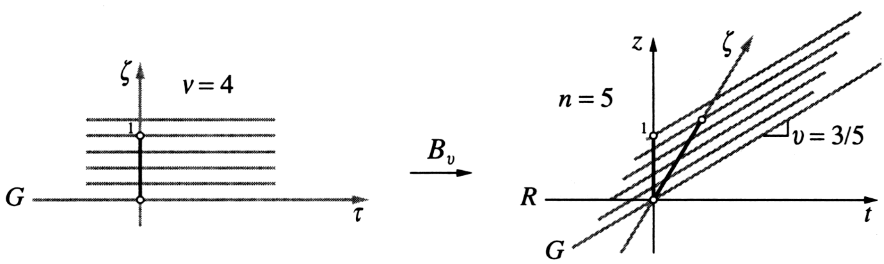
$$\mathbb{P}_R = (m, \mathbf{p}) = (m, m\mathbf{v}) = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \mu\mathbb{U}_R$$

の成分の 1 つと考えればよいことを，3.1 節で見た．ここで，$\mathbb{U}_R$ は R の座標系での物体の固有 4 元速度であることを思い出そう．つまり，R の座標系において固有時間で助変数表示した物体の世界線を $\mathbb{X}_R(\tau)$ とすると，$\mathbb{U}_R = \mathbb{X}'_R$ である．別の慣性座標系 C が，ローレンツ変換 $L : R \to C$ によって R と関係づけられているとすると，この座標系での 4 元運動量 $\mathbb{P}_C$ は，R での 4 元運動量と $\mathbb{P}_C = L(\mathbb{P}_R)$ という関係にある．特に，$\mathbb{P}_C$ の各成分は $\mathbb{P}_R$ の成分の線型結合であり，C の座標系での物体の質量は，R の座標系での物体の質量だけから決まるわけでなく，物体の質量と 3 次元の運動量の**両方**と関係している．

粒子の集団の質量密度

上のように，相対論的質量を一般共変的な 4 元ベクトルに組み入れることはできるが，体積について直ちに同じことはできない．そこで，いま考えている問題全体を，粒子の集団という見方でとらえなおすと，質量密度をうまく共変的に扱う方法が見つかる．

互いに区別できない，互いに相互作用しない粒子の集団が，慣性座標系 G から見て静止しているとする．これらの粒子は，G から見て 3 次元の単位体積あたり ν 個で割合で空間に一様に分布していて，個々の粒子は静止質量 μ を持つとする．個々の質量と粒子の数密度の積 $\mu\nu$ が，粒子の集団の G における質量密度である．



別の慣性座標系 R から見ると G と粒子の集団は速度 $\mathbf{v}$ で運動しているとする．この座標系 R から見た粒子の集団の質量密度を計算しよう．それは，やはり個々の粒子の質量 $m = \mu/\sqrt{1-v^2}$ と粒子の数密度 n の積として計算される．新しい座標系で n を求めるには，ν 個の粒子を含む領域を R から見ると体積が減少して $\sqrt{1-v^2}$ になっていることに注意する必要がある．これはフィッツジェラルド収縮によるものである．したがって，R の単位体積あたりの粒子の個数は

$$n = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}}$$

であるので，質量密度は

$$\rho_R = mn = \frac{\mu\nu}{1-v^2} = \frac{1}{1-v^2}\,\rho_G$$

と，上で求めたのと一致する結果を得る．上の図では，$v = 3/5$ の場合が描かれているが，実際に粒子密度が 5/4 倍になることが確かめられる．個々の質量のは 5/4 倍になるので，質量密度は，$25/16 = (5/4) \times (5/4)$ 倍になる．

4 元ベクトルとしての粒子密度

ここで，粒子の数密度が，相対論的質量とまったく同じように変換することに注意しよう．これは，静止質量 μ を組み込んだ 4 元運動量を構成したのと同様の方法で，"静止数密度" ν を組み込んだ 4 元ベクトル $\mathbb{N}$ を

$$\mathbb{N}_R = (n, n\mathbf{v}) = \left(\frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\nu\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \nu\mathbb{U}_R$$

のように構成できることを示唆する．すると，任意の座標系で，質量密度は $\mathbb{P}$ と $\mathbb{N}$ の第 1 成分同士の積と考えられる．この 4 元ベクトル $\mathbb{N}$ を**粒子数密度 4 元ベクトル**(particle density 4-vector) と呼ぶ．

$\mathbb{P}$ と $\mathbb{N}$ とのテンソル積

もちろん，第 1 成分同士の積は，そのままでは一般共変的な量ではない．しかし，2 つの 4 元ベクトル $\mathbb{P} = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ と $\mathbb{N} = (n^0, n^1, n^2, n^3)$ はそれぞれ (1,0) 型テンソルであり，したがって共変的である．よって，$\mathbb{P}$ の各成分と $\mathbb{N}$ の各成分との，すべての可能な組み合せの積

$$T^{ij} = p^i n^j,$$

を作ると，これもまた共変的である．この (2,0) 型のテンソルは，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{N}$ の**テンソル積**(tensor product) と呼ばれる．テンソル積については，6.5 節の練習問題 3 で扱った．このようにして，質量密度は，共変的な量の成分 T^{00} として埋め込まれた．では，このテンソル T^{ij} 全体としては何を意味するのだろうか？

T^{ij} の物理的意味

これは幾何学の問題でなく物理学の問題なので，次元同次座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ を使えば明確な解答が得られるはずである．このとき，$\mathbb{U} = (c, \mathbf{v})$ であり，

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad n = \frac{\nu}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$\mathbb{P} = (mc, \mathbf{p}) = (E/c, p^1, p^2, p^3), \qquad \mathbf{N} = (nc, \mathbf{v}) = (nc, v^1, v^2, v^3)$$

である．ここで，$E = mc^2$ は集団中の 1 個の粒子のエネルギーである．よって，

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} En & Env^1/c & Env^2/c & Env^3/c \\ cp^1n & p^1nv^1 & p^1nv^2 & p^1nv^3 \\ cp^2n & p^2nv^1 & p^2nv^2 & p^2nv^3 \\ cp^3n & p^3nv^1 & p^3nv^2 & p^3nv^3 \end{pmatrix}$$

エネルギー密度

となる．粒子の性質を表すある量に粒子数密度 n をかけると，その量の(空間)密度になるので，成分 $T^{00} = En = mnc^2 = \rho c^2$ は確かに粒子の集団の相対論的**エネルギー密度**になっていることがわかる．

テンソル T^{ij} の他の成分の意味は，4.3 節で考えた流体の流れというという簡単な例との対応から考察することができる．空間の中での密度 ρ の非圧縮性流体の流れは，$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ を速度ベクトルとしたとき，3 次元ベクトル $\rho\mathbf{V}$ で表されたのだった．このとき，成分 $F_x = \rho V_x$ は，流体の質量が x 方向と垂直な平面を通過する割合を，キログラム毎秒毎平方メートル単位で表している．この量を "質量の x 方向の流れ" と略記することにすると，

	ρV_x	ρV_y	ρV_z
$\mathbf{F}$:	質量の x 方向の流れ	質量の y 方向の流れ	質量の z 方向の流れ

となる．

上では流体の質量の流れをだけを考えたが，今度は，エネルギー E と運動量の各成分 p^i の計 4 個の量を考えよう．この 4 個それぞれに，密度と，3 つの空間方向の流れの成分がある．これで，ちょうど 16 個の T^{ij} の成分の説明がつく．例えば，p^1nv^2 は，運動量の第 1 成分の第 2 軸方向の流れであり，Env^1 は($1/c$ 因子なしで)，エネルギーの第 1 軸方向の流れである．以下に，すべてを載せた表を示す．

T^{00} エネルギーの 密度	T^{01} エネルギーの 第 1 軸方向の流れ $\div c$	T^{02} エネルギーの 第 2 軸方向の流れ $\div c$	T^{03} エネルギーの 第 3 軸方向の流れ ÷
T^{10} 運動量の第 1 成分の 密度 $\times c$	T^{11} 運動量の第 1 成分の 第 1 軸方向の流れ	T^{12} 運動量の第 1 成分の 第 2 軸方向の流れ	T^{13} 運動量の第 1 成分の 第 3 軸方向の流れ
T^{20} 運動量の第 2 成分の 密度 $\times c$	T^{21} 運動量の第 2 成分の 第 1 軸方向の流れ	T^{22} 運動量の第 2 成分の 第 2 軸方向の流れ	T^{23} 運動量の第 2 成分の 第 3 軸方向の流れ
T^{30} 運動量の第 3 成分の 密度 $\times c$	T^{31} 運動量の第 3 成分の 第 1 軸方向の流れ	T^{32} 運動量の第 3 成分の 第 2 軸方向の流れ	T^{33} 3 運動量の第 3 成分 第 3 軸方向の流れ

この解釈から，T^{ij} を**エネルギー–運動量テンソル**(energy–momentum tensor)と呼ぶ．次元同次座標で考えたとき，T^{ij} のすべての成分は 3 次元体積あたりのエネルギーという同じ次元を持つ．この性質を持たせるために，$T^{\alpha 0}$ と $T^{0\beta}$ に含まれる補正因子が必要になる．また，エネルギー–運動量テンソルは対称すなわち $T^{ji} = T^{ij}$ を満たす．練習問題 6,7 でこれらの事実を確かめる．

T^{ij} の詳細

物質とエネルギーは，普通，相互作用せずに平行に運動する同種粒子の集団よりも複雑な形態をとる．例えば，個々の粒子は異なる速度や質量を持つかもしれない．粒子は互いに衝突するかもしれない．粒子集団は内部に圧力を持つ流体を形成するかもしれない．粒子集団は内部に応力を持つ固体を形成するかもしれない．物質がまったくない場合にも，時空のある領域が，例えば電磁場の形でエネルギーを持つかもしれない．このような物質とエネルギーのどの形態についても，適切な物理学の法則を用いれば，エネルギー–運動量テンソルへの寄与を計算することができる．いずれにしろ，最終的に得られるのが 2 階対称反変テンソル T^{kl} で，これが，時空の任意の点での物質とエネルギーを一般共変的に表現することに変わりはない．

エネルギー–運動量の保存

重力場の方程式で ρ の代わりは T_{ij}

共変的なエネルギー–運動量テンソル T_{ij} は，

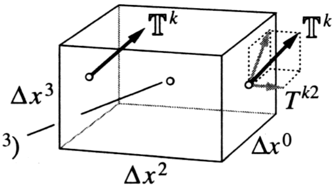
$$T_{ij} = g_{ik}g_{jl}T^{kl}$$

のように，普通の方法で添え字を下げることで得られる．これが，重力場の方程式で質量密度 ρ の代わりに使う量の自然な候補である．この量で置き換えてみると，$R_{ij} = \kappa T_{ij}$ となる．これで右辺は正しくなったが，等式としては正しくない．まだ左辺に問題が残っている．エネルギー–運動量は保存量であるが，このことから，以下で見るように，エネルギー–運動量の発散がゼロになることが示せる．ところが，リッチテンソルの発散は一般にはゼロでない．したがって，両者が比例するということはありえない．

エネルギー–運動量は保存する

流体の流れベクトル $\mathbf{F}$ を 4.3 節で解析したが，エネルギー–運動量テンソルをそれと同じように調べよう．そして，同じ結論を導きだそう．慣性座標系 R で，小さな 4 次元の箱を通過するエネルギー–運動量の流れを考える．箱の中心の座標を $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, 箱の各辺の長さを Δx^0, Δx^1, Δx^2, Δx^3 とする．エネルギー–運動量の保存とは，箱の中で，衝突などどんな現象が起こって物質とエネルギーが姿を変えたとしても，その正味の流出量はゼロであるということを意味する．入ったものは出てこなくてはならない．

時空 R の断面
x^1 = 定数



1 つの面を通過する流れ

エネルギー–運動量テンソル $\mathbb{T} = T^{kl}$ の第 k 行からなるベクトルを $\mathbb{T}^k$ とする．箱からの $\mathbb{T}^k$ の正味の流出量は，8 つの面からの流出量の代数和である．各面上で，$\mathbb{T}^k$ を，面に平行成分と法線成分に分解する．法線成分だけが和に寄与する．上の図が，第 2 軸方向の流れを示している．法線方向の成分は T^{k2} である．(図は R の断面 x^1 = 定数 なので，その中の箱についても 8 個でなく 6 個だけの面を持つ 3 次元断面が描かれている.)

もし箱の一辺の長さが十分に小さければ，T^{k2} は各面上で本質的に定数と考えてよい．右側の面からの流出量は，近似的に，

$$T^{k2}\left(x^0, x^1, x^2 + \frac{\Delta x^2}{2}, x^3\right)\Delta x^0 \Delta x^1 \Delta x^3$$

である．同様に，**左側**の面を左から右に通り抜ける流れは，近似的に，

$$T^{k2}\left(x^0, x^1, x^2 - \frac{\Delta x^2}{2}, x^3\right)\Delta x^0 \Delta x^1 \Delta x^3$$

となる．しかし，こちらは流出量でなく**流入量**である．両側の面の流出量の合計は，近似的に，差

$$\left[T^{k2}\left(x^0,x^1,x^2+\frac{\Delta x^2}{2},x^3\right)-T^{k2}\left(x^0,x^1,x^2-\frac{\Delta x^2}{2},x^3\right)\right]\Delta x^0\Delta x^1\Delta x^3$$

$$=\frac{T^{k2}\left(x^0,x^1,x^2+\frac{\Delta x^2}{2},x^3\right)-T^{k2}\left(x^0,x^1,x^2-\frac{\Delta x^2}{2},x^3\right)}{\Delta x^2}\Delta\Sigma$$

に等しい．ここで，$\Delta\Sigma=\Delta x^0\Delta x^1\Delta x^2\Delta x^3$ とした．量 $\Delta\Sigma$ はミンコフスキ計量での箱の4次元体積の符号を変えたものである．

流出量の合計が発散

上の式には，R の異なる点におけるベクトルが現れているので，6.5節で述べた平行移動を使わないと，差を求めることができない．その場合，差分商は近似的に T^{k2} の x^2 についての共変微分に等しくなる．したがって，x^2 軸に垂直な2つの面からの正味の流出量は，近似的に

$$T^{k2}_{;2}\,\Delta\Sigma$$

である．同様に，他の3組の平行な面からの正味の流出量はそれぞれ $T^{k0}_{;0}\,\Delta\Sigma$, $T^{k1}_{;1}\,\Delta\Sigma$, $T^{k3}_{;3}\,\Delta\Sigma$ となる．したがって，和の規約を用いて，近似的に

$$\text{箱からの正味の流出量}=T^{kl}_{;l}\,\Delta\Sigma$$

と表すことができる．これは(符号を無視すると)箱の4次元体積に比例している．比例定数

$$T^{kl}_{;l}$$

が，**単位体積あたりの**流出量になる．この微分の和の形は，普通のベクトル解析に出てくるベクトル場の発散と似ているので，同じ名前を与えることにする．

テンソルの発散

定義 7.1 $(p,q+1)$ 型テンソル $S^{I,k}_J$ の **発散**(divergence)とは (p,q) 型テンソル $\operatorname{div}S=S^{I,k}_{J;k}$ のことをいう．

定理 7.4 エネルギー–運動量テンソルの発散は恒等的にゼロである．すなわち，$T^{kl}_{;l}=0$. さらに，$T^l_{i;l}=0$ である．

証明： 上の計算によれば，エネルギー–運動量テンソルの，4次元体積 $-\Delta\Sigma$ の箱からの単位体積あたりの正味の流出量は，近似的に $T^{kl}_{;l}$ であり，この近似は箱の一辺の長さ $\Delta x^j\to 0$ の極限で厳密になる．エネルギー–運動量は保存されるので，一方，単位体積あたりの正味の流出量は常に0であるので，$T^{kl}_{;l}=0$ となる．第2の主張は，積の微分法と $g_{ik;l}=0$ から次のように得られる．

$$T^l_{i;l}=\left(g_{ik}T^{kl}\right)_{;l}=g_{ik;l}T^{kl}+g_{ik}T^{kl}_{;l}=0.$$

証明終

リッチテンソルの発散

次に，リッチテンソルの発散を求めよう．最初のステップは，**ビアンキの恒等式**(Bianchi identity)と呼ばれる次の結果である．

ビアンキの恒等式

定理 7.5 $R^h_{ijk;l} + R^h_{ikl;j} + R^h_{ilj;k} = 0.$

証明： 上の式が，フェルミ座標系の原点で成立することを示そう．そうすれば，一般共変性から，任意の座標系の任意の点でも成立する．すべてのクリストッフェルの記号は原点でゼロになるので，リーマンテンソルとその共変微分は次のような簡単な形になる．

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k}, \qquad R^h_{ijk;l} = \frac{\partial^2 \Gamma^h_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma^h_{ij}}{\partial x^l \partial x^k},$$

$$R^h_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^l}, \qquad R^h_{ikl;j} = \frac{\partial^2 \Gamma^h_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j \partial x^l},$$

$$R^h_{ilj} = \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^h_{il}}{\partial x^j}, \qquad R^h_{ilj;k} = \frac{\partial^2 \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^h_{il}}{\partial x^k \partial x^j}.$$

右辺の 6 項は，加えあわせるとゼロになる． **証明終**

スカラー曲率

次のリッチテンソルの発散についての定理は，**混合**テンソル $R^h_j = g^{ih} R_{ij}$ について述べられる．また，定理には，混合リッチテンソルの縮約である**スカラー曲率**(scalar curvature) $R = R^h_h$ が現れる．スカラー曲率については，他のスカラー関数(0 階テンソル)と同様，共変微分はただの偏微分と同じになる．

定理 7.6 $R^h_{k;h} = \frac{1}{2}\delta^h_k R_{;h} = \frac{1}{2}\delta^h_k \dfrac{\partial R}{\partial x^h}.$

証明： ビアンキの恒等式で，$j = h$ として縮約を行うと，

$$0 = R^h_{ihk;l} + R^h_{ikl;h} + R^h_{ilh;k} = R_{ik;l} + R^h_{ikl;h} - R_{il;k}$$

となる．第 3 項は，リーマンテンソルが 3 番目と 4 番目の添え字の交換に関して反対称であることを用いて $R^h_{ilh;k} = -R^h_{ihl;k} = -R_{il;k}$ と計算した結果である．計量テンソル g^{im} の共変微分はゼロなので，上の等式は，

$$\begin{aligned} 0 &= \left(g^{im} R_{ik}\right)_{;l} + \left(g^{im} R^h_{ikl}\right)_{;h} - \left(g^{im} R_{il}\right)_{;k} \\ &= R^m_{k;l} + \left(g^{im} R^h_{ikl}\right)_{;h} - R^m_{l;k} \end{aligned}$$

と書き直せる．これを，$m = l$ として縮約すると

$$0 = R^l_{k;l} + \left(g^{il} R^h_{ikl}\right)_{;h} - R^l_{l;k} = R^l_{k;l} + \left(g^{il} R^h_{ikl}\right)_{;h} - R_{;k}$$

となる．スカラー曲率が最後の項に現れたことに注意しよう．第 2 項は，

$$\begin{aligned} g^{il} R^h_{ikl} &= g^{il} g^{hm} R_{mikl} \\ &= g^{il} g^{hm} R_{imlk} \qquad (R_{mikl} \text{ の対称性による}) \\ &= g^{hm} g^{il} R_{imlk} \\ &= g^{hm} R^l_{mlk} = g^{hm} R_{mk} = R^h_k \end{aligned}$$

に注意すると簡単化でき，$\left(g^{il} R^h_{ikl}\right)_{;h} = R^h_{k;h}$ である．第 1 項の無効添え字に使われている文字を $l \mapsto h$ と変更すると，

$$2R^h_{k;h} = R_{;k} = \delta^h_k R_{;h}$$

が得られる. **証明終**

div $R^h_k \neq 0$

スカラー曲率は一般には定数ではないので，リッチテンソルの発散も一般にはゼロでない.

相対論的な重力場の方程式

発散がゼロの曲率テンソル

上の定理を

$$\left(R^h_k - \tfrac{1}{2}\delta^h_k R\right)_{;h} = 0$$

という形に書くと，テンソル $R^h_k - \frac{1}{2}\delta^h_k R$ は，**発散がゼロであり**，また曲率から完全に決まる，すなわち，計量とその1階，2階微分から決まる．このテンソルの添え字を下げて共変テンソルにすると，$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$ となる．これを用いると，ついに，正しい相対論的な重力場の方程式を

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}$$

と書くことができる.

アインシュタインの用いた形

しかし，まだ定数 κ を定める仕事が残っている．それには，この方程式を同値変形して，もともとアインシュタインが用いた形で考えた方が簡単である．まず，混合テンソルを用いて

$$R^h_k - \tfrac{1}{2}\delta^h_k R = \kappa T^h_k$$

と書き直し，次に2つの添え字を縮約して，

$$R^h_h - \tfrac{1}{2}\delta^h_h R = R - 2R = \kappa T^h_h = \kappa T$$

を得る．縮約で得られる $T = T^h_h$ は**ラウエのスカラー**(Laue's scalar)と呼ばれる．左辺の変形では，δ^h_k が 4×4 単位行列で，対角和 δ^h_h が4であることを用いた．この式より，$R = -\kappa T$ となる．この結果を重力場の方程式を共変テンソルで書いたものに代入し，R_{ij} について解くと，

$$R_{ij} = \kappa T_{ij} + \tfrac{1}{2}g_{ij}R = \kappa(T_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}T)$$

という式が最終的に得られる.

3元組立単位系で κ を決定

それでは，定数 κ を決定しよう．ここでは，まず次元同次座標 (ct, x, y, z) を使ったほうがわかりやすい．方針は，ただ1つの成分についての等式

$$R_{00} = \kappa(T_{00} - \tfrac{1}{2}g_{00}T)$$

を単純な物理的状況のもとで考えて R_{00}, T_{00}, T を求め，等式を残る未知数 κ について解くというものである.

この場合に使える最も簡単な状況は，互いに相互作用せず，互いに平行に運動する粒子の集団である．粒子のうちの1個の世界線が ξ^0 軸になるようなフェルミ座標系 $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ をとると，粒子群の固有4元速度は $\mathbb{U} = (c, 0, 0, 0)$ という簡単な形で，エネルギー–運動量テンソルは，ただ1成分，エネルギー密度

$$T_{00} = T^0_0 = T^{00} = \rho c^2$$

だけを持つ．よって，T は ρc^2 に等しく，また，ξ^0 軸上では $\gamma_{00}=1$ なので，

$$T_{00}-\tfrac{1}{2}\gamma_{00}T=\tfrac{1}{2}\rho c^2$$

となる．フェルミ座標系の ξ^0 軸上では

$$R_{00}=K_h^h=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\gamma_{00}}{\partial(\xi^\alpha)^2}$$

となることを 7.2 節で示した．この右辺の量は，ニュートンの重力ポテンシャルのラプラシアン

$$\nabla^2\Phi=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial(\xi^\alpha)^2}$$

に相当する．しかし，R_{00} と $\nabla^2\Phi$ では次元が異なる．単位でいうと，R_{00} は $1/\mathrm{m}^2$ なのに対し，$\nabla^2\Phi$ は $1/\mathrm{s}^2$ である(練習問題 8)．この 2 つの量を等しいとおくためには，適当な巾の c をかけて，次元のつりあいをとらなければならない．そうした結果は

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi=R_{00}$$

である．(上では，この式を発見的に導いただけだが，次の章では別の方法でこれを正当化する．) 非相対論的な重力場の方程式は $\nabla^2\Phi=4\pi G\rho$ であり，式 $R_{00}=\kappa(T_{00}-(1/2)g_{00}T)$ は，

$$\frac{1}{c^2}4\pi G\rho=\kappa\frac{1}{2}\rho c^2;\qquad \text{すなわち}\qquad \kappa=\frac{8\pi G}{c^4}\approx 2\times 10^{-43}\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}$$

と変形され，κ が求まった．

これで得られた相対論的な重力場の方程式を，2 つの互いに等価な形で次に示す．これはアインシュタインの重力理論の心臓ともいうべき式であり，質量とエネルギーから時空の曲率がどのように決まるかを規定している．　**質量–エネルギーが曲率を決定**

相対論的な重力場の方程式:

$$R_{ij}=\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij}-\tfrac{1}{2}g_{ij}T\right),\quad \text{または}\quad T_{ij}=\frac{c^4}{8\pi G}\left(R_{ij}-\tfrac{1}{2}g_{ij}R\right).$$

これは，計量テンソルの 10 個の成分に対する 2 階の偏微分方程式である．この解が，重力場を決め，さらにそれが測地線を決め，質量のある粒子もない粒子もそれにしたがって運動する．

宇宙定数

アインシュタインは，1917 年に論文 [8] で，重力場の方程式の解として，宇宙(時空の空間的断面)が有限な 3 次元球面 S^3 であるような時空が存在するという仮定のもとで，重力場の方程式の拡張を考えた．半径 r の 3 次元球面を記述するひとつの方法は，$\mathbf{R}^4$ の点 (x,y,z,u) で式　**有限な宇宙**

$$S^3(r):\quad x^2+y^2+z^2+u^2=r^2$$

を満たすものからなる集合と見なすというものである．この方法は，2 次元球面を $\mathbf{R}^3$ の部分集合と考えるのと対応している．このように表示された 3 次元球面も，2 次元球面の場合と同様に，角度変数を用いて助変数表示できる．ただし，3 次元の場合には変数を 2 個でなく 3 個使って

$$\mathbf{x}: \begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi\cos\omega, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi\cos\omega, \\ z = r\sin\varphi\cos\omega, \\ u = r\sin\omega, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ -\pi/2 < \omega < \pi/2 \end{array}$$

とする．練習問題 10 では，この助変数表示が正しいこと，そして以下で用いる性質を持つことを確かめる．ここで，物理学と幾何学の関係についての新しい問題が発生したことに気づく．宇宙の半径 r はどれだけなのだろうか？

ニュートンの重力場の方程式を変更

さらにアインシュタインは，この宇宙が本質的に同じ形のまま永久に存続すると仮定した．このとき，時空は直積 $E = \mathbf{R} \times S^3(r)$ であり，次元同次座標 $(ct, \theta, \varphi, \omega)$ と，空間方向を 3 次元球面に変更したミンコフスキ計量を持つ $(1+3)$ 次元座標系 R で記述できる．宇宙(時空の空間的断面)は有限(体積は $2\pi^2 r^3$)なので，物質の合計の量もまた有限，したがって，平均密度 ρ_0 もまた有限である．このことから，アインシュタインは，ニュートンの重力場の方程式 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ を

$$\nabla^2\Phi - \Lambda\Phi = 4\pi G\rho,$$

と変更すると，定数値の重力ポテンシャル

$$\Phi_0 = -\frac{4\pi G}{\Lambda}\rho_0$$

が，この変更後の方程式(の右辺で $\rho = \rho_0$ とおいたもの)の解になることに気づいた．もちろん，物質は宇宙全体に一様に分布しているわけではないので，ρ は一般の点では ρ_0 に等しくない．この点を解決するために Φ_1 を方程式

$$\nabla^2\Phi - \Lambda\Phi = 4\pi G(\rho - \rho_0)$$

の解としよう．すると，$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ が方程式 $\nabla^2\Phi - \Lambda\Phi = 4\pi G\rho$ の解になる．これに対し，もし，空間が普通のユークリッド的 3 次元空間だとすると，ニュートンの理論からは，物質の平均密度がゼロで，重力源から離れると $\Phi \to 0$ となることが要求されることがわかる．

宇宙定数

ニュートンの重力場の方程式のこの変更は，相対論的な方程式のどのような変更に対応するのだろうか？ 方程式の “幾何学” 側の辺(リッチテンソルを含む辺)は，発散がゼロである必要がある．そこでアインシュタインは

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}R - g_{ij}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

という変更を提案した．新しく導入された項 $g_{ij}\Lambda$ の発散はゼロであり，また，g_{ij} はニュートンの方程式での Φ に対応している．アインシュタインは，この変更された方程式を，一様な空間密度 ρ の物質だけがエネルギー–運動量テンソル T_{ij} に寄与するという仮定のもとで解いて(練習問題 12 参照)，

$$\Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$

となることを示した．このとき，物質の質量の合計は

$$\rho \times \mathrm{vol}\, S^3(r) = \rho \cdot 2\pi^2 r^3 = \frac{2\rho\pi^2 c^2 r}{4\pi G\rho} = \frac{\pi c^2}{2G\sqrt{\Lambda}}$$

と計算される．定数 Λ は，"宇宙"（"cosmos"）の 2 つの基本的なデータである半径と全質量を決定するので，宇宙定数(cosmological constant)と呼ばれるようになった．

練習問題

最初の 3 つの練習問題の目的は，任意の反変ベクトル場 a^h の発散が，計量テンソルの行列式 g で，クリストッフェルの記号を用いずに，

$$\mathrm{div}\, a^h = a^h_{;h} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(a^h \sqrt{-g}\right)}{\partial x^h}$$

と表せるのを示すことである．

1. 関係

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = 2\Gamma^k_{kh}$$

を示せ．（ヒント：まず

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \Gamma_{ih,j} + \Gamma_{jh,i}$$

を示し，次に g^{ij} をかけて縮約を行い，クリストッフェルの記号の対称性を用いよ.）

2. 計量 $G = (g_{ij})$ が 2×2 の対称行列である場合を考える．この場合，行列式は $g = \det G = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ である．また，$g < 0$ と仮定する．

(a) 直接に計算して，$i, j = 1, 2$ に対して

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}$$

を示せ．

(b) 次の 4 つの等式を示せ．

$$\Gamma^k_{kh} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^h} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |g|}{\partial x^h} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^h} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^h}.$$

(c) これらのことから，等式

$$a^h_{;h} = \frac{\partial a^h}{\partial x^h} + \frac{a^h}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^h} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(a^h \sqrt{-g}\right)}{\partial x^h}$$

を導け．

3. 次に，相対論における一般の場合，すなわち，計量 $G = (g_{ij})$ が 4×4 対称行列で $g = \det G < 0$ である場合を考える．以下の事実の大部分は，線型代数の教科書に載っているような行列式と逆行列の基本的性質から導ける．

(a) 行列 G^{ij} を，G から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる 3×3 小行列とする．また，この小行列に対応する余因子を $\Delta^{ij} = (-1)^{i+j} \det G^{ij}$ とする．このとき，任意の $i = 1, 2, 3, 4$ に対して，

$$g = g_{i1}\Delta^{i1} + g_{i2}\Delta^{i2} + g_{i3}\Delta^{i3} + g_{i4}\Delta^{i4} \qquad (i \text{ について和の規約は適用しない})$$

を示せ．

(b) 余因子 Δ^{i1}, Δ^{i2}, Δ^{i3}, Δ^{i4} がいずれも g_{ij} に依存しないことを説明し，このことから，$\partial g/\partial g_{ij} = \Delta^{ij}$ を示せ．

(c) 関係 $g^{ij} = \Delta^{ji}/g$ を示せ．これまでと同様，g^{ij} は G の逆行列の第 i 行第 j 列の成分である．添え字の順序は，一般の行列の場合は意味があるが，G は対称行列なので気にしなくてよい．

(d) まず関係

$$g^{ij} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}$$

を示し，次に練習問題 2 と同様にして

$$a^h_{;h} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(a^h\sqrt{-g}\right)}{\partial x^h}$$

を示せ．

4. (a) リッチテンソルが，

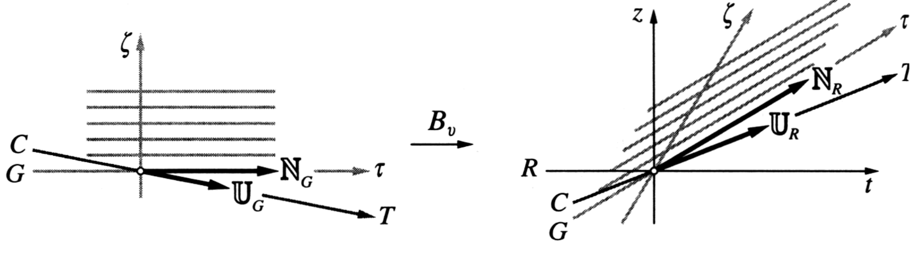
$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^h} - \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} + \Gamma^p_{ik}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^p} - \Gamma^p_{ih}\Gamma^h_{pk}$$

と表されることを示せ．

(b) 問 (a) の式から，R_{ik} が対称であることを示せ．

(c) アンシュタインはしばしば，計算を簡単にするために，$g \equiv -1$ であるような座標系を仮定した．このとき，R_{ik} の式はどのように簡単になるか．

5. 互いに相互作用しない粒子の集団の，慣性座標系 R から見た粒子数密度 4 元ベクトルを $\mathbb{N}_R$ とする．座標系 R は次元非同次座標 (t, x, y, z) をとっているとすると，$\mathbb{N}_R = (n, n\mathbf{v})$ である．次に，R に対して固有 4 元速度 $\mathbb{U}_R$ を持つガリレイ的観測者 C を考える．座標系 C から見た，粒子の集団の数密度が $\mathbb{N}_R \cdot \mathbb{U}_R$ であることを示せ．(この内積は，R における通常のミンコフスキ内積である.)（ヒント: まず，粒子の集団が静止しているような慣性座標系 G において，対応する量 $\mathbb{N}_G \cdot \mathbb{U}_G$ を計算せよ.)



6. (a) 互いに相互作用しない粒子の集団を考える．個々の粒子の静止質量を μ, 集団が静止している座標系から見た粒子数密度を ν とする．座標系 R から見たこの粒子の集団の固有 4 元速度を $\mathbb{U} = (u^0, u^1, u^2, u^3)$ とする．座標系 R におけるこの粒子の集団のエネルギー–運動量テンソルが $T^{ij} = \mu\nu u^i u^j$ となることを示せ．この結果の式は，R の座標として，次元非同次座標をとるか，次元同次座標をとるかによって変わるか．
   (b) エネルギー–運動量テンソル T^{ij} が対称である，すなわち $T^{ji} = T^{ij}$ を満たすことを示せ．
7. (a) 次元同次座標 $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ を採用した座標系 R におけるエネルギー–運動量テンソル T^{ij} を考える．テンソル T^{ij} の各成分が次元 (エネルギー)/(長さ)^3 を持つことを示せ．
   (b) 成分 $T^{\alpha 0}$ そのものでなく $T^{\alpha 0}/c$ を第 α 軸方向の運動量密度と解釈すべきであることを，次元に関する上の結果から示せ．同様に，$T^{0\beta}$ そのものでなく $cT^{0\beta}$ を第 α 軸方向のエネルギーの流れと解釈すべきであることを示せ．
8. 次元同次座標 (ct, x, y, z) を用いた座標系 R において，リッチテンソルのすべての成分が，メートル$^{-2}$ の次元を持つことを示せ．ニュートンの重力ポテンシャル Φ の次元を求め，そのラプラシアン $\nabla^2\Phi$ の次元が 秒$^{-2}$ であることを示せ．
9. 宇宙項を付け加えた，相対論的な重力場の方程式

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R - g_{ij}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

を考える．この練習問題では，時空座標系は，次元同次座標を用いた**任意のもの**とする．特に，宇宙(時空の空間的断面)が 3 次元球面であるとは仮定しない．
   (a) 量 g_{ij}, R_{ij}, R, T_{ij} の次元を求め，宇宙定数 Λ が (長さ)$^{-2}$ の次元を持たなければならないことを示せ．
   (b) 方程式の左辺の発散が 0 であることを示せ．
   (c) 仮定 $T_{ij} \equiv 0$ のもとで $R = -4\Lambda$ を示せ．ただし，R はスカラー曲率 $R = R^i_i$ である．次いで $R_{ij} = -\Lambda g_{ij}$ を示せ．
   (d) 宇宙定数を含まない，物質中の重力場の方程式は，時空の曲率と物質–エネルギーの存在を結びつけるが，特に，空の宇宙$(T_{ij} \equiv 0)$が平坦であることを予言する．宇宙項が加えられた場合に，$\Lambda \neq 0$ ならば空の宇宙はもはや平坦ではないことを示せ．(これは空間的断面が $S^3(r)$ であるような時空を考えるというアインシュタインの提案を支持する．)
   (e) 変更後の重力場の方程式が

$$R_{ij} + g_{ij}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} T\right)$$

   という形にも書けることを示せ．ここで $g_{ij}\Lambda$ の符号が逆になっていることに注目しよう．
10. (a) 写像 $\mathbf{x} : \Omega \to \mathbf{R}^4$ を

$$\mathbf{x}:\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi\cos\omega, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi\cos\omega, \\ z = r\sin\varphi\cos\omega, \\ u = r\sin\omega; \end{cases} \qquad \Omega:\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, \\ -\pi/2 \le \omega \le \pi/2 \end{cases}$$

により定義する．ただし，r は正の定数と考える．

写像 $\mathbf{x}$ の像が，半径 r の 3 次元球面 $S^3(r)$ であることを示せ．

(b) 空間 $\mathbf{R}^4$ の普通のユークリッド内積から，写像 $\mathbf{x}$ によって Ω に誘導される計量 $a_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ を求めよ．

(c) 曲面の面積の議論（5.1 節）からの類推で，半径 r の 3 次元球面の体積が，$a = \det(a_{ij})$ とすると

$$V = \iiint_{\Omega} \sqrt{a}\; d\theta\, d\varphi\, d\omega$$

であることを示せ，さらにこの積分を実行して $V = 2\pi^2 r^3$ を導け．

11. (a) 時空 $E = \mathbf{R} \times S^3(r)$ をアインシュタインの準定常的宇宙とする次元同次座標 $(ct, \theta, \varphi, \omega) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ による座標系 R において，時空 E の計量が

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -r^2\cos^2\varphi\cos^2\omega & & \\ & & -r^2\cos^2\omega & \\ & & & -r^2 \end{pmatrix}$$

であることを示せ．（これは対角行列で，空白の成分はすべて 0 である．）

(b) 時空 E 上で，逆行列 g^{ij} と第 1 種のクリストッフェルの記号を計算せよ．第 2 種のクリストッフェルの記号のうちゼロにならないものは

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{11} &= \sin\varphi\cos\varphi, & \Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = -\tan\varphi, \\ \Gamma^3_{11} &= \cos^2\varphi\sin\omega\cos\omega, & \Gamma^1_{13} &= \Gamma^1_{31} = -\tan\omega, \\ \Gamma^3_{22} &= \sin\omega\cos\omega, & \Gamma^2_{23} &= \Gamma^1_{31} = -\tan\omega \end{aligned}$$

だけであることを示せ．

(c) 行列式 g と $L = \ln\sqrt{-g}$ を計算せよ．リッチテンソルの成分が

$$R_{00} = 0, \qquad R_{ij} = -\frac{2}{r^2} g_{ij} \quad (i,j) \ne (0,0) \text{ のとき}$$

であることを示せ．（ヒント：練習問題 4 で得た，リッチテンソルの公式を使うとよい．）

12. (a) アインシュタインの時空 $E = \mathbf{R} \times S^3(r)$ 上の物質–エネルギーが，互いに相互作用しない，R から見て一様な密度 ρ の静止している粒子の集団だけからなるとする．このとき，$T^{00} = \rho c^2$ 以外のエネルギー–運動量テンソルの成分 T^{ij} はゼロである．このときに，混合テンソル T^i_j と共変テンソルと T_{ij} を計算し，ラウエのスカラー

$T = T_i^i$ を求めよ．

(b) 物質中の重力場の方程式

$$R_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}T\right)$$

は一般には 10 個の成分を持つが，今の場合，これが独立な 2 つだけの方程式

$$\Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2}, \qquad -\frac{2}{r^2} + \Lambda = -\frac{4\pi G\rho}{c^2}$$

になることを示せ．これを組み合わせると，

$$r = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \quad \text{および} \quad \rho = \frac{c^2\Lambda}{4\pi G}$$

が導かれる．

第 7 章の内容をより深く知るには

一般相対論に関するアインシュタイン自身の論文は比類のない見事なものである．基本的な論文は [10] で，閉じた宇宙の宇宙定数は [8] で考察されている．一般相対論に関しては多くの教科書があるが，次のものを参照すると，種々の取り扱い方を知ることができるだろう．Adler, Bazin, Schiffer [1]; Dubrovin, Fomenko, Novikov [7];Frankel [14]; Landau, Lifshitz [17];Lawden [18]; Misner, Thorne, Wheeler [24]. このうち，Misner らによる教科書 [24] では，測地線偏移が中心的な役割を果たす．測地線偏移を微分幾何学的な視点から扱ったものに [5],[15] がある．測地線上のフェルミ座標は，Manasse と Misner の論文 [21] で詳細に扱われている．エネルギー–運動量テンソル (応力–エネルギーテンソルとも呼ばれる) の物理的基礎は，**ファインマン物理学** (The Feynman Lectures) [13, 英語版第 2 巻][注8]の中で注意深く扱われている．また，一般相対論の立場からは [18], [24], [25] で扱われている．

注 8 訳注：和訳第 4 巻 ‘電磁波と物性’

第8章 相対論から導かれること

アインシュタインは，一般相対論に関する革命的な1916年の論文[10]の最後の部分で，この新しい理論からいくつかの結果を導き，検証可能な予言を行った．そのうちの2つが特に有名である．第一のものは，大きな質量を持つ物体が近くを通る光線を曲げること，第二のものは水星の軌道で太陽に最も近い点(**近日点**(perihelion))の移動がニュートンの理論の予言よりも大きいことである．実際，近日点移動がニュートンの理論が予言より大きいことはそのときすでに知られており，アインシュタインの予言は，この長年にわたる謎を解決するものだった．一方，1919年には，日食の際の観測から，恒星からの光が太陽の近くを通るときに，アインシュタインの導いた通りに偏向していることが確かめられた．

検証可能な予言

これらの結果を導くのに，アインシュタインはまず，ニュートンの理論が，相対論の“第一近似”であることを示した．そして，太陽の作るニュートン的重力ポテンシャルから，相対論的な重力場を導き，そのもとで，光の偏向と近日点移動の計算を行った．この章では，一般相対論の証明となった予言が，ニュートン近似からいかに導かれるかを見ていく．

8.1 ニュートン近似

アインシュタインの理論からニュートンの理論を導く

ニュートンの重力理論とアインシュタインの重力理論は，根本的に異なる基本思想から出発している．しかし，小さな速度で弱い重力場中を運動する物体については，両者はほとんど一致する結果を与える．この一致は，

- 重力場が弱く，
- 物体が光の速さに比べて小さな速さで運動する

ときに，一般相対論がニュートン力学に**帰着する**—その意味は以下で正確に述べる—ことに起因する．簡単に言うと，相対論的な理論で，小さな量を無視するとニュートンの力学に帰着する．この節では，どのような条件が成り立つと“小さい”と見なしてよいのか，“小さい”となぜ無視してよいのか，無視しないで残した部分がどのようにニュートンの理論の良い近似になるのか，といったことを見て行く．

3 元組立単位系を使用

物理量の大きさを測るときに基準になるのは光の速さなので，3 元組立単位系を用いて，光の速さを $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, 速さの単位をメートル毎秒とするほうが，幾何単位系で $c = 1$, 速さを無次元とするよりも，今の目的に適している．

小さな量

ローレンツブーストがガリレイ的ずれ写像に帰着する仕組み

ガリレイ変換とローレンツ変換を例に考えると，一方の理論がもう一方に帰着するということの意味がよくわかる．慣性座標系 G に一人の観測者が静止していて，G は，もう一人の観測者ののっている R に対して速さ v で運動しているとする．これら 2 つの座標系を結びつけるのに，非相対論的力学ではガリレイ的ずれ写像 $S_v : G \to R$ を用いるのに対し，特殊相対論ではローレンツブースト $B_v : G \to R$ を用いる．（写像 B_v については，2.2 節の練習問題 5 で扱った.）これらの写像に対応する行列はそれぞれ，次元非同次座標 (t, z) と 3 元組立単位系で

$$S_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

となる．速さ v が c と比較して小さいとき，上で現れる因子は

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 1 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right), \qquad \frac{v}{c^2} = O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right),$$

と書くことができ，したがって，2 つの行列の間に非常に簡単な関係

$$S_v = B_v \cdot \left(1 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right)$$

が成立することがわかる．つまり，**写像 B_v は，大きさが v^2/c^2 と同程度の量を無視すると写像 S_v に帰着する**. 地球上の日常の物理学では，v など他の速さに比べて光の速さは非常に大きく，したがってその比の逆数は非常に小さい．このような状況下では，ブーストとずれを区別する方法は実質的に存在しないことが上の式からわかる．

しかし，v が c と比べて小さくないときには，結論はまったく異なる．例えば，$v = 0.9c$ の場合を考えてみると，

$$B_v = 2.3 \begin{pmatrix} 1 & 0.9/c \\ 0.9c & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9c & 1 \end{pmatrix}$$

となる．写像の間の最も大きな差異は，B_v 全体にかかる因子

$$2.3 = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9c/c)^2}}$$

である．なぜ，この因子が 1 から大きくずれるかを理解するには，$v = 0.9c$ の場合には $v = O(c)$ と見なすべきであることに注目して，

$$\frac{v}{c} = O(1) \qquad \text{のとき} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 1 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = 1 + O(1)$$

と書くとよくわかる．

この例のように考えるときには，任意の量 Q は，考えている物理的な系の典型的な速さの定数 v に対して，次の系列に現れるいずれかの量と同じオーダーの量と見なせるとする．

小さい量が無視できるための条件

$$\cdots \ll \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll \frac{v}{c} \ll 1 \ll \frac{c}{v} \ll \left(\frac{c}{v}\right)^2 \ll \cdots.$$

そして，量 Q が v/c の十分高い巾と同じオーダーであるときに，それを無視する．実際の計算の方法としては，相対論的な式(計量テンソル，重力場の成分，世界線の成分など)を，変数 v/c についてのテイラー級数として表し(必要なときには，c/v の正の小さな巾も含める)，この級数について計算を行い，目的にあう適当な項までで打ち切る．

以下では，典型的な速さ v は必ず c と組で現れるので，オーダーの記号 $O((v/c)^n)$ を $O(1/c^n)$ と書くことがある．

弱い重力場

次元同次座標

ニュートン近似を調べるには，次元同次座標をとっておくのが便利である．このとき，座標系 R で，

$$\mathbb{X} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad \mathrm{m},$$
$$\|\mathbb{X}\|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad \mathrm{m}^2$$

となる．ミンコフスキノルムを定める行列を J とすると，その成分 J_{kl} はすべて無次元であり，

$$\|\mathbb{X}\|^2 = \mathbb{X}^t J\, \mathbb{X}, \qquad J = (J_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．

計量 g_{kl} を v/c の巾で展開

以上の準備のもとで，R にとっての弱い重力場という言葉の意味を説明できる．基本的な考え方は単純である．もし $g_{kl} = J_{kl}$ ならば R は慣性座標系であり，重力場は存在しない．成分 g_{kl} に小さな項を加えると，R には弱い重力の効果が加わる．“小さい” とは，“大きさが v/c のオーダー” のことなので，系統的に調べるには，計量 g_{kl} を，系の典型的な速さの定数 v に対して v/c の巾で

$$g_{kl} = J_{kl} + \frac{v}{c} h^{(1)}_{kl} + \frac{v^2}{c^2} h^{(2)}_{kl} + \frac{v^3}{c^3} h^{(3)}_{kl} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

のように展開するとよい[注1]．さらに，便利のため，

$$g^{(n)}_{kl} = v^n \cdot h^{(n)}_{kl}$$

注1 訳注：計量の式が c を含まなくても，任意の無次元の小さなパラメター ϵ で展開すればよい．ニュートン重力の導出は，$O(\epsilon) = O(v/c)$ であれば，対応する項を比較して実行できる．

と定義する．重力場 $-\Gamma^h_{kl}$ はポテンシャル関数の偏導関数を含むので，これらの偏導関数も小さいことを以下では要求する．最終的な目標は，非相対論的な運動方程式と重力場の方程式を，対応する相対論的な方程式

$$\frac{d^2x^h}{d\tau^2} = -\Gamma^h_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha},$$
$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}T\right) \qquad \longrightarrow \qquad \nabla^2\Phi = 4\pi\rho$$

から導くことであるが，実際には，計量に含まれる v/c のオーダーの項が厳密に 0, すなわち，$g^{(1)}_{kl} = 0$ でない限りは，これは成立しない．このことは練習問題 5 で見る．そこで，弱い重力場を次のように定義する．

定義 8.1 弱い重力場(weak gravitational field)あるいは弱場とは，その計量が，標準的ミンコフスキ計量と，$1/c^2$ より大きくないオーダーの “補正項” との和

$$g_{kl} = J_{kl} + \frac{1}{c^2}g^{(2)}_{kl} + \frac{1}{c^3}g^{(3)}_{kl} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

の形であり，さらに，その各成分が時間，空間に関してゆっくり変化するという条件

$$g^{(m)}_{kl} = O(1), \qquad \frac{\partial g^{(m)}_{kl}}{\partial t} = O(1), \qquad \frac{\partial g^{(m)}_{kl}}{\partial x^\alpha} = O(1)$$

を満たすもののことをいう．

上の定義を満たす重力場に対して，

$$\frac{\partial g^{(m)}_{kl}}{\partial x^0} = \frac{\partial g^{(m)}_{kl}}{\partial t}\frac{dt}{dx^0} = O(1)\cdot\frac{1}{c} = O\left(\frac{1}{c}\right)$$

であることに注意しよう．

命題 8.1 行列 J の逆は自分自身，すなわち $J^{ij} = J_{ij}$ であるが，弱い重力場 g_{kl} に対して，

$$g^{ij} = J^{ij} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad g = -1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

である．

証明：練習問題 1.

運動方程式

世界時間と固有時間

相対論的な運動方程式から非相対論的な運動方程式を導くためには，ニュートンの理論には存在しない固有時間と，ニュートンの理論で普通に使われる “世界時間” (“world time”) との間に関係をつけなければならない．非相対論的な粒子の軌跡を $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ としたとき，その世界線は

$\mathbb{X}(t) = (ct, \mathbf{x}(t))$ である．この世界線 $\mathbb{X}$ を固有時間で助変数表示するのには積分

$$L(t) = \int_a^t \|\mathbb{V}(t)\| dt$$

を考えればよい．しかし，4 元速度 $\mathbb{V} = (c, \dot{\mathbf{x}})$ はメートル毎秒で測られる量なので，上の積分で定義された L は**時間**でなく**長さ**である．そこで，次元をいつもと同じように修正して，固有時間は $\tau(t) = L(t)/c$ 秒で与えられる．

ニュートン近似は，速さの小さい粒子にしか適用できない．そこで次のように定義しておく．

定義 8.2 考えている系の典型的な速さの定数を v とするとき，粒子の軌跡 $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ が，$\alpha = 1, 2, 3$ に対して $\dot{x}^\alpha/c = O(v/c)$ を満たすとき，その粒子は**遅い**(slow)という．

定理 8.1 遅い粒子の，(4 成分に対する)4 個の相対論的運動方程式は，重力場が弱いときには，**3** 個の非相対論的運動方程式

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x}^\alpha = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha},$$

に帰着する．ここで**ニュートン的ポテンシャル**(Newtonian potential)Φ は計量の成分 $\frac{1}{2}g^{(2)}_{00}$ である．

証明：極限として非相対論的方程式が現れる過程は，いくつかの段階に分けられる．第 1 番目に，固有時間 τ を "世界時間" t で置き換える．第 2 番目に，相対論的な方程式のうちの 1 個が消滅する，あるいは少なくとも不要であることを示す．第 3 番目に，残りの 3 個の方程式の右辺が，極限で 1 個の関数の勾配になることを示す．これらを，順を追って実行する．

ステップ 1． 粒子が，慣性座標系 (t, z) に対して等速直線運動をしているという最も単純な状況を考える．この座標系ではミンコフスキノルム $\|(t, z)\|^2 = t^2 - z^2/c^2$ が用いられ，$v = \Delta z/\Delta t = O(1)$ のときには，

$\frac{dt}{d\tau} = 1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{1}{c^2}\Delta z^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\Delta t = \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]\Delta t$$

となる．この式が，弱い重力場中を運動する遅い粒子，という条件下でも成立することを示そう．世界線 $\mathbb{X}(t)$ 上で，固有時間関数 $\tau(t)$ は，

$$d\tau = \frac{\|\mathbb{V}\|}{c}dt = \sqrt{\frac{g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l}{c^2}}\,dt$$

を満たす．重力場は弱く，$\dot{x}^0 = c$, $\dot{x}^\alpha/c = O(v/c)$ なので，

$$\frac{g_{kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l}{c^2} = g_{00} + 2g_{0\alpha}\frac{\dot{x}^\alpha}{c} + g_{\alpha\beta}\frac{\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}{c^2} = 1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

となる．よって，

$$d\tau = \sqrt{\frac{g_{kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l}{c^2}}\,dt = \sqrt{1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)}\,dt = \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]dt$$

である．読者は，これに加えて，

$$\frac{dt}{d\tau}=1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\qquad\text{および}\qquad\frac{d\tau}{dt}=1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

も成立することを確かめよう．

時間微分の比較

ステップ2.　次に，方程式そのものを考える．世界線 $\mathbb{X}(t)$ の助変数を固有時間 τ に変更し，合成関数の微分法を用いて，$\mathbb{X}$ を τ について微分する．毎度のことだが，最初の成分だけを他の成分とは別に計算すると，

$$\frac{dx^0}{d\tau}=\frac{dx^0}{dt}\frac{dt}{d\tau}=c\left[1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]$$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2}=\frac{d}{dt}\left[c+O\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dt}{d\tau}=O\left(\frac{1}{c}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]=O\left(\frac{1}{c}\right)$$

を得る．したがって，相対論的運動方程式の1番目の式の左辺は，無視できる小さな量である．（練習問題5では，弱い重力場の定義から条件 $g_{kl}^{(1)}=0$ を除くと，これが成立しなくなることを示す.）空間成分 $\alpha=1,2,3$ に対しては

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}=\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\dot{x}^\alpha\left[1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]=\dot{x}^\alpha+O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=\frac{d}{dt}\left[\dot{x}^\alpha+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]\frac{dt}{d\tau}=\ddot{x}^\alpha+O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

となる．したがって，空間変数 x^1, x^2, x^3 の，固有時間による微分と世界時間による微分との差は，無視できる小さな量である．（粒子が遅いという条件がないと，この結論は導けない．練習問題4参照.）

クリストッフェルの記号のオーダー

ステップ3.　次に，相対論的運動方程式の右辺がどのような形になるかを考える．クリストッフェルの記号には，g_{kl} の座標についての偏導関数が含まれるが，今回も，$x^0=ct$ を x^α とは別扱いで計算する．計量は $g_{kl}=J_{kl}+O(1/c^2)$ なので，

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^\alpha}=O\left(\frac{1}{c^2}\right)\qquad\text{および}\qquad\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\frac{dt}{dx^0}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\frac{1}{c}=O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

である．したがって，$\Gamma_{k0,k}=O(1/c^3)$ なのに対して，一般には $\Gamma_{kl,i}=O(1/c^2)$ である．第2種のクリストッフェルの記号については，

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{00}&=g^{\alpha m}\Gamma_{00,m}=g^{\alpha\alpha}\Gamma_{00,\alpha}+g^{\alpha 0}\Gamma_{00,0}+g^{\alpha\beta}\Gamma_{00,\beta}\qquad(\beta\neq\alpha)\\&=\left[-1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right)\right]\\&\quad+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}+O\left(\frac{1}{c^3}\right)=\frac{1}{2c^2}\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^\alpha}+O\left(\frac{1}{c^3}\right)\end{aligned}$$

である．読者は，これ以外のクリストッフェルの記号について，

$$\Gamma^h_{h0} = O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad \Gamma^h_{kl} = O\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (k,l) \neq (0,0)$$

であることを確かめよう．

座標 x^0 についての測地線方程式のニュートン近似

ステップ 4.　ここまでで，どのようにして相対論における測地線方程式からニュートンの理論での運動方程式が導かれるかを調べる用意が整った．再び，x^0 だけが特別である．時間成分 x^0 についての方程式は，

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\Gamma^0_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = -\Gamma^0_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - 2\Gamma^0_{0\alpha}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

であるが，左辺については，既に $O(1/c)$ であることがわかっている．一方，右辺の 3 項については，

$$\Gamma^0_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = O\left(\frac{1}{c^3}\right)\left(c + O\left(\frac{1}{c}\right)\right)^2 = O\left(\frac{1}{c^3}\right)(c^2 + O(1)) = O\left(\frac{1}{c}\right),$$

$$\Gamma^0_{0\alpha}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = O\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(c + O\left(\frac{1}{c}\right)\right)\left(\dot{x}^\alpha + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{c}\right),$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = O\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\dot{x}^\alpha + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right)\left(\dot{x}^\beta + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

となる．つまり，x^0 についての測地線方程式は，両辺ともオーダー $1/c$ であって，ニュートン近似では，完全に無視することができる．なお，右辺第 2 項と第 3 項が無視できることを示すのに，$\dot{x}^\alpha = O(1)$ が必要だったことに注意しよう．

座標 x^α についての測地線方程式のニュートン近似

ステップ 5.　次に，x^α についての測地線方程式を考えると，

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - 2\Gamma^\alpha_{0\beta}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

である．左辺は単に

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \ddot{x}^\alpha + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

である．一方，右辺では，第 2, 第 3 項は

$$\Gamma^\alpha_{0\beta}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = O\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(c + O\left(\frac{1}{c}\right)\right)\left(\dot{x}^\alpha + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{c}\right),$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = O\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\dot{x}^\beta + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right)\left(\dot{x}^\gamma + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

となって，x^0 の場合と同様に無視できることがわかる．しかし，第 1 項からは無視できない寄与

$$\Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = \left[\frac{1}{2c^2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right](c^2 + O(1)) = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right)$$

がある．したがって，測地線方程式は

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right)$$

と書き換えることができる． **証明終**

重力場の方程式

定理 8.2 弱い重力場という条件のもとで，相対論的な重力場の方程式から，非相対論的な重力場の方程式が導かれる．すなわち，

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}T) \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^\alpha)^2} = 4\pi G\rho.$$

証明：まず，相対論的な方程式の右辺を考える．物質–エネルギーが，座標系 $R:(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ から見て静止している，互いに区別できず，互いに相互作用しない粒子の集団からなるとして，右辺をできるだけ簡単にする．この集団の静止密度を ρ とすると，このとき，固有4元速度は．$\mathbb{U} = (c, 0, 0, 0)$ で与えられ，エネルギー–運動量テンソルは，ただ1つの成分 $T_{00} = \rho c^2$ を除いてすべてゼロになる．したがって，ラウエのスカラーは $T_0^0 = T = \rho c^2$ と求められる．よって，相対論的な方程式の右辺の $i = j = 0$ 成分は，

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}(T_{00} - \tfrac{1}{2}g_{00}T) &= \frac{8\pi G}{c^4}\left[\rho c^2 - \left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right)\frac{\rho c^2}{2}\right] \\ &= \frac{8\pi G}{c^4}\left[\frac{\rho c^2}{2} + O(1)\right] = \frac{1}{c^2}\,4\pi G\rho + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\end{aligned}$$

となる．

左辺のこの成分は，

$$R_{00} = R^h_{0h0} = R^\alpha_{0\alpha 0} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{0\alpha}}{\partial x^0} + \Gamma^p_{00}\Gamma^\alpha_{p\alpha} - \Gamma^p_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{p0}$$

である．(注: 読者は，$R^0_{000} = 0$ であることを確かめよう．よって，$\alpha = 1, 2, 3$ だけについて考えればよい．) 弱い重力場では，クリストッフェルの記号はたかだか $O(1/c^2)$ なので，最後の2項は $O(1/c^4)$ である．さらに，

$$\Gamma^\alpha_{0\alpha} = O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad \frac{\partial\Gamma^\alpha_{0\alpha}}{\partial x^0} = O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

および

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad \frac{\partial\Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

が成立するので，

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

となる．よって，非相対論的な重力場の方程式は，オーダー $1/c$ の項の不定性を除いて

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial(x^\alpha)^2}=4\pi G\rho+O\left(\frac{1}{c}\right)$$

となる. 証明終

練習問題

1. 弱い重力場を表す計量を g_{ij} とする．このとき，

$$-g=1+\frac{g_{00}^{(2)}-g_{11}^{(2)}-g_{22}^{(2)}-g_{33}^{(2)}}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\ln\sqrt{-g}=\frac{g_{00}^{(2)}-g_{11}^{(2)}-g_{22}^{(2)}-g_{33}^{(2)}}{2c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$g^{ij}=J^{ij}+O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

を示せ.

2. (a) 小さな数 a に対して，$1/(1+O(a))=1+O(a)$ および $\sqrt{1+O(a)}=1+O(a)$ を示せ.

 (b) 式

$$d\tau=\sqrt{1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)}\,dt$$

 から

$$\frac{dt}{d\tau}=1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\qquad \text{および}\qquad \frac{d\tau}{dt}=1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

 が導かれることを示せ.

3. 弱い重力場のもとで，$\Gamma^h_{h0}=O(1/c^3)$ および $\Gamma^h_{kl}=O(1/c^2)$ (ただし $(k,l)\neq(0,0)$) を示せ.

4. “速い” 粒子 ($\dot{x}^\alpha=O(c)$ であるような粒子) の場合に，固有時間と世界時間の間の関係はどうなっているか.

5. 弱い重力場の定義において，仮に，その計量が $1/c$ のオーダーの項を含むこと，つまり $g_{kl}^{(1)}\neq 0$ で

$$g_{kl}=J_{kl}+\frac{1}{c}g_{kl}^{(1)}+O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

 と展開されることを許したとしよう.

 (a) 遅い粒子に対して $d\tau=\left(1+A/c+O(1/c^2)\right)dt$ を示し，係数 A を $g_{kl}^{(m)}$ で表せ.

 (b) 遅い粒子の世界線 $(x^0(t),x^\alpha(t))=(ct,x^\alpha(t))$ を固有時間 τ で助変数表示し直したとする．このとき，τ と t が問(a)と同様な関係にあるとして，$d^2x^0/d\tau^2=O(1/c)$ がもはや成立しないことを示せ．これはニュートン近似にどのような影響を及ぼすか.

 (c) クリストッフェルの記号 $\Gamma^\alpha_{00},\Gamma^\alpha_{0\beta}$ の展開に現れる $1/c$ のオーダーの項を求めよ．これらの項は，相対論的な測地線方程式を非相対論的

な運動方程式に帰着させる過程にどのような影響を及ぼすか．

6. (a) 相互作用せずに次元同次座標を用いた慣性座標系 R から見て遅い粒子の集団を考え，そのエネルギー–運動量テンソルを T^{ij} とする．このとき，$T^{00} = O(c^2)$ であることを示し，他のすべての成分のオーダーも決定せよ．また，$T = T^i_i$ のオーダーを求めよ．
   (b) 弱い重力場 g_{ij} に対して，リッチテンソル R_{ij} の各成分のオーダーを求めよ．

8.2　球対称重力場

重力場の方程式を解く

この節のテーマは重力場の方程式の解をみつけることである．解くべきこの方程式は，数学的には，計量の成分に対する偏微分方程式系であり，解を求めることは一般には期待できない．そこで，解が求まるような単純な場合に限定して考えよう．

質点の作る弱い重力場

最も単純な重力場は，空間の小さな領域に質量が集中した1個の物体，つまり"点源"が作る重力場である．質量 M のただ1個の点源が作るニュートン的ポテンシャルが

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{r}, \qquad r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

となることは4.3節で見た．この場合，質点は原点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に静止している．質点の作るニュートンの重力場は，質点を中心として球対称で，時間的に一定で，距離 $r \to \infty$ でゼロに近づく．

真空中の重力場の方程式を解いて重力場を決定

この点源の作る相対論的な重力場を，ニュートンの重力場が持つ性質，すなわち，球対称で，時間に依存せず，遠方 $r \to \infty$ でミンコフスキ計量に近づくという条件を満たすように構成しよう．また，前節の意味で，弱い重力場であることも仮定しよう．[注2]すなわち，ミンコフスキ計量に補正を加えた

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = 1 - \frac{2GM}{rc^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

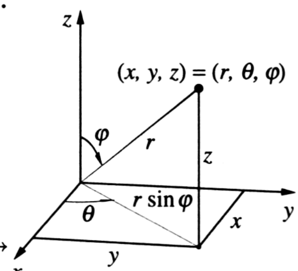
から出発する．他にも補正項があるだろうが，現段階ではどのようなものかはわからない．むしろ，それらを決定するために，重力源から離れた点で成立する真空中の重力場の方程式 $R_{ij} = 0$ を用いる．この方程式は，計量の成分に対する偏微分方程式であるが，この場合には，ただ1つの常微分方程式に帰着することを以下で見る．いったん常微分方程式になればすぐ解けるはずである．

場の球対称性を利用

ここでは，次元同次座標 $(x^0 = ct, x, y, z)$ を用いる座標系 r で，質点の世界線が t 軸に一致するものとして，計量を求める．さらに，計量のすべての

[注2] 訳注：これを弱場近似という．

成分 g_{kl} は，時間に依存せず，空間座標の関数 r にのみ依存すると仮定する．計量の球対称性を考えると，座標 (x, y, z) から球座標



$$x = r\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\varphi$$

に移るほうがよい．これは，座標系 $G : (x^0, r, \varphi, \theta)$ から r への写像 $M : G \to R$ を定めており，この写像について，6.4 節で述べた手続きを適用すると，G^x の計量 γ_{ij} を，R の（補正項を加える前の）ミンコフスキ計量 g_{kl} から，

$$(\gamma_{ij}) = dM^t\,(g_{kl})\,dM$$

と求めることができる．

計量を求めるには，もう 1 つ別の方法がある．固有時間は，ノルムの積分として求められる．これを微分 ds を用いて　**計量を微分として書く**

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}}\,dt = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{kl}\,dx^k dx^l} = \frac{1}{c}\int ds$$

と表すと，$ds^2 = g_{kl}\,dx^k dx^l$ となる．ミンコフスキノルムについては，

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

なので，新しい座標系での ds^2 を求めるには，dx^2, dy^2, dz^2 を r, φ, θ とその微分で表せばよい．（注: ここでは，4.3 節の練習問題 6 で定義した外積でなく，普通の積を計算すればよい．これは，例えば dx^2 は $(dx/dt)^2$ と同じ意味の積であり，単に導関数のかけ算を表しているからである．）実行すると，

$$dx = \sin\varphi\cos\theta\,dr + r\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi - r\sin\varphi\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy = \sin\varphi\sin\theta\,dr + r\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\,d\theta,$$
$$dz = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi$$

であり，これらの 2 乗を求めて加えると，

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\,d\theta^2$$

が示せる．ここで，G の座標を $(ct, r, \varphi, \theta) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ とすると，整数の添え字を使って，Γ_{ij} や Γ^k_{ij} のように読みやすく表示することができる．まず，γ_{ij} は **対角行列**

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

として表せる．

この計量に，空間の原点に置かれた質点の効果による補正項を加えなければならない．まず，上で出てきたニュートン的ポテンシャル $\Phi(x, y, z)$ を距　**補正項**

離 r の関数と見た $\Psi(r)=\Phi(x,y,z)$ を導入すると,

$$\gamma_{00}=1+\frac{2\Psi(r)}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

となる．摂動[注3]後の重力場の方程式は球対称であると仮定したので，$d\varphi$ と $d\theta$ を含む項は変更を受けない．さらに，残りの dr^2 に対する補正は，r のみの関数であるはずで,

$$\gamma_{11}=-1+\frac{P(r)}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

という形になる．したがって，重力場が弱いという仮定のもとで，オーダー $1/c^2$ までは正しく扱う弱場近似のもとで計量の式を求めるには，この関数 $P(r)$ を決定しさえすればよい．

定理 8.3 $P(r)=2\Psi(r)+O(1/c)$.

証明： 空間の原点 $r=0$ を中心とする物体 M の外部では，真空中の重力場の方程式 $R_{ij}=0$ が成立する．未知関数はただ 1 つなので，ただ 1 つの式

$$R_{11}=R^h_{1h1}=\frac{\partial\Gamma^h_{11}}{\partial\xi^h}-\frac{\partial\Gamma^h_{1h}}{\partial\xi^1}+\Gamma^p_{11}\Gamma^h_{ph}-\Gamma^p_{1h}\Gamma^h_{p1}=0$$

を考えればよい．ここで，和をとる添え字の範囲は $h,p=0,1,2,3$ である．準備として，まず，次のような事実が成立することに注意する．

- 計量 γ_{ij} は対角行列なので，その逆行列 γ^{kl} も対角である．特に，$\gamma^{kk}=1/\gamma_{kk}$ であり，$k\neq l$ ならば $\gamma^{kl}=0$ である．ただし，添え字 k に対しては和の規約を適用しない．
- クリストッフェルの記号 Γ^k_{ij} は，$\Gamma^k_{ij}=\gamma^{kl}\Gamma_{ij,l}$ という，添え字 l についての和であるが，和に現れる項は，実際はただ 1 項 $\gamma^{kk}\Gamma_{ij,k}$ だけである．[注4]
- 添え字 i,j,k がすべて互いに異なる値をとるとき，$\Gamma^k_{ij}=0$ である．このことは,

  $$\Gamma_{ij,k}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial\xi^j}+\frac{\partial\gamma_{jk}}{\partial\xi^i}-\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\xi^k}\right)=0$$

  からわかる．この式は，添え字がすべて異なる値のとき $\gamma_{ik}=\gamma_{jk}=\gamma_{ij}=0$ であることから導ける．
- すべての量の，$\xi^0=ct$ についての導関数はゼロである．

直接の計算により，R_{11} に現れるほとんどの項はゼロであることが示せる．クリストッフェルの記号のうち計算に必要なのは

$$\Gamma^0_{01}=\frac{\Psi'}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^3}\right),\qquad \Gamma^1_{11}=-\frac{P'}{2c^2}+O\left(\frac{1}{c^3}\right),\qquad \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r}$$

だけで，これから,

[注3] 訳注：何らかの量(今の場合は計量)に小さな項を加えること．

[注4] 訳注：添え字 k は，2 回でなく 3 回現れているので和の規約は適用されない．以下も同様．

$$\frac{\partial\Gamma^h_{11}}{\partial\xi^h} = \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial r} = -\frac{P''}{2c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$\frac{\partial\Gamma^h_{1h}}{\partial\xi^1} = \frac{\partial\Gamma^0_{10}}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial r} = \frac{\Psi''}{c^2} - \frac{P''}{2c^2} - \frac{2}{r^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$\Gamma^p_{11}\Gamma^h_{ph} = \Gamma^1_{11}\Gamma^h_{1h} = \Gamma^1_{11}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) = \frac{P'}{2c^2}\cdot\frac{2}{r} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$\Gamma^p_{1h}\Gamma^h_{p1} = \left(\Gamma^2_{12}\right)^2 + \left(\Gamma^3_{13}\right)^2 + O\left(\frac{1}{c^4}\right) = \frac{2}{r^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

と計算される．結局，$R_{11} = 0$ が成立するためには，

$$-\frac{\Psi''}{c^2} - \frac{P'}{rc^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = 0$$

が成立することが必要十分である．この式を P について解くと，

$$P' = -r\Psi'' + O\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{2GM}{r^2} + O\left(\frac{1}{c}\right)$$

となる．オーダー $O(1/c)$ の項を無視して積分すると，

$$P(r) = -\frac{2GM}{r} + A = 2\Psi(r) + A$$

と求められる．ここで，A は積分定数である．ところが，$r \to \infty$ で $P(r) \to 0$ となることを要求しているので ,A はゼロである． **証明終**

デカルト座標での計量

計量を微分として書き，係数の中のオーダー $1/c^3$ の項を無視すると，見やすい形

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2) \\ &= c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2) + \frac{2\Phi}{c^2}dr^2 \end{aligned}$$

になる．これをデカルト座標系 $R : (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ で表すためには，余分な最後の項を変換する必要がある．基本的な関係 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ より，

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r} = \sum_\alpha \frac{x^\alpha}{r}\,dx^\alpha,$$

$$dr^2 = \left(\sum_\alpha \frac{x^\alpha}{r}\,dx^\alpha\right)\left(\sum_\beta \frac{x^\beta}{r}\,dx^\beta\right) = \sum_{\alpha,\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^2}\,dx^\alpha dx^\beta$$

と求まるので，座標系 R での計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - \sum_\alpha (dx^\alpha)^2 + \frac{2\Phi}{c^2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^2}\,dx^\alpha dx^\beta \\ &= (dx^0)^2 - \sum_\alpha (dx^\alpha)^2 - \frac{2GM}{rc^2}\left((dx^0)^2 + \sum_{\alpha,\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^2}\,dx^\alpha dx^\beta\right) \end{aligned}$$

である．成分を用いると，

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r}, \qquad g_{0\alpha} = 0, \qquad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} - \frac{2GM}{c^2}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}$$

である．

シュヴァルツシルト計量

任意の球対称重力源

物理学者カールシュヴァルツシルト(Karl Schwarzschild)は，1916年に，任意の球対称な質量分布に対して，その外部での相対論的な重力場を決定した．中空の球殻はその1つの例である．この議論では，定理8.3で必要だった，場が弱いという仮定は不要で，質量から遠方に離れるとミンコフスキ計量に近づくという条件だけで十分である．また，この議論は，重力場が球対称性を保ったまま時間的に変化する場合にも適用できる．しかし，ここでは単純な時間に依存しない場合のみを考える．

計量の形

球対称の中心の世界線が座標系 $G:(ct,r,\varphi,\theta)$ の t 軸と一致するとする．ここでは，球対称性を活用するために，引き続き球座標 (r,φ,θ) を用いる．シュヴァルツシルト計量は，ミンコフスキ計量が摂動を受けたものなので，

$$ds^2 = e^{T(r)}c^2\,dt^2 - e^{Q(r)}\,dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\theta^2)$$

という形に書ける．摂動は r のみに依存し，また，$d\varphi$ と $d\theta$ の項にはまったく影響を与えない．さらに，r が大きいところでは ds^2 はミンコフスキ計量に近づくので，$r\to\infty$ の極限で $T\to 0$ かつ $Q\to 0$ となることを要求する．ここでは，後の計算が簡単になるように，先回りして係数をこのように指数関数を用いて表している．しかし，指数関数の部分をテイラー展開した

$$ds^2 = (1+T+O(T^2))c^2\,dt^2 - (1+Q+O(Q^2))\,dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\theta^2)$$

という形も便利である．この式によれば，ある意味で，T と Q 自身が，摂動の主要部分であると考えられる．

真空中の重力場の方程式

未知関数 $T(r)$ と $Q(r)$ を決定するのには，重力場を作る物質の外側の領域で成立する，真空中の重力場の方程式を用いる．これには長くて美しくない計算が必要であり，微分の計算規則の知識に加えて，忍耐力と注意力が要求される．しかし，必要な方程式は $R_{00}=0$ と $R_{11}=0$ の2個だけである．

今回も構造の見やすい球座標について，$(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)=(ct,r,\varphi,\theta)$ として整数値の添え字で表示をする．最初に調べるのは，計量テンソルとその逆行列

$$\begin{aligned}
\gamma_{00} &= e^T, & \gamma_{11} &= -e^Q, & \gamma_{22} &= -r^2, & \gamma_{33} &= -r^2\sin^2\varphi,\\
\gamma^{00} &= e^{-T}, & \gamma^{11} &= -e^{-Q}, & \gamma^{22} &= -r^{-2}, & \gamma^{33} &= -r^{-2}\sin^{-2}\varphi
\end{aligned}$$

である．これらの行列は，非対角項はすべてゼロである．これは，クリストッフェルの記号が，定理8.3と同じ条件

- 添え字 i,j,k がすべて互いに異なる値をとるとき，$\Gamma^k_{ij}=0$ である．
- 和 $\Gamma^k_{ij}=\gamma^{kl}\Gamma_{ij,l}$ は，実際にはただ1項 $\gamma^{kk}\Gamma_{ij,k}$ だけからなる．

を満たすことを意味する．

定理 8.4 $e^T = 1 + (a/r)$, $e^Q = e^{-T} = 1/(1 + a/r)$. ただし，$a$ は任意定数．

証明：直接の計算により，ゼロでないクリストッフェルの記号は，次の 9 個と，下付き添え字を入れ替えて得られる 4 個だけである．

$$\Gamma^1_{00} = \frac{T'}{2} e^{T-Q}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{Q'}{2}, \qquad \Gamma^1_{22} = -re^{-Q}, \qquad \Gamma^1_{33} = -re^{-Q} \sin^2 \varphi,$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{T'}{2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \cot \varphi, \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin \varphi \cos \varphi.$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},$$

共変リッチテンソルのゼロでない成分は，

$$R_{00} = e^{T-Q} \left(\frac{T''}{2} + \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'Q'}{4} + \frac{T'}{r} \right),$$

$$R_{11} = -\frac{T''}{2} - \frac{(T')^2}{4} + \frac{T'Q'}{4} + \frac{Q'}{r},$$

$$R_{22} = 1 - e^{-Q} + re^{-Q} \left(\frac{Q'}{2} - \frac{T'}{2} \right),$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \varphi$$

である．ここで，真空中の重力場の方程式 $R_{00} = 0$ と $R_{11} = 0$ を考える．式 $R_{00} = 0$ の両辺を e^{T-Q} で割ったものと，$R_{11} = 0$ との和を考えると

$$\frac{T'}{r} + \frac{Q'}{r} = 0$$

である．ここから，積分定数を k すると，$T + Q = k$, すなわち，$e^T = e^{-Q} e^k$ が導かれる．よって，計量は

$$ds^2 = e^{-Q} e^k c^2 \, dt^2 - e^Q \, dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi \, d\theta^2)$$

となる．ここで，$t = e^{k/2} u$ という変数変換をすると $dt^2 = e^k du^2$ であり，

$$ds^2 = e^{-Q} c^2 \, du^2 - e^Q \, dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi \, d\theta^2)$$

となる．言い換えると，時間座標を，t から定数倍だけ変更して u とすることによって，$k = 0$ とおける．したがって，一般性を失うことなく，$T = -Q$ とすることができる．

あとは，関数 T を決定すればよい．関係 $Q = -T$ を使って $R_{11} = 0$ を書き直すと，

$$-\frac{T''}{2} - \frac{(T')^2}{4} - \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'}{r} = -\frac{1}{2r} (rT'' + r(T')^2 + 2T') = 0$$

となる．ここで，$(re^T)'' = e^T (rT'' + r(T')^2 + 2T')$ に注意すると，条件 $R_{11} = 0$ から $(re^T)'' = 0$ が導かれる．したがって，$(re^T)' = b$, さらに $re^T = br + a$ が得られる．ここで，b と a は積分定数である．これを

$$e^T = b + \frac{a}{r}$$

という形に書いて，極限 $r \to \infty$ での振る舞いを考えよう．この極限では $e^T \to 1$ となるべきなので，$b = 1$ と決まる．したがって，

$$e^T = 1 + \frac{a}{r}, \qquad e^Q = \frac{1}{1 + \frac{a}{r}}$$

である．　**証明終**

シュヴァルツシルト計量

この定理から，重力場を作る物質から離れた点では，シュヴァルツシルト計量は，

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{a}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 + (a/r)}dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2)$$

という形をとることがわかった．最初に要求した通り，極限 $r \to \infty$ で，この ds^2 は確かに普通のミンコフスキ計量に近づく．これは，r が大きいところでは，シュヴァルツシルト計量が記述する重力場は弱く，

$$1 + \frac{a}{r} = \gamma_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

となることを意味する．したがって，

$$-a \approx \frac{2GM}{c^2} = r_M$$

重力半径

と定まる．この定数は長さの次元を持つ（計量テンソルの成分 γ_{00} に現れる項 a/r が無次元であるためには，そうでなければならない）．そのため，r_M は質量 M の**重力半径**(gravitational radius) または**シュヴァルツシルト半径**(Schwarzschild radius) と呼ばれる．この r_M を用いて計量を表すと，

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - (r_M/r)}dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2)$$

である．この式から，シュヴァルツシルト計量について次のことがわかる．

- ニュートンの重力理論の場合と同様，計量は**全質量**(total mass) M のみに依存し，空間中の球対称な質量分布の詳細にはよらない．
- 領域 $r < r_M$ では，γ_{00} が負となり，計量は根本的に異なる性質を持つ．

漸近的な振る舞い

アインシュタインの弱場の計量とシュヴァルツシルト計量は，$r \to \infty$ で標準的ミンコフスキ計量に近づくという意味で，どちらも漸近慣性計量と呼ぶことができる．これは，これらの計量を持つ座標系が慣性座標系に対して回転しておらず，したがってコリオリの力が働かないということを意味している．コリオリの力については，7.1 節の練習問題 7～12 を参照．さらに重要なことは，以下の節でこの座標系のもとで光線の屈曲と近日点移動を計算する場合には，測定は遠方の“恒星”に対して行っていると見なせるということである．

重力赤方偏移

シュヴァルツシルト計量での時間の伸び

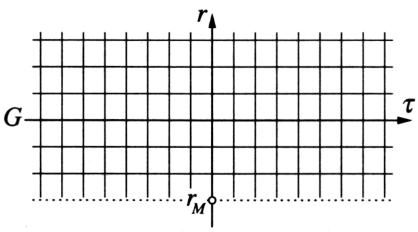
重力赤方偏移とは，重力場中に静止した原子から放出される光の特性振動数が減少する現象である．これは，時間の伸びに起因する．重力は，時計の進みを遅らせるが，原子時計もその例外ではない．時間の伸びを，4.4 節では等価原理を用いて計算したが，計量から直接に求めることもできる．具体的な設定として，重力源から遠く離れた観測者 R の座標系で書いた計量がシュヴァルツシルト計量であり，重力源に近い位置で観測者 G が R に対して静止している状況を考える．どちらの観測者の運動も $dr = d\varphi = d\theta = 0$ であり，それぞれの固有時間 τ と t の関係は

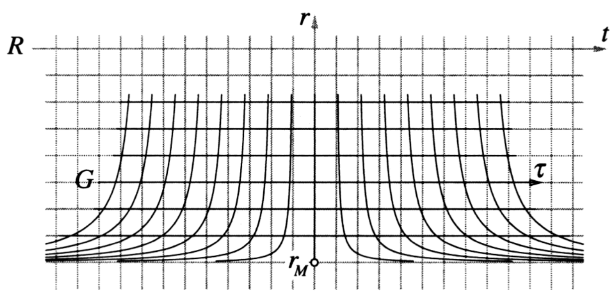
$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_M}{r}\right) dt^2, \qquad \text{すなわち} \qquad d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_M}{r}}\, dt < dt$$

となる．言い換えると，G の時計での $\Delta\tau$ 秒の時間間隔は R の時計では

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - r_M/r}}\, \Delta\tau > \Delta\tau \text{ 秒}$$

にあたる．観測者 G を，様々な距離 r に置いてみたとすると，それぞれの位置での**時間の伸びの因子** $1/\sqrt{1 - r_M/r}$ を，(t, r) 座標系上の網目として描くことができる．





観測者 R の立場では，G が重力半径 r_M に近づくにつれて，G の時計の進み方は刻みは無限に遅くなっていくように見える．この網目を，4 章で考えた，加速度座標系と単純な重力場に対して描いたものと比べるとよい．

等方的座標

デカルト座標で起きる複雑さ

アインシュタインの弱場の計量も，シュヴァルツシルト計量も，その空間成分は，dr^2 だけにかかっている因子のために，3 次元のユークリッド計量

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\theta^2,$$

の定数倍ではない．そのために，これらの計量をデカルト座標で書くと，球座標の場合よりも複雑になる．例えば，弱場の計量をデカルト座標で書き直したときには，

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} - \frac{2GM}{c^2}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}$$

のように非対角成分がたくさん現れた．

実は，別の新しい動径座標 ρ で r を置き換えると，シュヴァルツシルト計量は

$$ds^2 = A(\rho)c^2dt^2 - B(\rho)\left(d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 + \rho^2\sin^2\varphi\,d\theta^2\right)$$

となることがわかる．したがって，新しい球座標 (ρ, φ, θ) に対応する新しいデカルト座標 (ξ, η, ζ) で計量を書き直すと，

$$ds^2 = A(\rho)c^2dt^2 - B(\rho)\left(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2\right)$$

等方的座標

となる．この形の計量は，**すべての**空間方向について，同じ因子 $-B(\rho)$ を含んでいるので，空間座標 (ρ, φ, θ) および (ξ, η, ζ) は計量について**等方的**(isotropic)であるという．(ギリシャ語に遡る語源は，**isos**, "等しい"("equal")と **trope**, "回る"("turn")である．つまり，この計量は，"回ってどちらを向いても等しく見える".)

上のような等方的座標を見つけるには，2 つの動径変数を結びつける関数 $r = f(\rho)$ を求めなければならない．仮定から，

$$\left(1 - \frac{r_M}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{1 - r_M/r}dr^2 - r^2\,d\varphi^2 - r^2\sin^2\varphi\,d\theta^2$$
$$= A(\rho)c^2dt^2 - B(\rho)d\rho^2 - B(\rho)\rho^2\,d\varphi^2 - B(\rho)\rho^2\sin^2\varphi\,d\theta^2,$$

であるべきなので，条件は

$$\frac{dr^2}{1 - r_M/r} = B(\rho)\,d\rho^2 \qquad \text{かつ} \qquad r^2 = B(\rho)\rho^2$$

である．後者の式から得られる $B = r^2/\rho^2$ を前者の式に代入して，変数分離形にすると，k を積分定数として

$$\frac{dr^2}{r^2 - r_M r} = \frac{d\rho^2}{\rho^2}, \qquad \text{よって} \qquad \int\frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_M r}} = \pm\int\frac{d\rho}{\rho} = \pm\ln k\rho$$

となる．左辺の r の積分を計算するために，平方完成し，見易くするために $r_M = 2\alpha$, $r - \alpha = u$ とおくと，

$$\int\frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2\alpha r}} = \int\frac{dr}{\sqrt{(r-\alpha)^2 - \alpha^2}} = \int\frac{du}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}}$$

を得る．変数変換 $u = \alpha\cosh v$ によって，

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}} = \int dv = v = \cosh^{-1}\left(\frac{r - \alpha}{\alpha}\right)$$

と積分できる．よって条件は，

$$\cosh^{-1}\left(\frac{r - \alpha}{\alpha}\right) = \pm\ln k\rho,$$

すなわち

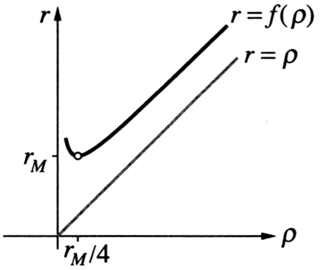
$$\frac{r - \alpha}{\alpha} = \cosh(\pm\ln k\rho) = \frac{e^{\pm\ln k\rho} + e^{\mp\ln k\rho}}{2} = \frac{k\rho}{2} + \frac{1}{2k\rho}$$

である．積分定数 k を定めると，r の ρ の関係が完全に決まる．その取り方は自由であるが，r と ρ とが "漸近的に等しい"—つまり，$\rho \to \infty$ の極限で

$r/\rho \to 1$ となるように定めるのが自然である．そのためには，$k = 2/\alpha$ とすればよく，この場合に r について解くと，

$$r = \rho + \alpha + \frac{\alpha^2}{4\rho} = \rho + \frac{r_M}{2} + \frac{r_M^2}{16\rho} = \rho\left(1 + \frac{r_M}{4\rho}\right)^2 = f(\rho)$$

となる．



上のグラフからわかるように，$f : (r_M/4, \infty) \ni \rho \mapsto r \in (r_M, \infty)$ は正しい座標変換になっている．条件 $r_M < r$ が課されるが，もともと $r \leq r_M$ では計量の性質がまったく異なるものになっているので，これは座標の深刻な欠点ではない．

この関数 $r = f(\rho)$ を用いると，

$A(\rho)$ と $B(\rho)$ を求める

$$B(\rho) = \frac{r^2}{\rho^2} = \left(1 + \frac{r_M}{4\rho}\right)^4$$

が得られ，さらに

$$A(\rho) = \frac{r - r_M}{r} = \frac{\rho - \dfrac{r_M}{2} + \dfrac{r_M^2}{16\rho}}{\rho + \dfrac{r_M}{2} + \dfrac{r_M^2}{16\rho}} = \frac{\rho\left(1 - \dfrac{r_M}{4\rho}\right)^2}{\rho\left(1 + \dfrac{r_M}{4\rho}\right)^2} = \left(\frac{1 - \dfrac{r_M}{4\rho}}{1 + \dfrac{r_M}{4\rho}}\right)^2$$

となる．以上の議論から次の定理が示された．

定理 8.5 等方的デカルト座標 (t, ξ, η, ζ) では，シュヴァルツシルト計量は

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_M/4\rho}{1 + r_M/4\rho}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_M}{4\rho}\right)^4 (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)$$

となる．ただし，$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$．

系 8.1 動径座標 ρ の大きいところでは，シュヴァルツシルト計量は，近似的に

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_M}{\rho}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_M}{\rho}\right) (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)$$

で与えられる．

証明： 練習問題 15 参照．

上の主張では，等方的球座標から等方的デカルト座標に，

$$\xi = \rho\cos\theta\sin\varphi,$$
$$\eta = \rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$\zeta = \rho\cos\varphi$$

で変換した．新しいデカルト座標は $\xi = (\rho/r)\,x$ であり，また η, ζ についても同様なので，これらはもとのデカルト座標 x, y,z のそれぞれに非線型なスケールの変更を行ったものということができる．

練習問題

1. 量 dx^2, dy^2, dz^2 を球座標で表し，$dx^2+dy^2+dz^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\,d\theta^2$ を確かめよ．
2. クリストッフェルの記号 Γ^0_{01}, Γ^1_{11}, Γ^2_{12}, Γ^3_{13} が，定理 8.3 の証明で用いた通りの値を持つことを確かめよ．これらが，R_{11} に現れるクリストッフェルの記号のうちでゼロでないものはこれだけであることを示せ．
3. (a) 定理 8.3 の証明で用いた，球対称な弱場の計量の行列式を γ とする．座標系として球座標 $(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3) = (ct, r, \varphi, \theta)$ を用いたとき，
$$\ln\sqrt{-\gamma} = 2\ln r + \ln\sin\varphi - \frac{P}{2c^2} + \frac{\Psi}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$
を示せ．
   (b) 球対称な弱場の計量について，7.3 節の練習問題 4 の式式
$$R_{ij} = \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial\xi^h} - \frac{\partial^2\ln\sqrt{-\gamma}}{\partial\xi^i\partial\xi^j} + \Gamma^p_{ij}\frac{\partial\ln\sqrt{-\gamma}}{\partial\xi^p} - \Gamma^p_{ih}\Gamma^h_{pj}$$
を用いてリッチテンソル R_{11} を計算し直し，定理 8.3 の証明で得た値と一致することを確認せよ．
4. 球対称の弱い重力場について，球座標をとった場合のクリストッフェルの記号 Γ^h_{ij} を求めよ．（注: ゼロでないのものは，シュヴァルツシルト計量の場合と同じである）．
5. 球対称の弱い重力場について，測地線方程式をオーダー $1/c^2$ まで求めよ．
6. この練習問題では，**測地線**とは，球対称の弱い重力場のもとでの測地線方程式のオーダー $1/c^2$ までの解のことを意味する．
   (a) 動径方向の直線が測地線であること，すなわち，任意の定数 $\bar\varphi$ と $\bar\theta$ に対して，
$$\mathbb{X}(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \bar\varphi, \bar\theta)$$
が，適当な関数 $t(\tau)$ と $r(\tau)$ を選ぶと，（オーダー $1/c^2$ までで）測地線方程式の解になることを示せ．（関数 $t(\tau)$ と $r(\tau)$ についての方程式を解く必要はない．）
   (b) 赤道面 $\varphi = \pi/2$ から出発する測地線は，赤道面内にとどまることを示せ．すなわち，$\mathbb{X}(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \varphi(\tau), \theta(\tau))$ が測地線で
$$\varphi(0) = \pi/2 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{d\varphi}{d\tau}(0) = 0$$

を満たすならば，任意の τ に対して $\varphi(\tau) = \pi/2$ であることを示せ．また，他の初期値，たとえば $\varphi(0) \neq \pi/2$ の場合には，このことは成り立たないことを示せ．

7. この練習問題の目的は，球対称な弱い重力場のもとでの，オーダー $1/c^2$ の量まで考えた測地線方程式が，赤道面上の円軌道の解を持つことを示すことである．
   (a) 解を，正の定数 $\bar{r}$ を用いて $r = \bar{r}$, $\varphi = \pi/2$ と表す．このとき，座標 t, θ についての測地線方程式から，ある定数 k, ω があって，
   $$\frac{dt}{d\tau} = k, \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = \omega$$
   となることを示せ．
   (b) 問 (a) から，半径 $\bar{r}$ の円軌道の，世界時間での周期 T が，$T = 2\pi k/\omega$ であることを導け．
   (c) 座標 r についての測地線方程式から
   $$\bar{r}^3 = \frac{GMk^2}{\omega^2} = 定数 \times T^2$$
   が導かれることを示せ．これは，惑星の運動に関するケプラーの第 3 法則，軌道周期の 2 乗は軌道半径の 3 乗に比例する，である．

8. 定理 8.4 の証明中に示された，シュヴァルツシルト計量に対するクリストッフェルの記号のうちの 9 個の表式が正しいことを示せ．示されたもの以外のすべてのクリストッフェルの記号がゼロであることを示せ．

9. (a) シュヴァルツシルト計量の行列式を γ とするとき，$\ln\sqrt{-\gamma} = 2\ln r + \ln\sin\varphi + \dfrac{T+Q}{2}$ が成り立つことを示せ．
   (b) 練習問題 3 の R_{ij} の式を用いて，定理 8.4 の証明に現れる R_{00}, R_{11}, R_{22}, and R_{33} の式を確かめよ．また，リッチテンソルの他の成分がすべてゼロであることを示せ．

10. 定理 8.4 の証明中で，関係 $R_{33} = R_{22}\sin^2\varphi$ を導いた．したがって，2 つの条件 $R_{22} = 0$ と $R_{33} = 0$ は独立ではなく，1 番目の条件から 2 番目のものが導かれる．さらに，条件 $R_{22} = 0$ は $R_{00} = R_{11} = 0$ から導かれることを示せ．このことから，真空中の重力場の方程式のうち，たかだか 2 成分だけが独立であることがわかる．

11. (a) シュヴァルツシルト計量に対して，混合リッチテンソル R^i_i の成分が
   $$R^0_0 = e^{-Q}\left(\frac{T''}{2} + \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'Q'}{4} + \frac{T'}{r}\right),$$
   $$R^1_1 = e^{-Q}\left(\frac{T''}{2} + \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'Q'}{4} - \frac{Q'}{r}\right),$$
   $$R^2_2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-Q}}{r^2} - \frac{e^{-Q}}{r}\left(\frac{Q'}{2} - \frac{T'}{2}\right),$$
   $$R^3_3 = R^2_2$$
   で与えられ，その結果，スカラー曲率 R は
   $$R = R^i_i = -\frac{2}{r^2} + e^{-Q}\left(T'' + \frac{(T')^2}{2} - \frac{T'Q'}{2} + \frac{T'}{r} - \frac{Q'}{r} + \frac{2}{r^2}\right)$$

で与えられることを示せ.

(b) 真空中の重力場の方程式を $R^j_i - \frac{1}{2}\delta^j_i R = 0$ という形で用いても，シュヴァルツシルト計量に対して $e^T = 1 + a/r$, $e^Q = e^{-T}$ が導かれることを示せ.

12. (a) シュヴァルツシルト計量に対する測地線方程式を，球座標 $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = (ct, r, \varphi, \theta)$ で求めよ.

(b) 練習問題 6 と同じ意味で，動径方向の直線が測地線であることを示せ.

(c) 赤道面 $\varphi = \pi/2$ から出発する測地線が赤道面内にとどまることを示せ.

13. 練習問題 7 と同じ意味で，シュヴァルツシルト計量のもとで円軌道が存在するかどうかを調べよ．ケプラーの第 3 法則は成り立つか.

14. 関数

$$r = f(\rho) = \rho\left(1 + \frac{r_M}{4\rho}\right)^2$$

を考える.

(a) 性質 $f'(r_M/4) = 0$ および $f(r_M/4) = r_M$ を示せ.

(b) 関数 $f(\rho)$ に対して，$\rho > r_M/4$ のとき $f'(\rho) > 0$ を満たすことを示せ.

(c) 極限 $\rho \to \infty$ で $f(\rho) \to \infty$ となることを示し，写像 $f : [r_M/4, \infty) \to [r_M, \infty)$ が座標変換であること，すなわち，1 対 1 で全射であることの証明を完成せよ.

15. 式

$$\left(\frac{1 - \dfrac{r_M}{4\rho}}{1 + \dfrac{r_M}{4\rho}}\right)^2 = 1 - \frac{r_M}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad \left(1 + \frac{r_M}{4\rho}\right)^4 = 1 + \frac{r_M}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

を示すとともに，これが系 8.1 の証明になっていることを説明せよ.

8.3　光線の屈曲

1907 年から 1916 年まで

早くも 1907 年にアインシュタインは，重力が光の速さを変え，その結果として光線が屈曲することに気づいていた．しかし，この効果はあまりにも小さく，アインシュタインがそのときに想定した，地球上のいかなる実験によっても検出できないほどだった．彼はしばらくこの問題を放置していたが，1911 年に論文 [12] で，太陽の表面近くを通過する星の光の偏向が検出可能であることを指摘し，日食の際にこのずれを測定することを提案した.[注5]

アインシュタインの 1911 年の計算は，一般相対論が提案される以前に行なわれた．この計算では，既に知られていた物理的概念と，4.4 節で考察した重力の相対論的な性質だけが用いられた．そして，アインシュタインは偏向

注 5 訳注：この歴史的経緯については，相対論の正しい間違え方（訳者のノート参照）に詳しい.

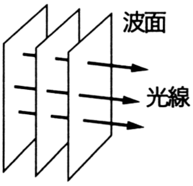
角を 4×10^{-6} ラジアン，すなわち，0.83 秒[注6]と計算した．彼は 1916 年の論文で，ずれの大きさを一般相対論の立場から計算し直し，この 2 倍の大きさの角を得た．1911 年と 1916 年の 2 つの計算では，同じ効果が扱われており，重力の効果を評価する方法だけが異なる．アインシュタインの結果を理解するには，まず，光の速さが場所によって変わるとなぜ光線が曲がるのかを知らなければならない．これは，屈折(refraction)と呼ばれる現象で，非相対論的な物理学と幾何学から理解できる．

速さの変化による偏向

速さが小さくなると光は曲がる

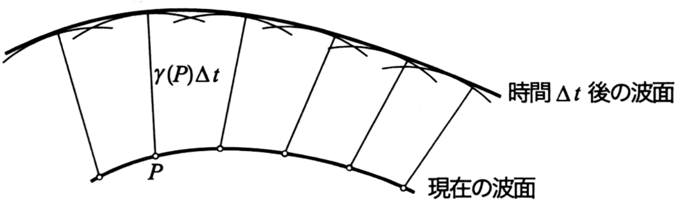
真空中の光の速さ $c = 2.998 \times 10^8$ メートル毎秒は，速さの理論的な上限である．光の速さは，空気中やガラスのなかでは遅くなる．それればかりか，空気の温度やガラスの種類によっても変化する．以下で述べるホイヘンス(Huygens)の原理に基づく議論によれば，光を曲げるのは光の速さの変化にほかならない．したがって，重力場**もまた**光の速さを変化させるということを立証すれば，その議論を用いて，重力場が光をどの程度曲げるかも求められる．

光を波と考えると，**波面**(wave front)，すなわち様々な時刻における波の“山”の位置を表す曲面の集団として描くことができる．また，光を光子の集団と考えると，**光線**(light ray)，すなわち光子の経路として描くことができる．最も単純な場合には，波面は互いに平行な平面からなり，光線は波面に垂直な直線である．しかし，一般の場合には，波面は平面でなく曲面である．このときには，光線は曲線を描いて進むが，やはり各点で波面に垂直である．



ホイヘンスの原理

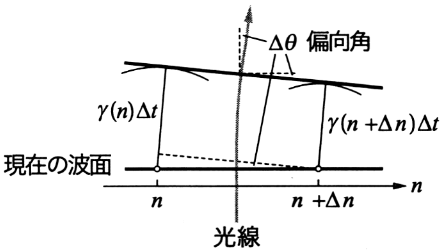
したがって，光線がどのように曲がるかを知るには，波面が空間をどのように伝播していくかを知ればよい．ある瞬間 $t = t_0$ の波面の位置を知っていたとしよう．少し後の時刻 $t = t_0 + \Delta t$ には，波面はどこにあるだろうか？ もし波面が平面で，光の速さが一定の値 γ であるなら，新しい波面は，もとの波面と平行で距離 $\gamma \Delta t$ だけ離れた平面である．しかし，波面が曲面で，光の速さが空間の各点で異なる場合には，**ホイヘンスの原理**(Huygens' principle)を用いる．この原理では，現在の波面上の各点 $P = (x, y, z)$ が光源になると考える．この点での光の速さを $\gamma(P)$ とすると，Δt 秒後には，P から放出された光は P を中心とする半径 $\gamma(P)\Delta t$ の球面状の波面を形成する．各光源の作るこれらの球面の**包絡面**(envelope)が，時間 Δt 後の波面全体となる．



ここで，光の速さ $\gamma(P)$ が点 P とともに滑らかに変化するような領域を光線が通過するとしよう．知りたいのは，このときに光線が向きをどのように

[注6] 訳注：角の大きさの単位．1 度=60 分，1 分=60 秒．

変えるかである．紙面の平面内に，光線と，それに垂直な波面の一部分を描こう．ここで，n 軸を光線の法線方向にとり，n と $n+\Delta n$ とを波面上のわずかに離れた2点の座標とする．微小時間 Δt 後の波面は，これら2点を中心とする，それぞれ半径 $\gamma(n)\Delta t$ と $\gamma(n+\Delta n)\Delta t$ の球面に接している．



偏向角の計算

時間 Δt の間に光線に生じる偏向角 $\Delta\theta$ は，波面の向きの変化と等しい．この角は非常に小さく，

$$\Delta\theta \approx \sin\Delta\theta = \frac{\gamma(n)\Delta t - \gamma(n+\Delta n)\Delta t}{\Delta n}$$

と近似できる．したがって，極限 $\Delta t \to 0$, $\Delta n \to 0$ では，

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial\gamma}{\partial n}$$

となる．光線の**曲率**は，光の経路である曲線の弧長 s による微分 $d\theta/ds$ で与えられる．しかし，偏向は極めて小さいので，弧長は本質的に $s = ct(1+O(1/c))$ と考えられ，$ct = s(1+O(1/c))$ としてよい．よって，練習問題1で示すように

$$曲率 = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d\theta}{dt} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial n} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

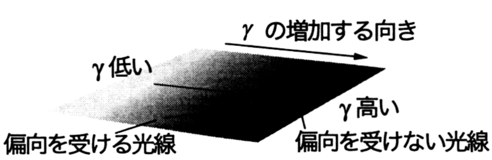
である．結局，光線の向きの変化率は，光線の法線方向への光の速さが減少率に比例する．

光線は速さが遅くなる側に曲がる

この現象は光の屈折であり，以下のように考えることができる．任意の単位ベクトル $\mathbf{n}$ に対して，量 γ の $\mathbf{n}$ 方向への変化率は，γ の勾配 $\nabla\gamma$ を用いて，

$$\frac{\partial\gamma}{\partial n} = \mathbf{n}\cdot\nabla\gamma$$

で与えられる．下の図では，光の速さ γ は，紙面に垂直な方向には一定で，紙面内の縦方向では一定，横方向では左から右に増加する場合を考えている．この場合には，勾配 $\nabla\gamma$ は平面内の右向きのベクトルである．手前から奥に向かう光線の法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると，$\mathbf{n}\cdot\nabla\gamma$ は正であり，光線は左に曲がる．もう1つの横向きに進む光線については，$\mathbf{n}\cdot\nabla\gamma = 0$ であり，こちらの光線は偏向しない．



1911 年の計算

時空の各点における光の速さは，その点で時計がどのくらい速く進むかで決まる．重力場があって，2 人の観測者 G と C が，重力ポテンシャルの差が $\Delta\Phi$ だけあるような 2 点に位置する場合，C が測ると ΔT 秒であるような時間間隔は，G が測ると

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)\Delta T \text{ 秒}$$

になることを 4.4 節で見た．このことは，もともとは一様重力場を仮定して導かれたのだが，実は，非常に一般的に成立する事実である．ここでは特に，Φ が太陽の作るニュートン的重力ポテンシャル

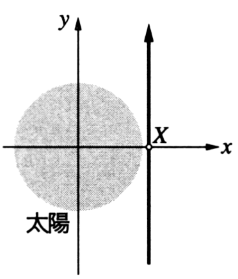
$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

である場合を考える．ここで，r は太陽の中心からメートルで測った距離，$M = 2 \times 10^{30}$ kg は太陽の質量である．観測者 C は無限遠にいて，重力ポテンシャルは $\Phi = 0$，真空中の光の速さは標準的な値 $c = 3 \times 10^8$ m/s だと仮定する．すると，太陽の中心から距離 r の点では，光の速さは，オーダー $O(1/c^3)$ の項を無視すれば

$$\gamma(r) = \frac{c}{1 - (\Phi/c^2)} = c\left(1 + \frac{\Phi}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right) = c - \frac{GM}{cr}$$

である．

光線として，（重力の偏向を受けなければ）(x, y) 平面内を y 軸に平行に進み，太陽の中心からの距離が X の点を通過するものを考える．この光線が，重力により (x, y) 平面内で偏向を受けたとき，総偏向角は，曲率の積分で次のように与えられる．



$$\text{総偏向角} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{ds}\,dy = -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\,dy$$

ただし，この式はオーダー $O(1/c^2)$ の項を無視したときに正しい式である．光線の法線と x 軸の向きの差はオーダー $O(1/c)$ 程度なので，上の式では，$\partial\gamma/\partial n$ を $\partial\gamma/\partial x$ で置き換えてある．この量は，光線の経路の上では，

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{GMx}{cr^3} = \frac{GMX}{cr^3} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

なので，

$$\text{全偏向角} = -\frac{GMX}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(X^2 + y^2)^{3/2}}$$

である．この積分は，変数変換 $y = X\tan u$ で評価でき，

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{X^2}\,du = \frac{2}{X^2}$$

となるので，

$$\text{全偏向角} = -\frac{2GM}{c^2X}$$

と求められる．この角が最も大きくなるのは，光線が太陽の表面をかすめる場合であり，このときには

$$X = \text{太陽の半径} = 7 \times 10^8\ \mathrm{m}$$

なので，偏向の大きさは

$$\frac{2GM}{c^2X} = \frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2})(2 \times 10^{30}\ \mathrm{kg})}{(3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2(7 \times 10^8\ \mathrm{m})} = 4.2328{\times}10^{-6}\ \text{ラジアン}$$

となる．これは，

$$4.2328 \times 10^{-6}\ \text{ラジアン} \times \frac{180\ \text{度}}{\pi\ \text{ラジアン}} \times \frac{60\ \text{分}}{1\ \text{度}} \times \frac{60\ \text{秒}}{1\ \text{分}} = 0.873\ \text{秒}$$

と換算できる．アインシュタインは近似値 4×10^{-6} ラジアンを採用し，0.83 秒という偏向角を得た．

1916 年の計算

アインシュタインの 1916 年の計算 [10] は，前節で導いた，太陽の作る相対論的な重力場に基づくものである．座標系 $R : (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ で，この重力場の計量は，オーダー $O(1/c^3)$ の項を無視して，

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{\alpha}(dx^{\alpha})^2 - \frac{2GM}{rc^2}\left((dx^0)^2 + \sum_{\alpha,\beta}\frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^2}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}\right)$$

となる．この計量から，時空の各点での光の速さ γ を求める．

座標系 R での，時間 t で助変数表示された物体の世界線を $\mathbb{X}(t) = (ct, x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ とする．仮に計量がミンコフスキ計量だったとすると，物体の普通の意味の速さを v として，

$$\|\mathbb{X}'\|^2 = c^2 - \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2$$

となる．したがって，この物体が質量のない光子であるなら，$\|\mathbb{X}'\|^2 = 0$ から期待通り $v = \gamma = c$ が導かれる．

太陽の作る重力場の計量に戻って考えると，同じ世界線 $\mathbb{X}(t)$ について，オーダー $O(1/c^2)$ の項を無視すると，

$$0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - \underbrace{\sum_{\alpha}\left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right)^2}_{\gamma^2} - \frac{2GM}{rc^2}\left(c^2 + \sum_{\alpha,\beta}\frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^2}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right)$$

となる．よって，同じオーダーで

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= c^2 - \frac{2GM}{rc^2}\left(c^2 + \sum_{\alpha,\beta}\frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^2}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right)\\ &= c^2\left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\left(1 + \sum_{\alpha,\beta}\frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^2c^2}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right)\right]\end{aligned}$$

と求められる．平方根をとり，$\sqrt{1-2A}=1-A$ を用いると（すなわち，A^2 のオーダーの項を無視すると），

$$\gamma = c\left(1-\frac{GM}{rc^2}\left(1+\sum_{\alpha,\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^2c^2}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\right)\right)$$
$$= c-\frac{GM}{rc}-\underbrace{\frac{GM}{rc}\sum_{\alpha,\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^2c^2}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}}_{\text{1911 年の計算に対する補正}}$$

が得られる．最初の 2 項だけをとると，アインシュタインが 1911 年に求めた γ の値と正確に一致する．したがって，残りの和の項が，重力の効果を完全に取り入れたことによる補正項であると考えられる．以下で見るように，補正項のうちの 1 つは，1911 年の結果である GM/rc と同じオーダーの大きさを持っている．

偏向を受けなければ，(x,y) 平面上で，y 軸から距離 X だけ離れた y 軸に平行な直線上を進む光子を考える．この世界線 $\mathbb{X}$ 上での γ を求めよう．**偏向を受けない場合の**世界線は

$$\mathbb{X}(t)=(ct,X,ct,0)$$

と助変数表示できる．これが偏向を受けても，オーダーの低い量しか変化せず，

$$\mathbb{X}(t)=\left(ct,X+O\left(\frac{1}{c}\right),ct+O(1),0\right)$$

である．ここで，x^3 すなわち z 成分は，偏向を受けてもゼロのまま変らないとした．練習問題 2 で，このこと，すなわち $\mathbb{X}(t)$ と $\mathbb{X}'(t)$ の x^3 成分が最初にゼロなら，すべての時刻 t でゼロのままとどまることを示す．光子の 4 元速度は

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt}=\left(c,O\left(\frac{1}{c}\right),c+O(1),0\right)$$

すなわち

$$\frac{dx^1}{dt}=O\left(\frac{1}{c}\right),\qquad \frac{dx^2}{dt}=c+O(1),\qquad \frac{dx^3}{dt}=0$$

である．これらの値を γ の式に代入し $O(1/c^2)$ の項を無視すると，

$$\gamma=c-\frac{GM}{cr}-\frac{GM(x^2)^2}{cr^3}$$

が得られる．

全偏向角は，1911 年の計算とまったく同様に，オーダー $O(1/c^2)$ の正確さで，曲率の積分

$$\text{全偏向角}=-\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\gamma}{\partial x^1}\,dx^2$$

に等しくなる．ここで，オーダー $O(1/c)$ で

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x^1}=\frac{GMx^1}{cr^3}+\frac{3GMx^1(x^2)^2}{cr^5}=\frac{GMX}{c(X^2+y^2)^{3/2}}+\frac{3GMXy^2}{c(X^2+y^2)^{5/2}}$$

である．この式を導くのに，世界線上で

$$x^1 = X + O\left(\frac{1}{c}\right), \qquad r^2 = X^2 + (x^2)^2 + O\left(\frac{1}{c}\right) = X^2 + y^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$$

であることを用いた．したがって，全偏向角は，

$$-\frac{GMX}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(X^2+y^2)^{3/2}} - \frac{GMX}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3y^2\,dy}{(X^2+y^2)^{5/2}} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

となる．この第 1 項は 1911 年の計算結果に一致する．第 2 項が新しい項であるが，第 1 項と同じオーダーの大きさである．変数変換 $y = X\tan u$ によって，第 2 項の積分は

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{3\sin^2 u\cos u}{X^2}\,du = \frac{2}{X^2}$$

と計算できる．この値は，第 1 項の積分と同じ値であり，1916 年の計算結果は 1911 年の計算結果の 2 倍，すなわち

$$\text{全偏向角} = -\frac{4GM}{c^2X} = 1.75\ \text{秒}$$

となる．

最後に，アインシュタインの弱場の計量は漸近慣性的なので，上で求めた偏向角は，遠方の恒星に対して固定された座標系で測ったものと考えることができる．

練習問題

1. 関係 $s = ct(1+O(1/c))$ が成り立つとき，$ct = s(1+O(1/c))$ を示し，このことから，

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}\left(1+O\left(\frac{1}{c}\right)\right) = \frac{1}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

を示せ．この結果を用いて，光線の曲率が

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d\theta}{dt} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial n} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

であることを示せ．

2. 球対称の弱い重力場のもとでの測地線 $\mathbb{X}(t) = (ct, x(t), y(t), z(t))$ が，条件 $z(0) = z'(0) = 0$ を満たすとする．このとき，すべての t に対して $z(t) = 0$ であることを示せ．

3. 等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(X^2+y^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{3y^2\,dy}{(X^2+y^2)^{5/2}} = \frac{2}{X^2}$$

を確かめよ．

8.4　近日点移動

惑星の軌道の摂動　ニュートン力学は，太陽を回る惑星の軌道は楕円—他の惑星の影響を無視

すれば—であると予言する．もちろん，他の惑星の影響を無視することはできない．この影響で軌道はずれ，時間が十分に経過すると，このずれはかなり大きくなる．最も内側を回る惑星，水星は，特にこの効果に敏感である．軌道周期は 88 日と短く，軌道の形は比較的細長い．軌道のずれの 1 つのタイプは，ゆっくりとした近日点の移動である．この移動が，ニュートン力学の予言よりも，角度にして 1 世紀あたり約 43 秒だけ大きすぎることが，1859 年にはすでに観測からわかっていた．この 10 年ほど前には，天王星の軌道についての，理論の予言と観測の不一致から海王星が発見されていたので，水星の近日点移動の説明のつかない部分も，未発見の惑星—ヴァルカン (Vulcan) という名前まで用意されていた—の影響として説明できると考えられたのは自然なことだった．結局，ヴァルカンが発見されることはなかったが，その探索は，1916 年に，アインシュタインが，彼の新しい重力理論が近日点移動を説明できることを示すまで続いた．

楕円

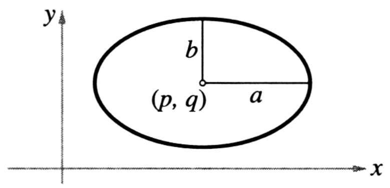
デカルト座標での楕円の方程式

天体力学で楕円軌道を記述するには，極座標を用いた方程式

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta}$$

を用いるのが自然である．しかし私達は，デカルト座標を用いた方程式

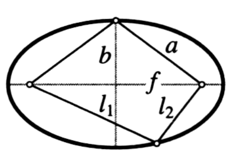
$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$



の方を見慣れている．この方程式は，中心が $(x, y) = (p, q)$ であり，**長半径** (semimajor axis), **短半径** (semiminor axis) がそれぞれ a, b であるような楕円を表している ($a \geq b$ の場合)．デカルト座標と極座標での方程式の間の関係をつけると同時に，これらの式から楕円の幾何学的特徴を引き出す必要がある．

焦点と離心率

幾何学的には，楕円とは，**焦点** (focus) と呼ばれる決まった 2 点との間の距離の和が一定であるような点の軌跡である．長軸と楕円の交点を考えてみると，この距離の和は，長軸の長さ $2a$ に等しくなければならないことがわかる．また，短軸と楕円の交点を考えると，長さ f を一方の焦点と中心の間の距離として，$a^2 = b^2 + f^2$ が成り立たなければならないことがわかる．ここで，楕円の**離心率** (eccentricity) を，比



$$\text{離心率: } e = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

で定義する．もし $e = 0$ ならば $f = 0$ であり，2 つの焦点が一致して，楕円

は単なる真円になる．また $e=1$ ならば $b=0$ であり，楕円はつぶれて線分になる．つまり，楕円が真円とどの程度異なるかが離心率によって測られる．

極座標で書かれた方程式

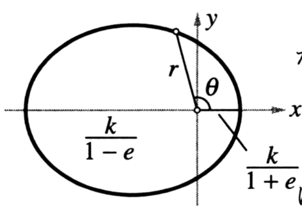
命題 8.2 極座標での方程式 $r = k/(1+e\cos\theta)$ で，$0 < e < 1$ であるとき，この方程式は，長軸が x 軸上にある楕円を表す．楕円の離心率は e で，焦点の一方は原点にある．長半径と短半径はそれぞれ，$a = k/(1-e^2)$ と $b = k/\sqrt{1-e^2}$ である．楕円上の点と原点の間の距離の最小値と最大値はそれぞれ，$k/(1+e)$ と $k/(1-e)$ である．

証明： 与えられた方程式を，$r + er\cos\theta = r + ex = k$ すなわち $r = k - ex$ と書き直す．この両辺を 2 乗すると，

$$x^2 + y^2 = r^2 = k^2 - 2kex + e^2x^2$$

となるが，これを平方完成すると，

$$(1-e^2)\left(x^2 + \frac{2ke}{1-e^2}x + \frac{k^2e^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 = k^2 + \frac{k^2e^2}{1-e^2} = \frac{k^2}{1-e^2}$$



が得られる．これはデカルト座標での楕円の方程式の標準形

$$\frac{1}{k^2/(1-e^2)^2}\left(x + \frac{ke}{1-e^2}\right)^2 + \frac{1}{k^2/(1-e^2)}y^2 = 1$$

になるので，この方程式を満たす点の軌跡は，中心が $(p,q) = (-ke/(1-e^2), 0)$ で，長半径と短半径がそれぞれ $a = k/(1-e^2)$, $b = k/\sqrt{1-e^2}$ であり楕円である．さらに，$b/a = \sqrt{1-e^2}$ より，

$$\text{離心率} = \sqrt{1-(1-e^2)} = e$$

である．楕円の中心は $p = -ke/(1-e^2)$ にあり，中心から焦点までの距離は

$$f = ea = e\frac{k}{1-e^2} = -p$$

なので，焦点のうちの 1 つは原点にある．楕円の周上の点は，$\theta = 0$ で中心からの距離が最小値 $r = k/(1+e)$ をとり，$\theta = \pi$ で最大値 $r = k/(1-e)$ をとる．　**証明終**

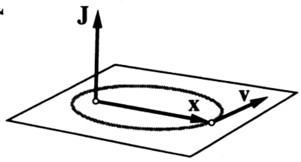
非相対論的軌道

太陽だけが重力を及ぼすと仮定し，ニュートン力学に基づいて惑星の運動を決定しよう．太陽の中心を原点とし，時刻 t における惑星の位置を $\mathbf{x} = (x, y, z)$ とすると，運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{x}, \qquad r = \|\mathbf{x}\|$$

である (4.3 節参照)．ここで，変数の上の点は t についての微分を表すというよく用いられる記法を採用した．また，M は太陽の質量，G は重力定数を表す．関数 $\mathbf{x}(t)$ は各瞬間における惑星の位置を表すが，ここでは，そこまで詳

しい情報は必要なく，知りたいのは軌道の形だけである．このことから，以下では，軌道の助変数表示 $\mathbf{x}(t)$ そのものでなく極座標における軌跡の方程式を求めることを目標にする．



速度ベクトルを $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ と定義すると，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \frac{GM}{r^3}(\mathbf{x} \times \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

となることがわかる．したがって，ベクトル $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ は時間によらずに一定であり，惑星の**角運動量**(angular momentum)と呼ばれる．特に，$\mathbf{x}$ は常に $\mathbf{J}$ に垂直な平面内にある．つまり，惑星はその平面内を運動する．

適当に座標系を回転させると，惑星の運動は (x, y) 平面で起きると考えてよい．そこで，この平面の極座標を (r, θ) とすると，デカルト座標との間には

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

という関係がある．軌道を表す関数 $r = r(\theta)$ を見つけるための第一段階として，まず角運動量ベクトルの各成分を極座標で表すと，

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{x} \times \mathbf{v} \\ &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \times (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, 0) \\ &= (0, 0, r^2\dot{\theta})\end{aligned}$$

となる．つまり，角運動量の大きさは $r^2\dot{\theta} = J = \|\mathbf{J}\|$ であり，これは運動の定数である．

極座標での運動方程式

次の段階として，運動方程式を動径座標 r で書き直す．定義式 $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ の両辺を t で微分して $2r\dot{r} = 2\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ すなわち $r\dot{r} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$ を得る．もう一度 t で微分し，$\mu = GM$ とおくと，

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{v}} = v^2 - \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = v^2 - \frac{\mu}{r}$$

となる．任意のベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ に対して $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 + \|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\|^2 = p^2q^2$ が成立するので，特に，

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})^2 + \|\mathbf{x} \times \mathbf{v}\|^2 = (r\dot{r})^2 + J^2 = r^2v^2$$

が成立する．したがって，$v^2 = \dot{r}^2 + J^2/r^2$ であり，運動方程式は，

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{\mu}{r}, \qquad \text{すなわち} \qquad r\ddot{r} = \frac{J^2}{r^2} - \frac{\mu}{r}$$

となる．

この方程式の解を求めるのには，変数変換 $r = 1/u$ を行った方が見通しがよい．そして，r を t の関数でなく θ の関数として表すという方針にしたがって，

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -J\frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= -J\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -J\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{J}{r^2} = -J^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}\end{aligned}$$

と書き直す．したがって，u と θ を用いて運動方程式を

$$\frac{1}{u}\left(-J^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)=J^2u^2-\mu u$$

あるいは単に

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{J^2}$$

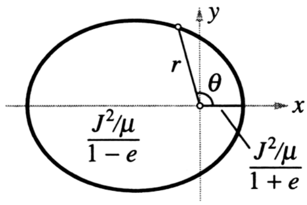
という形にできる．この微分方程式の解は

$$u(\theta)=\frac{\mu}{J^2}+A\cos(\theta-\alpha)$$

と求められる．余弦関数の項の振幅 A と初期位相 α は任意定数である．この初期位相は，軌道上で $t=0$ における惑星の位置を変更するだけであり，現在の解析では軌道の形だけに興味があるので，$\alpha=0$ とおいて構わない．定数 $e=AJ^2/\mu$ を導入すると，上の解は

$$u=\frac{\mu}{J^2}(1+e\cos\theta),\qquad \text{すなわち}\qquad r=\frac{J^2/\mu}{1+e\cos\theta}$$

となる．これは，原点を焦点とする円錐曲線の，極座標での方程式である．定数 e が $0<e<1$ を満たすとき，この円錐曲線は，離心率 e, 近日点距離 $J^2/\mu(1+e)$ の楕円になる．近日点は，θ が 2π の整数倍の場所にある．



相対論的軌道

シュヴァルツシルト計量

太陽の作る相対論的な重力場がシュヴァルツシルト計量

$$ds^2=c^2\left(1-\frac{2\mu}{c^2r}\right)dt^2-\frac{1}{1-(2\mu/c^2r)}dr^2-r^2(d\varphi^2+\sin^2\varphi\, d\theta^2)$$

で表せると仮定しよう．惑星の軌道を，時間的測地線 $\mathbb{X}(\tau)=(t(\tau),r(\tau),\varphi(\tau),\theta(\tau))$ とする．ここで，記号 t, r, θ, $\mu=GM$ は非相対論的な場合と同じ意味に使う．

赤道面内の運動

解のなかでも，運動が (x,y) 平面内で起きるものを見つけよう．これは，球座標では $\varphi=\pi/2$ を満たす解である．練習問題 7 で，$\varphi(0)=\pi/2$ かつ $\varphi'(0)=0$ であるような測地線は，**すべての時刻** τ について $\varphi(\tau)=\pi/2$ であることを示す．(プライム記号 $'$ は固有時間 τ についての微分を表す.) 残りの変数についての測地線方程式を考えよう．まず，θ については，

$$\theta''=-2\Gamma^3_{13}r'\theta'=-\frac{2}{r}r'\theta'$$

角運動量

である．これは，$r^2\theta''+2rr'\theta'=(r^2\theta')'=0$ と変形できるので，$r^2\theta'$ が定数であることがわかる．変数 τ を t と読み替えると，この量は，非相対論的な場合の角運動量 J にほかならない．そこで，$r^2\theta'=J$ とおく．

変数 t についての測地線方程式は，

$$t'' = -2\Gamma^0_{01} t'r' = -\frac{2\mu}{c^2r^2}\frac{1}{1-(2\mu/c^2r)}t'r'$$

である．こちらも，ある量の導関数がゼロという形

$$\left(1-\frac{2\mu}{c^2r}\right)t'' + \frac{2\mu}{c^2r^2}t'r' = \left(\left(1-\frac{2\mu}{c^2r}\right)t'\right)' = 0$$

に書き直せる．したがって，ある定数 A により，

$$\left(1-\frac{2\mu}{c^2r}\right)t' = A, \qquad \text{すなわち} \qquad t' = \frac{A}{1-(2\mu/c^2r)}$$

である．

r についての方程式

変数 r についての運動方程式を求めるには，測地線方程式でなく，計量についての条件そのものを使おう．計量は $ds^2 = c^2d\tau^2$ とも書けるので，

$$c^2 = c^2\left(1-\frac{2\mu}{c^2r}\right)(t')^2 - \frac{1}{1-(2\mu/c^2r)}(r')^2 - r^2(\theta')^2$$

が成立する．ここでは，この運動について $\varphi(\tau) \equiv \pi/2$ より $\varphi' = 0$, $\sin^2\varphi = 1$ であることを用いた．この式に，上で求めた t' の式を代入し，また

$$r' = \frac{dr}{d\theta}\theta'$$

と置き換えると，

$$\begin{aligned} c^2 &= c^2\frac{A^2}{1-(2\mu/c^2r)} - \frac{1}{1-(2\mu/c^2r)}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2(\theta')^2 - r^2(\theta')^2 \\ &= c^2\frac{A^2}{1-(2\mu/c^2r)} - \frac{1}{1-(2\mu/c^2r)}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{J^2}{r^4} - \frac{J^2}{r^2} \end{aligned}$$

となる．両辺に $1-(2\mu/c^2r)$ をかけて左辺を整理すると

$$c^2 - \frac{2\mu}{r} = c^2A^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{J^2}{r^4} - \frac{J^2}{r^2}\left(1-\frac{2\mu}{c^2r}\right)$$

を得る．非相対論的な場合と同様に $u = 1/r$ についての式に書き直すと，

$$c^2 - 2\mu u = c^2A^2 - J^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - J^2u^2\left(1-\frac{2\mu}{c^2}u\right)$$

であり，さらに，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2}{2} = \frac{c^2(A^2-1)}{2J^2} + \frac{\mu}{J^2}u + \frac{\mu}{c^2}u^3$$

となる．この式をさらに変形して，非相対論的な場合と似た形にしよう．まず，両辺を θ で微分して，

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\frac{du}{d\theta} = \frac{\mu}{J^2}\frac{du}{d\theta} + 3\frac{\mu}{c^2}u^2\frac{du}{d\theta}$$

と変形し，さらに，両辺を $\dfrac{du}{d\theta}$ で割ると

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{J^2} + \underbrace{3\frac{\mu}{c^2}u^2}_{\text{補正}}$$

となる．量 J がわずかに異なる値をとることを除けば，この方程式は，ニュートンの運動方程式にオーダー $O(1/c^2)$ の補正項を加えただけのものである．

非相対論的な解の摂動

相対論的な方程式とニュートンの方程式の差は小さな項だけなので，相対論的な解とニュートン的な解の差も同様に小さな項だけになると予測できる．そこで，解が

$$u(\theta) = \frac{\mu}{J^2}(1 + e\cos\theta) + \frac{v(\theta)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

という形になると仮定しよう．目標は，$u(\theta)$ が実際にこの形になることを示し，さらに，差の項 $v(\theta)$ を決定することである．この形を上で求めた u に対する微分方程式に代入すると，v に対する微分方程式

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + v\right) = \frac{3\mu^3}{c^2J^4}(1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta) + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

を得る．これを恒等式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いて変形すると

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + v = \frac{3\mu^3}{J^4}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{6e\mu^3}{J^4}\cos\theta + \frac{3e^2\mu^3}{2J^4}\cos 2\theta + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

である．オーダー $O(1/c^2)$ の項を無視すると，これは，v に対する 2 階の微分方程式で，

$$L(v) = A + B + C$$

という形になっている．ここで，$L(v) = v'' + v$ である．よって，v_A, v_B, v_C をそれぞれ，別々の方程式 $L(v) = A$, $L(v) = B$, $L(v) = C$ に対する特解とすると，重ね合せ $v = v_A + v_B + v_C$ がもとの方程式 $L(v) = A + B + C$ の特解になる．この 3 個の方程式の解としては，

$$v_A = \frac{3\mu^3}{J^4}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right), \qquad v_B = \frac{3e\mu^3}{J^4}\theta\sin\theta, \qquad v_C = -\frac{e^2\mu^3}{2J^4}\cos 2\theta$$

がとれることが確かめられる．よって，もとの微分方程式の解は

$$u = \frac{\mu}{J^2}(1 + e\cos\theta) + \frac{3\mu^3}{c^2J^4}\left(1 + \frac{e^2}{2} + e\theta\sin\theta - \frac{e^2}{6}\cos 2\theta\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

無視できない 1 項

である．新しく付け加わった項の中では，$e\theta\sin\theta$ だけが(因子 θ のために)周期的でなく，$u(\theta)$ に対するこの項の効果だけは，時間とともに累積していく．このことを確かめるために，この非周期項を，ニュートン近似による解のほうに移動して，係数を $D = 3\mu^2/c^2J^2$ としたもの

$$u = \frac{\mu}{J^2}(1 + e\cos\theta + eD\theta\sin\theta) + \frac{3\mu^3}{c^2J^4}\left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6}\cos 2\theta\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

を調べてみよう．3 角関数の加法定理から，

$$e\cos(\theta - D\theta) = e\cos\theta\cos D\theta + e\sin\theta\sin D\theta$$

であり，また，$\cos D\theta = 1 + O(D^2)$,$\sin D\theta = D\theta + O(D^3)$ なので，

$$e\cos(\theta-D\theta)=e\cos\theta+eD\theta\sin\theta+O(D^2)=e\cos\theta+eD\theta\sin\theta+O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

と評価できる．これを使って，解を

$$u(\theta)=\frac{\mu}{J^2}(1+e\cos(\theta-D\theta))+\underbrace{\frac{3\mu^3}{c^2J^4}\left(1+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{6}\cos 2\theta\right)+O\left(\frac{1}{c^4}\right)}_{\text{無視できる累積効果}}$$

と表すと，相対論的効果は，項 $\cos(\theta-D\theta)$ だけに含まれる．

近日点の角 θ は $\cos(\theta-D\theta)=1$ を満たす．これを解くと $\theta-D\theta=(1-D)\theta=2n\pi$ となり，近日点の方向が

$$\theta=\frac{2n\pi}{1-D}=2n\pi(1+D+O(D^2))=2n\pi+2n\pi D+O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

であることがわかる．したがって，近日点の方向の角度 θ は，公転 1 回ごとに，角

$$2\pi D=\frac{6\pi\mu^2}{c^2J^2}$$

ずつ**増加する**. 非相対論的な軌道の長半径は

$$a=\frac{J^2/\mu}{1-e^2}$$

なので（なぜか？），上の増加は，観測可能な量を用いて

$$2\pi D=\frac{6\pi\mu}{c^2a(1-e^2)}=\frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)}$$

と表せる．水星については，$a=57.9\times10^9$ メートル，$e=0.2056$，よって，$1-e^2=0.9577$ という値が知られている．地球上の 1 世紀は，36,525（地球）日からなり，水星の公転周期は約 88（地球）日なので，水星の，1 世紀の間の公転回数は $36525/88=415$ 周である．したがって，1 世紀間の，近日点の方位角の増加は，

$$\begin{aligned}415\times\frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)}&=\frac{(2490\pi)(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(2\times10^{30}\ \mathrm{kg})}{(3\times10^8\ \mathrm{m/s})^2(57.9\times10^9\ \mathrm{m})(0.9577)}\\&=2.09\times10^{-4}\ \text{ラジアン}\\&=43\ \text{秒}\end{aligned}$$

である．これが，一般相対論に関する 1916 年のアインシュタインの論文の中で，最後に導かれている結果である．最後の段落を引用しよう [10, p. 164].[注7]

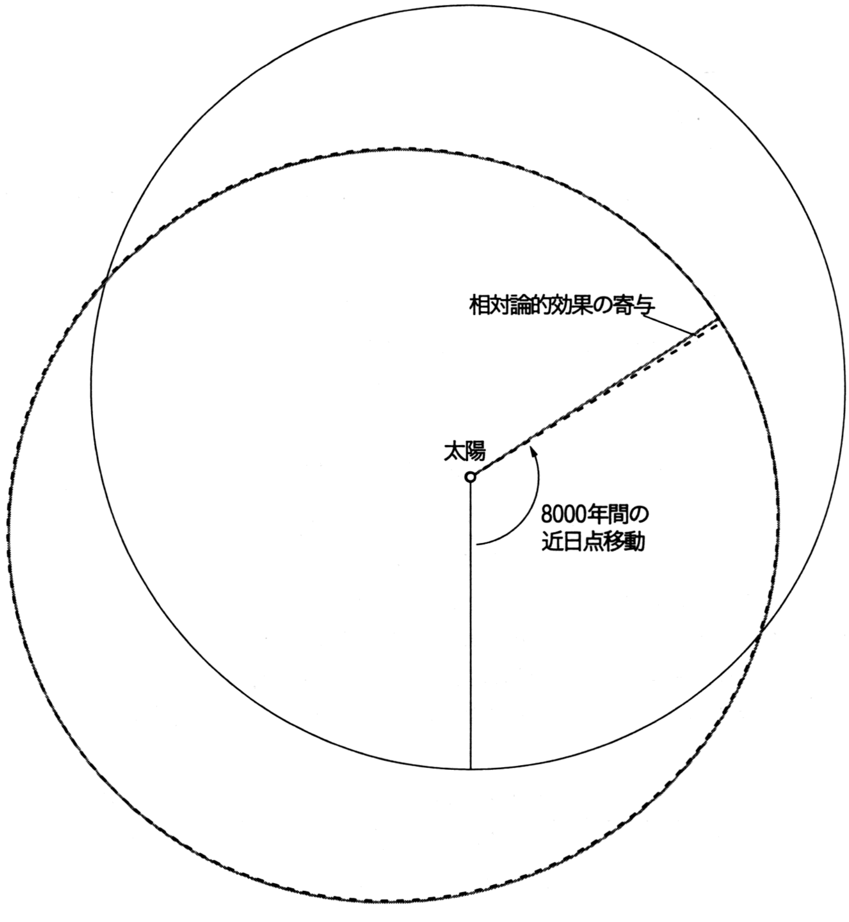
> 水星についての計算からは，その軌道は 1 世紀に角度にして 43 秒回転するという，天文学的観測（ルヴェリエ）と完全に一致する結果が得られる．天文学者たちによって，この惑星の近日点の運動に他の惑星の影響を考慮しても説明できない量が，ちょうどこの大きさだけあることが見いだされているのである．

近日点移動を描く

実際は，近日点移動の大部分は，観測が非慣性座標系で行われていることに起因する．ニュートン的な重力による "他の惑星の影響" は，その 1/10 だ

[注7] 訳注：和訳については訳者のノート参照．

けである．相対論的な寄与は非常に小さい．80 世紀以上にわたる効果を累積しても，1 度に満たないが，次の図ではそのずれを十分に見ることができる．それに対して，同じ期間に起きる，観測される移動は非常に大きく，1/3 回転ほどにもなる．図は正しい縮尺で描かれ，水星の軌道の離心率も正しく再現されている．非相対論的な寄与(5557 秒毎世紀)だけを取り入れた移動後の軌道の楕円は破線で，正しい(相対論的な)移動後の軌道の楕円は灰色の線で描かれている．



練習問題

1. 空間 $\mathbf{R}^3$ の任意のベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ に対して $p = \|\mathbf{p}\|$, $q = \|\mathbf{q}\|$ とおくと，$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 + \|\mathbf{p}\times\mathbf{q}\|^2 = p^2q^2$ が成り立つことを示せ．
2. この練習問題では曲線 $r = k/(1 + e\cos\theta)$ を考える．
   (a) 条件 $-1 < e < 0$ が満たされるとき，これがどのような曲線であるか詳しく述べよ．

(b) 条件 $e = \pm 1$ が満たされるとき，これがどのような曲線であるか詳しく述べよ．特に，この曲線が離心率 1 の楕円でないことを示せ．

(c) 条件 $e > 1$ または $e < -1$ が満たされるとき，この曲線は双曲線であることを示し，双曲線の中心と漸近線の傾きを求めよ．

3. 非相対論的な惑星の軌道周期 T が，方程式 $J = r^2\dot{\theta}$ を積分することにより，

$$T = \frac{J^3}{\mu^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = Ba^{3/2}$$

と求められることを示せ．ただし，a は長半径，B は定数である．この結果は，比 a^3/T^2 はすべての惑星について共通である，とも言い換えられる．これが**惑星の運動に関するケプラーの第 3 法則**(Kepler's third law of planetary motion)である．

4. 真円が非相対論的な惑星の軌道として許されることを示せ．軌道が真円のとき，惑星は円の中心のまわりに一定の角速度で運動することを示せ．

5. 相対論的な軌道を表す微分方程式は，等式

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\frac{du}{d\theta} = \frac{\mu}{J^2}\frac{du}{d\theta} + 3\frac{\mu}{c^2}u^2\frac{du}{d\theta}$$

の両辺を $du/d\theta$ で割ることにより求められたが，その際，暗黙のうちに $du/d\theta$ が恒等的に 0 ではないということを仮定していた．逆に，$du/d\theta$ が恒等的にゼロであると仮定するとどのような軌道が得られるか．

6. (a) 微分演算子 $L(v) = v'' + v$ が**線型**であること，すなわち，$L(v+w) = L(v) + L(w)$ かつ $L(av) = aL(v)$ を示せ．このことから，v_A が微分方程式 $L(v) = A$ の解で，v_B が $L(v) = B$ の解であるとすると，$v = v_A + v_B$ は $L(v) = A + B$ の解であることを示せ．

(b) 本文 p. 336 の関数 v_A, v_B, v_C が，それぞれ微分方程式 $L(v) = A$, $L(v) = B$, $L(v) = C$ を満たすことを示せ．ただし，

$$A = \frac{3\mu^3}{J^4}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right), \qquad B = \frac{6e\mu^3}{J^4}\cos\theta, \qquad C = \frac{3e^2\mu^3}{2J^4}\cos 2\theta.$$

である．

7. (a) 相対論的軌道に関して，座標 φ についての測地線方程式を書き，$\varphi(\tau) \equiv \pi/2$ が解であることを示せ．

(b) 相対論的軌道が $\varphi(0) = \pi/2$ かつ $\varphi'(0) = 0$ を満たすとき，すべての τ に対して $\varphi(\tau) = \pi/2$ であることを示せ．

8. (a) ある惑星の非相対論的な軌道が，長半径 a, 離心率 e の楕円であり，その軌道周期が T 世紀(地球の年で数えて)であるとする．このとき，近日点移動が，

$$\frac{2\pi D}{T} = \frac{\text{定数}}{a^{5/2}}$$

で与えられることを示せ．

(b) 地球と太陽の距離は，水星と太陽の距離の約 5/2 倍である．地球の軌道の離心率が，水星と同じだったなら，1 世紀あたりの近日点移

動はどれだけになるか．他の惑星の影響は無視して，“相対論的補正” だけから評価せよ．

(c) 引き続き他の惑星の影響を無視する．水星と同程度の近日点移動が起こるためには，地球の軌道の離心率はどの程度でなければならないか．

第8章の内容をより深く知るには

アインシュタインは，一般相対論の基本的論文のまるまる1節 [10, §21] を弱場近似[注8]にあてている．このテーマは，Dubrovin 他 [7] で詳細に扱われている．シュヴァルツシルト解と等方的座標については，Adler 他 [1] を参照．光の屈折は，物理の教科書の標準的な題材であり，例えば教科書 [13] でも扱われている．惑星の軌道運動については，Pollard [27] では非相対論的な理論が簡潔かつ明快に解説されており，Adler 他 [1] と Berry [2] では相対論的な理論が議論されている．

[注8] 訳注：和訳については訳者のノート参照．

参考文献

[1] Ronald Adler, Maurice Bazin, and Menahem Schiffer. *Introduction to General Relativity.* McGraw-Hill, New York, second edition, 1975.

[2] Michael Berry. *Principles of Cosmology and Gravitation.* Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[3] Garrett Birkhoff and Saunders MacLane. *A Survey of Modern Algebra.* Macmillan, New York, second edition, 1953.

[4] Mary L. Boas. *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* John Wiley & Sons, New York, second edition, 1983.

[5] M. Crampin and F. A. E. Pirani. *Applicable Differential Geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[6] C. T. J. Dodson and T. Poston. *Tensor Geometry: The Geometric viewpoint and Its Uses.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] B. A. Dubrovnin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry—Methods and Applications.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[8] A. Einstein. Cosmological considerations on the general theory of relativity. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[9] A. Einstein. Does the inertia of a body depend on its energy-content. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[10] A. Einstein. The foundation of the general theory of relativity. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[11] A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[12] A. Einstein. On the influence of gravitation on the propagation of light. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[13] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1963.

[14] Theodore Frankel. *Gravitational Curvature: An Introduction to Einstein's Theory.* W. H. Freeman, San Francisco, 1979.

[15] Wilhelm Klingenberg. *A Course in Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1978.

[16] Erwin Kreyszig. *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry.* University of Toronto Press, Toronto, 1968.

[17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields.* Pergamon Press, Oxford, 1975.

[18] D. F. Lawden. *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology.* John Wiley & Sons, New York, third edition, 1982.

[19] H. A. Lorentz. Michelson's interference experiment. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[20] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The Principle of Relativity.* Dover, New York, 1952.

[21] F. K. Manasse and C. W. Misner. Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry. *J. Math. Phys.*, 4(6):735–745, June 1963.

[22] John McCleary. *Geometry from a Differentiable Viewpoint.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[23] H. Minkowski. Space and time. In [20], *The Principle of Relativity.* Dover, 1952.

[24] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman, San Francisco, 1973.

[25] Gregory L. Naber. *Spacetime and Singularities.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[26] Abraham Pais. *'Subtle is the Lord... ' The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford University Press, New York, 1982.

[27] Harry Pollard. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.

[28] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. *Spacetime Physics.* W. H. Freeman, San Francisco, 1966.

[29] Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information.* Graphics Press, Cheshire, CT, 1983.

[30] I. M. Yaglom. *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis.* Springer-Verlag, New York, 1979.

訳者のノート

本書は，特殊相対論，一般相対論を一貫した立場で扱った，数学者による，数学志向，物理学志向の読者両方を意識した教科書である．翻訳にあたっては，この特徴を活かすことを心がけたが，どの程度達成できたかは心もとない．至らぬ点をご叱正いただければ幸いである．

また，ユークリッド空間中の曲線，曲面の幾何学について述べた部分は，曲線論，曲面論の初等的な解説ともとらえられる．

また，随所に見られる言葉遊び，言語学的コメントには訳者も楽しませていただいた．

翻訳

この翻訳は原著の第 2 版に基づく．さらに，`http://www.math.smith.edu/~callahan/` で原著者が 2003 年 9 月までに公開している訂正も取り入れている．また，訳者が発見したいくつかの誤りの訂正も，原著者の同意のもとで暫定的に取り入れている．これらについては，今後，原著者が精査して採否を決定する予定である．

表記

用語は，おおむね

日本数学会編，岩波数学辞典 第 3 版，岩波書店，1985.

に従った．

人名は，カタカナ書きが定着しているものはカタカナで，そうでないものは原文のまま，という一貫しない方針をとった．

日本語の参考文献

参考文献に挙げられたもののうち，和訳のあるものを以下に示す．

[3] ガーレット・バーコフ，ソンダース・マクレーン，現代代数学概論–改訂 3 版–，奥川光太郎，辻吉雄訳，白水社，1967.

[13] ファインマン，レイトン，サンズ，ファインマン物理学，全 5 巻，岩波書店 1967.

[17] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，場の古典論：電気力学, 特殊および一般相対性理論(ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)，恒藤敏彦，広重徹訳，東京図書，1978. 原書第

6 版の翻訳
[26] アブラハム・パイス，神は老獪にして…：アインシュタインの人と学問，金子務 [ほか] 訳，監訳: 西島和彦，産業図書，1987.
[28] E. テイラー，J. ホイーラー，時空の物理学：相対性理論への招待，曽我見郁夫，林浩一訳 現代数学社，1991.

論文集 [20] に収められているアインシュタインの論文のうち，[9],[11] は，
アルバート アインシュタイン，アインシュタイン選集 1，井上健，谷川安孝，中村誠太郎訳，共立出版，1971.
にそれぞれ [A2],[A1] として，[8],[10],[12] は，
アルバート アインシュタイン，アインシュタイン選集 2，内山龍雄訳，共立出版，1970.
にそれぞれ [A6],[A3],[A1] として和訳が収められている．

論文 [9],[11],[23] はまた，
物理学史研究刊行会編，相対論(物理学古典論文叢書 4)，東海大学出版会，1969.
に和訳が収められている．

また，本書の 3 章冒頭で言及されているプリンキピアは，和訳
アイザック・ニュートン，プリンシピア：自然哲学の数学的原理, 著；中野猿人訳，講談社，1977
が刊行されている．

以下，本書と近い，あるいは重なる領域を扱う日本語で書かれた教科書をいくつか紹介する．これは網羅的なリストではなく，多くの優れた教科書が洩れていることをお詫びする．

本書のような，数学者の著した，数学の読者を(も)想定した初学者向けの教科書は少ない．この点が，それが日本語の教科書の中で本書を特徴づけるものになっている．

もうすこし範囲を広げると，竹内外史先生，前原昭二先生という，数学基礎論のお 2 人の大家により，特殊相対論の特定の側面を扱った教科書が何冊か著されている．

本書の 5,6 章で扱った曲線と曲面の幾何学に関する初等的な教科書として，
小林昭七，曲線と曲面の微分幾何 改訂版，裳華房，1995.
がある．

以下は，物理学者による教科書である．

本書の 1,2,3 章で扱った特殊相対論を中心とする教科書として，
風間洋一，相対性理論入門講義 (現代物理学入門講義シリーズ 1)，培風館，1997.
がある．

本書の 6 章，7 章で扱った一般相対論を中心とする教科書として，
冨田憲二，相対性理論(パリティ物理学コース)，丸善，1990.
佐々木節，一般相対論(物理学教科書シリーズ)産業図書，1996.
佐藤文隆，小玉英雄，一般相対性理論(現代物理学叢書)，岩波書店，2000.
がある．最後のものは，やや進んだ話題にまで言及している．

本書と同様に，特殊相対論と一般相対論の両方を一貫して扱った教科書として，
小玉英雄，相対性理論(物理学基礎シリーズ 6), 培風館,1997.
B.F. シュッツ，相対論入門(全 2 巻)，丸善，1988.

がある．

本書では，7.3 節，8.2 節でわずかに触れられたアインシュタイン方程式の解とその宇宙論的意味は，それ自身が 1 つの分野をなしている．その教科書として，

成相秀一，冨田憲二著，一般相対論的宇宙論，(物理学選書 19)，裳華房，1988.

がある．

また，特殊相対論，一般相対論，およびその歴史(本書 1.3，8.3，8.4 など)について，独自の語り口を楽しめ，かつ勉強になる本として

松田卓也，木下篤哉，相対論の正しい間違え方(パリティブックス)，丸善，2001.

がある．

翻訳の誤りの指摘，翻訳についてのご意見

翻訳に関して，ご意見，誤りのご指摘などは

hig-gst@bird.math.ryukoku.ac.jp

またはシュプリンガー・フェアラーク東京編集部(〒113-0033 東京都文京区本郷 3-3-13)までお送りいただければ幸いである．ただし，原著に対するご意見については，原著者に直接連絡していただく方が適切かもしれない．

誤りの訂正や改善は，随時

http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/books/

でお知らせする．

謝辞

メールを通じて相談にのってくださった原著者の Professor James J. Callahan，訳者に翻訳の機会を与えてくださった小島定吉先生，セミナーの際に翻訳の誤りを指摘してくれた龍谷大学理工学部数理情報学科の 2001 年度 3 年生の諸君，そして，タイミングをとらえた催促と注意深い指摘で訳者を援助してくださったシュプリンガー・フェアラーク東京の編集部の方々にお礼申し上げる．

索　　引

■ワ行

著　者
J. J. キャラハン（James J. Callahan）
Department of Mathematics
Smith College
Northampton, MA 01063-0001
USA

訳　者
樋口　三郎（ひぐち　さぶろう）
龍谷大学理工学部数理情報学科
専門：理論物理（場の理論と統計力学）

時空の幾何学　特殊および一般相対論の数学的基礎　　**定価（本体 3,800 円＋税）**

発　行　2003 年 11 月 30 日　初　　版
　　　　2005 年　2 月 28 日　初版 3 刷
著　者　J. J. キャラハン
訳　者　樋口　三郎
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
　　　　〒113-0033　東京都文京区本郷 3 丁目 3 番 13 号
　　　　TEL (03) 3812-0757（営業直通）
印刷所　日経印刷株式会社

ISBN 4-431-70914-2　C3042　　http://www.springer-tokyo.co.jp

シリーズエディター：國井 利泰（金沢工業大学教授・同 IT 研究所長）

力学

●佐川 弘幸／本間 道雄 著

● B5 変 280 頁 本体 2,136 円 ISBN 4-431-70713-1

［目次］なぜ物理なのか？／空間、時間、ベクトル／物体の運動／運動の法則／運動と力／仕事とエネルギー I（1次元）／仕事とエネルギー II（3次元）／保存力と3次元ポテンシャル／さまざまな外力を受けた質点の運動／2つの物体の衝突／重力の法則／力のモーメント（トルク）と角運動量／多粒子系の力学／剛体の力学／カオス／付録／演習問題解答

電磁気学

●佐川 弘幸／本間 道雄 著

● B5 変 266 頁 本体 2,200 円 ISBN 4-431-70743-3

［目次］電磁気学とは？／クーロンの法則と静電場／ガウスの法則／静電ポテンシャルと静電エネルギー／ポアッソンの方程式／コンデンサーと誘電体／定常電流／静磁場と電流／ベクトル・ポテンシャルとアンペールの法則／電磁誘導の法則／インダクタンス／磁性体／マクスウェルの方程式と電磁波／演習問題解答

量子力学

●佐川 弘幸／清水 克多郎 著

● B5 変 191 頁 本体 2,400 円 ISBN 4-431-70783-2

［目次］量子力学とは／量子力学のおこり／光の粒子生と波動性／物質の波動性／不確定性原理／シュレディンガー方程式／井戸型ポテンシャルと量子力学の基礎概念／1次元のポテンシャル／スピン／結晶中の電子 –エネルギーバンド–／付録／演習問題解答

量子情報理論

●佐川 弘幸／吉田 宣章 著

● B5 変 241 頁 本体 2,800 円 ISBN 4-431-70783-2 ［目次］量子力学の基礎／EPR 対と観測問題／古典的コンピュータ／量子ゲート／情報・通信の理論／量子計算／量子暗号／量子検索アルゴリズム／量子コンピュータの設計／演習問題解答

シュプリンガー・フェアラーク東京（株）
〒113-0033 東京都文京区本郷 3-3-13
営業部：電話 03-3812-0757 Fax 03-3812-0719
ホームページ URL http://www.springer-tokyo.co.jp/

シュプリンガー・フェアラーク東京	好評既刊書

水素を覗くと宇宙が見える
● J. S. リグデン 著　上野 時宏 訳
● A5 267 頁　本体 2,800 円 ISBN 4-431-71133-3

量子論と宇宙論の世界
● M. P. シルバーマン 著　村山 良昌 訳
● A5 422 頁 本体 3,500 円 ISBN 4-431-71132-5

ニュートリノは何処へ？
● J. グリビン 著　樺沢 宇紀 訳
●四六 319 頁 本体 1,900 円 ISBN 4-431-70992-4

反物質
● G. フレーザー 著　佐藤 勝彦 監訳　澤田 哲生 訳
●四六 401 頁 本体 2,400 円 ISBN 4-431-70981-9

パウリ　物理学と哲学に関する随筆集
● W. パウリ 著　並木 美喜雄 監修　岡野 啓介 訳
● A5 260 頁 本体 3,000 円 ISBN 4-431-70805-7

量子のさいころ
● L.I. ポノマリョフ 著　澤見 英男 訳
● B5変 331頁 本体 2,893 円 ISBN 4-431-70696-8

シュレーディンガーの子猫たち
● J. グリビン 著　櫻山 義夫 訳
●四六 358 頁 本体 2,200 円 ISBN 4-431-70779-4

リーゼ・マイトナー
● R. L. サイム　著　米沢 富美子 監修　鈴木 淑美 訳
● A5 423 頁 本体 4,500 円 ISBN 4-431-71077-9

シュプリンガー・フェアラーク東京（株）
〒113-0033 東京都文京区本郷 3-3-13
営業部：電話 03-3812-0757 Fax 03-3812-0719
ホームページ URL http://www.springer-tokyo.co.jp/